vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie

III.1. Elementare Logik - Exkurs: Euklid: Algorithmus, Spiel

Der euklidische Algorithmus ist einer der ersten Algorithmen überhaupt. Unter einem **Algorithmus** versteht man ein Lösungsverfahren zur Behandlung eines Problems; der Name ist eine Verballhornung des Namens von Muhammad al-Ḫwārizmī, dessen arabisches Lehrbuch *Über das Rechnen mit indischen Ziffern* aus dem Jahre 825 in der mittelalterlichen lateinischen Übersetzung mit den Worten 'Dixit Algorismi' (Algorismi hat gesagt) beginnt.

Muhammad ibn Mūsā Muhammad al-Ḫwārizmī (al-Choresmi), ∗ ca. 780 – † ca. 850 in Bagdad(?); Begründer der Algebra, dabei entstammt das Wort 'Algebra' dem Unvermögen der Europäer, das arabische Wort 'al-ğabr' (Ergänzen) im Titel al-Ḫwārizmīs Lehrbuch 'al-Kitāb al-muḫtaṣar fī hisab al-ğabr wa'l-muqābala' (etwa 'Kleines Buch über das Rechnen durch Ergänzung und Ausgleich') korrekt auszusprechen.

Euklid berechnete den größten gemeinsamen Teiler, indem er nach einem gemeinsamen Maß für die Längen zweier Strecken suchte. Dazu zog er wiederholt die kleinere der beiden Längen von der Größeren ab. Dabei nutzte er aus, dass sich der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen (oder Längen) nicht ändert, wenn man die kleinere von der größeren abzieht. Ist diese Differenz sehr groß, sind unter Umständen viele Subtraktionsschritte notwendig. Hippasos von Metapont benutzte schon vor Euklid diese so genannte Wechselwegnahme geometrisch für den Beweis der Inkommensurabilität der Diagonale im Quadrat.

Jetzt wird *gespielt*: Das Spiel Euklid wurde eingeführt von Cole & Davie. Es wird von zwei Personen gespielt, die abwechselnd ziehen, wobei eine Spielposition ein Paar (a, b) natürlicher Zahlen ist; ein Zug aus der Position (a, b) besteht darin, dass von der größeren der beiden Zahlen ein positives Vielfaches der kleineren abgezogen wird, so dass die neue Position wieder ein Paar natürlicher Zahlen bildet. Der erste Spieler, der nicht mehr ziehen kann (weil er nicht zu einem Paar in $\mathbb{N}^2$ gelangen kann), hat verloren. Hier ein Beispiel:

$$(27, 17) \;\rightarrow\; (10, 17) \;\rightarrow\; (10, 7) \;\rightarrow\; (3, 7) \;\rightarrow\; (3, 1) \;\rightarrow\; (1, 1).$$

Cole & Davie haben die Positionen bestimmt, die dem ersten Spieler einen Sieg garantieren — vorausgesetzt er spielt optimal. Es ist sinnvoll, zunächst ein paar Mal dieses Spiel zu spielen, statt sofort weiterzulesen.

Satz: Der erste Spieler besitzt genau dann eine Gewinnstrategie, wenn der Quotient der größeren dividiert durch die kleinere der beiden Zahlen größer ist als $G := \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Die Zahl G ist der **Goldene Schnitt** (auch bekannt aus Biologie, Kunst und Architektur); über diese Zahl werden wir noch einige interessante Sachen erfahren. Wir folgen hier einem geometrischen Beweisargument von Lengyel:

Beweis. Es sei
$$g := \frac{1}{G} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$
Wir betrachten den Kegel
$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x,y > 0, gx < y < Gx\}$$
in der euklidischen Ebene. Das Ziel des Spieles ist zur Diagonalen $y = x$ zu ziehen, da dann der andere Spieler nicht ziehen kann. Für jede Position (a,b) abseits der Diagonalen gibt es genau eine Richtung, in die gezogen werden kann; diese ist horizontal, falls $a > b$, und sonst vertikal. Ferner gibt es zu jedem $a \in \mathbb{N}$ genau a Punkte $(x,y) \in \mathcal{C}$ mit $x = a$ (das folgt sofort aus der Tatsache, dass sowohl g als auch G irrational sind und $G - g = 1$ gilt). Wenn also $a < b$ und $(a,b) \notin \mathcal{C}$, dann gibt es genau eine natürliche Zahl k, so dass $(a, b - ak) \in \mathcal{C}$. Gegeben eine Position (a,b) in $\mathcal{C}$, so führt jeder mögliche Zug aus $\mathcal{C}$ heraus. Im Falle $a = b$ kann der Spieler nicht ziehen und hat somit verloren. Liegt also die Startposition (a,b) außerhalb des Kegels $\mathcal{C}$, so kann der erste Spieler - optimales Spiel vorausgesetzt - stets einen Zug in den Kegel realisieren, was den nachziehenden Spieler zu einem Zug außerhalb $\mathcal{C}$ zwingt. Das Spiel terminiert mit einer Position (a,a) für den zweiten Spieler und der Satz ist bewiesen.