Konvergenz: Übungsaufgabe 3

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a;b] \to [a;b]$ eine monoton wachsende Funktion. Für ein gegebenes $x_1 \in [a;b]$ definieren wir die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ für alle } n \geq 1$$

Zeigen Sie:
a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton.
b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.
c) Ist f zudem stetig, dann ist der Grenzwert x der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Fixpunkt von f.

Lösung:

Wir unterscheiden zwei Fälle - je nachdem, welcher Ungleichung die ersten zwei Folgenglieder genügen.
<u>1. Fall:</u> $x_1 \leq x_2$.
Behauptung: Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend.
Beweis per Induktion nach n.
Induktionsanfang: $x_1 \leq x_2$.
Induktionsbehauptung: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \leq x_{n+1}$
Induktionsschritt: $n \to n+1$
$x_n \leq x_{n+1} \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x_n) \leq f(x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}$

<u>2. Fall:</u> $x_1 \geq x_2$.
Behauptung: Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
Beweis per Induktion nach n.
Induktionsanfang: $x_1 \geq x_2$.
Induktionsbehauptung: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \geq x_{n+1}$
Induktionsschritt: $n \to n+1$
$x_n \geq x_{n+1} \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x_n) \geq f(x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} \geq x_{n+2}$

(zu (*): Da die Funktion f nach Voraussetzung monoton wachsend ist, bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten.)

b) Da nach Voraussetzung für alle $x_n \in [a;b]$ gilt, dass auch $f(x_n) \in [a;b]$, ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch a nach unten und durch b nach oben beschränkt.
(Insbesondere ist durch diese Voraussetzung die Wohldefiniertheit der Folge garantiert.)

<u>1. Fall:</u> Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und nach oben beschränkt.
Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
<u>2. Fall:</u> Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt.
Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Da die Folge in beiden Fällen konvergiert, gibt es stets ein $x \in \mathbb{R} : x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
Bei stetiger Funktion f ist es möglich, die Reihenfolge von Funktionswertbildung und Grenzwertberechnung zu tauschen (**), deshalb gilt:
$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(**)}{=} f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(x)$.
Somit ist der Grenzwert x ein Fixpunkt von f.

Man überzeuge sich, dass beide Fälle aus a) eintreten können.
Beispiel:

$$f : \begin{cases} [0;1] & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & 0,5x + 0,5 \end{cases} \quad x_1 = 0 \text{ oder } g : \begin{cases} [0;1] & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & 0,5x \end{cases} \quad x_1 = 0,5$$