1.3 Hinreichende Kriterien für Konvergenz

Will man die Konvergenz einer Folge mit Hilfe der $\varepsilon - N$- Definition nachweisen, so stößt man oft auf massive rechentechnische Probleme. Deswegen sucht man nach handlicheren (notwendigen und hinreichenden) Kriterien für die Konvergenz. Hier helfen die Begriffe der Beschränktheit und Monotonie einer Folge weiter.

Definition 1.3.1 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, falls*

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n < M$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach unten beschränkt, falls

$$\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n > m$$

Definition 1.3.2 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton steigend, falls*

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton fallend, falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

Nun gilt als notwendiges Kriterium für Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Lemma 1.3.3 *Wenn eine Folge konvergiert, dann ist sie auch beschränkt.*

Die Beschränktheit einer Folge ist aber nicht hinreichend für die Konvergenz, wie das Beispiel der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ zeigt.
Nimmt man zur Beschränkung noch die Monotonie hinzu, so erreicht man Konvergenz; genauer:

Lemma 1.3.4 *Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist sie konvergent.*
Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist sie konvergent.

1.4 Rekursiv definierte Folgen

Manche Folgen sind nicht explizit gegeben, (d.h. man kann das n-te Folgenglied nicht sofort berechnen) sondern werden rekursiv definiert. Ein oder mehrere Startwerte $a_1; a_2$ sind fest vorgegeben; die weiteren Folgenglieder berechnen sich durch eine Rekursionsformel:

$$a_{n+1} := g(a_n) \text{ oder } a_{n+1} := h(a_n; a_{n-1})$$

Das bekannteste Beispiel hierfür ist die Fibonacci-Folge, die die Startwerte $a_1 = 1; a_2 = 1$ vorgibt sowie die Rekursionsformel: $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$.
Selten gelingt es, einer rekursiv gegebenen Folge eine explizite Darstellung zuzuordnen. Allerdings ist der Nachweis der Konvergenz und (!) die Berechnung des Grenzwertes nicht so problematisch wie gedacht.
Man überprüft (oft mit den Mitteln der vollständigen Induktion), ob die rekursiv definierte Folge den hinreichenden Kriterien (Monotonie und Beschränktheit) genügt. Ist dies der Fall, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt für stetiges g (bzw. h):
$\exists a \in \mathbb{R} : a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) \overset{g\ stetig}{=} g(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)) = g(a)$.

Damit ist der Grenzwert ein Fixpunkt der Rekursionsfunktion g.