**Konvergenz: kurz nachgedacht 1**

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}; \quad n \geq 1$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

**Lösung:**

Wir zeigen zunächst die Existenz des Grenzwertes, indem wir Beschränktheit und Monotonie nachweisen.
Im Anschluss berechnen wir den Grenzwert.

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten durch 0 beschränkt, denn mit vollständiger Induktion nach $n$ gilt:
Induktionsanfang: $n = 1 : a_1 = 4 > 0$
Induktionsbehauptung: Für festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $a_n > 0$
Induktionsschritt: $n \to n+1$
$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \stackrel{IB}{>} \sqrt{6+0} > 0$

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend, denn mit vollständiger Induktion nach $n$ gilt:
Induktionsanfang: $n = 1 : a_1 = 4 = \sqrt{16} > \sqrt{6+4} = \sqrt{6+a_1} = a_2$
Induktionsbehauptung: Für festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $a_n > a_{n+1}$
Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{array}{ccccc} & a_n & > & a_{n+1} \\ \Rightarrow & 6 + a_n & > & 6 + a_{n+1} \\ \stackrel{(i)}{\Rightarrow} & \sqrt{6+a_n} & > & \sqrt{6+a_{n+1}} \\ \Rightarrow & a_{n+1} & > & a_{n+2} \end{array}$$

(zu (i) Da nach (1) jedes Folgenglied positiv ist, kann aus $6 + a_n$ die Quadratwurzel eindeutig gezogen werden.
Da die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist, bleiben die Ungleichheitszeichen erhalten.)

Aus (1) und (2) folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Also existiert $b \in \mathbb{R}$:
$b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n} \stackrel{(ii)}{=} \sqrt{6 + \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6+b}$
$\Rightarrow b = \sqrt{6+b} \Rightarrow b^2 = 6 + b \Rightarrow b^2 - b - 6 = 0 \Rightarrow b_1 = 3 \ \vee \ b_2 = -2.$
Als mögliche Grenzwerte kommen nur $b_1 = 3$ oder $b_2 = -2$ in Frage.
Da alle Folgenglieder positiv waren, kann der Grenzwert nicht negativ werden.
Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

(zu (ii) Da die Wurzelfunktion stetig ist, können Grenzwertberechnung und Funktionswertbildung vertauscht werden.)