vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie

III.2. Kettenbrüche und Approximation reeller Irrationalzahlen- Exkurs: periodische Kettenbrüche

Betrachtet man die Kettenbruchentwicklungen von Quadratwurzeln, so lassen sich bestimmte Muster beobachten. Hier einige Beispiele:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}}} = [1, \overline{2}],$$

$$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}], \quad \sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}],$$

$$\sqrt{109} = [10, \overline{2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20}].$$

Alle Beispiele dieser quadratischen Irrationalitäten haben eine periodische Kettenbruchentwicklung! Hierbei heißt ein Kettenbruch $[a_0, a_1, \dots]$ **periodisch**, falls ein Index l existiert, so dass $a_{n+l} = a_n$ für alle hinreichend großen n. Wir schreiben dann

$$[a_0, a_1, \dots, a_r, \overline{a_{r+1}, \dots, a_{r+l}}] = [a_0, a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots a_{r+l}, a_{r+1}, \dots, a_{r+l}, \dots],$$

wobei $a_{n+l} = a_n$ für alle $n > r$ gilt. Die Folge $a_{r+1}, \dots, a_{r+l}$ heißt Periode und l ist ihre Länge. Die minimale Periode nennt man auch primitive Periode. Der folgende Satz beschreibt die Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln in sehr expliziter Weise:

Satz: Genau dann wenn $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat ist, gilt

$$\sqrt{d} = [\lfloor\sqrt{d}\rfloor, \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor}],$$

wobei $a_1, a_2, \dots a_2, a_1$ ein Palindrom ist.

Den Beweis hierzu führte Evariste Galois. Der am 25. Oktober 1811 in Bourg-la-Reine geborene französische Mathematiker ist trotz seines frühen Todes (31. Mai 1832 in Paris) im Alter von nur 20 Jahren durch seine Arbeiten in der Zahlentheorie und Algebra unsterblich geworden.

Der Satz von Lagrange besagt, dass genau die quadratischen Irrationalzahlen eine schließlich periodische Kettenbruchentwicklung besitzen.