Grenzwertsätze: Übungsaufgabe 1

Wir betrachten drei Folgen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$; .
$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}$; $b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$; $c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$
Zeigen Sie:

a) $\forall n < 10^6 : a_n > b_n > c_n$

b) Welche Aussage ergibt sich für $n = 10^6$?

c) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, sofern die Grenzwerte existieren.

(Hinweis: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$)

Lösung:

a)

$$\begin{array}{cccccc}
 & 10^6 & > & n & > & 0 \\
\Rightarrow & 10^3 & > & \sqrt{n} & > & 0 \\
\Rightarrow & n+10^3 & > & n+\sqrt{n} & > & 0 \\
\Rightarrow & \sqrt{n+10^3} & > & \sqrt{n+\sqrt{n}} & > & 0 \\
\Rightarrow & \sqrt{n+10^3}-\sqrt{n} & > & \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} & & \\
\Rightarrow & a_n & > & b_n & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & 10^6 & > & n & > & 0 \\
\Rightarrow & 10^3 & > & \sqrt{n} & > & 0 \\
\Rightarrow & 10^3\sqrt{n} & > & \sqrt{n}\cdot\sqrt{n} & > & 0 \\
\Rightarrow & \sqrt{n} & > & \frac{n}{10^3} & > & 0 \\
\Rightarrow & n+\sqrt{n} & > & n+\frac{n}{10^3} & > & 0 \\
\Rightarrow & \sqrt{n+\sqrt{n}} & > & \sqrt{n+\frac{n}{10^3}} & > & 0 \\
\Rightarrow & \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} & > & \sqrt{n+\frac{n}{10^3}}-\sqrt{n} & & \\
\Rightarrow & b_n & > & c_n & &
\end{array}$$

b) $a_{10^6} = \sqrt{10^6+10^3} - \sqrt{10^6}$
$b_{10^6} = \sqrt{10^6+\sqrt{10^6}} - \sqrt{10^6} = \sqrt{10^6+10^3} - \sqrt{10^6}$
$c_{10^6} = \sqrt{10^6+\frac{10^6}{1000}} - \sqrt{10^6} = \sqrt{10^6+10^3} - \sqrt{10^6}$
Also $a_{10^6} = b_{10^6} = c_{10^6}$

c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1000}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1000-n}{\sqrt{n+1000}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1000}{\sqrt{n+1000}+\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \sqrt{n+\frac{n}{1000}}-\sqrt{n} = \frac{n+\frac{n}{1000}-n}{\sqrt{n+\frac{n}{1000}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{1000}\cdot\frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{1000}}+1)} = \frac{1}{1000}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{1+\frac{1}{1000}}+1)}$$

Also divergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt nach $+\infty$.