Konvergenz: Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

a) Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.
b) Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Lösung:

a) Zum Einstimmen berechnen wir die ersten Folgenglieder:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{k=1}^{1} \tfrac{1}{1+k} &&= \tfrac{1}{2}\\
a_2 &= \sum_{k=1}^{2} \tfrac{1}{2+k} &&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\\
a_3 &= \sum_{k=1}^{3} \tfrac{1}{3+k} &&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}\\
a_4 &= \sum_{k=1}^{4} \tfrac{1}{4+k} &&= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

Wir weisen die strenge Monotonie direkt (und nicht etwa mit Hilfe der vollständigen Induktion) nach.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+2)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1}\\
&= \frac{1}{n+n+2} + \frac{1}{n+n+1} - \frac{1}{n+1}\\
&= \frac{2n+1+2(n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}\\
&= \frac{1+2-2}{2(n+1)(2n+1)}\\
&= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\\
&> 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt für jedes $n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$.

(zu (1) Hier erfolgte eine Indextransformation $k \to k+1$ in der ersten Summe.)

b) Wir zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 1 nach oben beschränkt ist.

$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Da die Folge streng monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt ist, ist die Folge auch konvergent.