Konvergenz: Übungsaufgabe 2

Man zeige, dass für jeden Startwert $x_0 \in [0;3]$ die durch die Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierte Folge konvergiert und bestimme jeweils den Grenzwert.

Lösung:

Wir zeigen zuerst, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt ist (1).

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) \geq \frac{1}{5}(0 + 6) = \frac{6}{5}$$

Diese Abschätzung ist korrekt, da $x_n^2 \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Nun stellt sich die Frage nach der Monotonie der Punktfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Betrachten wir hierfür die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{5}(x_n^2 + 6) - x_n \\ &= \frac{1}{5}(x_n^2 - 5x_n + 6) \\ &= \frac{1}{5}(x_n - 2)(x_n - 3) \end{aligned}$$

Dies führt zur folgenden Fallunterscheidung:

$$x_{n+1} - x_n \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow & x_n \in]2;3[\qquad (*) \\ = 0 \Leftrightarrow & x_n \in \{2;3\} \\ > 0 \Leftrightarrow & x_n \in \mathbb{R}\backslash[2;3] \quad (**) \end{cases}$$

Abhängig von x_n wissen wir nun, wie sich die Punktfolge verhält, jedoch nicht, wie sie sich abhängig von Startpunkt x_0 verhält.

<u>1. Fall</u>: $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & x_1 = \frac{1}{5}(2^2 + 6) = 2 \\ \Longrightarrow \quad & x_n = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ \Longrightarrow \quad & (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist konstant mit } c = \lim_{n\to\infty} x_n = 2. \end{aligned}$$

<u>2. Fall</u>: $x_0 = 3$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & x_1 = \frac{1}{5}(3^2 + 6) = 3 \\ \Longrightarrow \quad & x_n = 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ \Longrightarrow \quad & (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist konstant mit } c = \lim_{n\to\infty} x_n = 3. \end{aligned}$$

3. Fall: $x_0 \in]2;3[$

$$\begin{aligned} &\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad x_{n+1} - x_n < 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{n+1} < x_n \end{aligned}$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also streng monoton fallend und mit (1) nach unten beschränkt.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist konvergent.} \\ &\Longrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} \text{ mit } c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}(x_n^2+6)\right) \overset{\text{GWR}}{=} \frac{1}{5}(c^2+6) \\ &\Longrightarrow \quad c \in \{2;3\} \end{aligned}$$

Es muss $c = 2$ gelten, da die Folge streng monoton fallend ist.

4. Fall: $x_0 \in [0,2[$

$$\begin{aligned} &\overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad x_{n+1} - x_n > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{n+1} > x_n \end{aligned}$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also streng monoton steigend und es ist bisher keine Folgerung möglich.
Es bleibt die Frage offen, ob die Folge auch nach oben beschränkt ist.
Wir zeigen dies mit Hilfe einer Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $0 \leq x_0 < 2$
Induktionsbehauptung: Für festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $0 \leq x_n < 2$
Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & \leq & x_n & < & 2 \\ \Rightarrow & 0^2 & \leq & x_n^2 & < & 2^2 = 4 \\ \Rightarrow & 6 & \leq & x_n^2 + 6 & < & 4+6 = 10 \\ \Rightarrow & \frac{6}{5} & \leq & \underbrace{\frac{1}{5}(x_n^2+6)}_{x_{n+1}} & < & \frac{10}{5} = 2 \end{array}$$

Somit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben durch 2 beschränkt.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist konvergent.} \\ &\Longrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} \text{ mit } c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \overset{\text{GWR}}{=} \frac{1}{5}(c^2+6) \\ &\Longrightarrow \quad c \in \{2;3\} \end{aligned}$$

Es muss $c = 2$ gelten, da die Folge streng monoton steigend ist.

Zusammenfassend gilt

$$c = \begin{cases} 2 & \text{für } x_0 \in [0,3[\\ 3 & \text{für } x_0 = 3 \end{cases}$$