vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie
III.2. Kettenbrüche und Approximation reeller Irrationalzahlen
-Exkurs: Huygens

Wiederholung: **Kettenbruch**
Kettenbrüche sind ein besonders wichtiges Werkzeug in der Zahlentheorie. Eine spezielle Form der Kettenbrüche sind die **endlichen Kettenbrüche**. Sie sind von folgender Gestalt:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}} =: [a_0; a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m].$$

Kettenbrüche werden schon lange als Werkzeug zur Findung geeigneter rationaler Approximationen benutzt. Eine systematische Theorie wurde durch den Astronomen **Huygens** im 17. Jahrhundert gegeben, als dieser ein **mechanisches Modell unseres Sonnensystems** bauen wollte. Die Theorie der Kettenbrüche wurde durch namhafte Mathematiker wie z.B. Euler, Lagrange, Legendre oder Gauß fortgeführt. Seitdem haben Kettenbrüche viele Anwendungen innerhalb der Mathematik und in Technologien gefunden.

Christiaan Huygens war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker. Er begründete u.a. die Wellentheorie des Lichts, formulierte in seinen Untersuchungen zum elastischen Stoß ein Relativitätsprinzip und konstruierte die ersten Pendeluhren. Mit von ihm selbst verbesserten Teleskopen gelangen ihm wichtige astronomische Entdeckungen.

HUYGENS MECHANISCHES MODELL DES SONNENSYSTEMS

Im Jahr 1682 baute Huygens ein mechanisches Modell unseres Sonnensystems. In einem Jahr überstreicht die Erde 359°45'40''30''' und der Saturn 12°13'34''18''' ihrer Umlaufbahn um die Sonne; das ergibt ein Verhältnis von

$$77708431 : 2640858 = 29,42544...$$

Für die Konstruktion der entsprechenden Zahnräder des Modells sollte gelten, dass die Quotienten der Anzahlen der Zähne der Zahnräder gleich den Quotienten der Umlaufzeiten der jeweiligen Planeten sein sollte.

Für den Bau des Modells ist dabei eine Approximation notwendig, da kleine Zahnräder mit vielen Zähnen technisch schwer realisierbar sind.

Huygens suchte also nach kleinen natürlichen Zahlen (Zähnen) P, Q mit $\frac{P}{Q}$ nahe $29,43$.

Dabei sollten P und Q möglichst klein sein, um die technische Realisierung leicht durchführen zu können.

Mit Hilfe einer *Kettenbruchapproximation* ist ihm folgende Näherung gelungen:

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1123549}{2640858} = 29 + \cfrac{1}{\frac{2640858}{1123549}} = 29 + \cfrac{1}{2 + \frac{393760}{1123549}} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{1123549}{393760}}} =$$

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{336029}{393760}}} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + ...}}} \approx 29 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{206}{7}$$

Somit benötigte Huygens ein Zahnrad mit 206 und ein zweites mit nur 7 Zähnen, um die Umlaufzeit von Saturn und Erde um die Sonne zu approximieren!