vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie
III.2. Kettenbrüche und Approximation reeller Irrationalzahlen
-Exkurs: Fibonacci-Zahlen

Wiederholung: **Fibonacci-Zahlen**
Die Fibonacci-Zahlen bilden eine der bekanntesten Zahlenfolgen. Sie fängt mit 0 und 1 an, und jede weitere Fibonacci-Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgängerinnen. Es besteht also neben $F_0 = 0$ und F_1 für die Folge der Fibonacci-Zahlen F_n für $n \in \mathbb{N}$ die Rekursionsvorschrift

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Die ersten Fibonacci-Zahlen sind also:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

Benannt sind die Zahlen nach *Leonardo da Pisa* auch als *Fibonacci* bekannt, der damit um 1200 das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieb.

Leonardo da Pisa (circa 1180-1241), auch Fibonacci genannt, war Rechenmeister in Pisa und gilt als der bedeutenste Mathematiker des Mittelalters. Über sein Leben ist nur wenig bekannt. Die meisten Angaben gehen zurück auf den Widmungsprolog seines Rechenbuches. Sein Vater war Notar und reiste dadurch oft an verschiedene Handelsorte. Auf diese Reisen nahm er seinen Sohn Leonardo mit. So erlernte Leornardo das Rechnen mit den für uns heute üblichen arabischen Ziffern und konnte sich großes Wissen aneignen.

Die Zahlenfolge der Fibonacci-Zahlen taucht in den verschiedensten Bereichen unseres alltäglichen Lebens auf, wie z.B der Biologie, Physik oder der Musik. Es gibt beispielsweise Pflanzen (Sumpf-Schafgarbe), in denen man im Aufbau der Blüten die ersten Fibonacci-Zahlen findet. In der Architektur sind Proportionen gemäß Fibonacci-Zahlen (ähnlich dem 'goldenen Schnitt') sehr beliebt.

Ein weiteres Beispiel eines Naturphänomens, welches sich mit Hilfe von Fibonacci-Zahlen beschreiben lässt, liefern die **Bienen**, deren Familienstammbaum die Fibonacci-Zahlen aufweist:

In einem Bienenvolk haben nicht alle Bienen zwei Elternteile. Männliche Bienen entstehen durch unbefruchtete Eier der Bienenkönigin. Folglich haben männliche Bienen nur eine Mutter und keinen Vater. Alle Weibchen werden gezeugt, indem sich die Königin mit einem Männchen paart und haben somit zwei Elternteile, einen Vater und eine Mutter.

Betrachtet man nun den Familienstammbaum einer männlichen Arbeiterbiene genauer, so fällt auf:

Sie hat **1 Elternteil**, nämlich ein Weibchen.
Sie hat **2 Großeltern**, denn ihre Mutter hat zwei Elternteile.
Sie hat **3 Urgroßeltern**, ihre Großmutter hat zwei Elternteile, aber ihr Großvater nur einen, etc.

Anzahl der	Eltern	Großeltern (:=GE)	UrGE	UrurGE	UrururGE	...
Männliche Biene	1	2	3	5	8	...
Weibliche Biene	2	3	5	8	13	...

Man erkennt hier deutlich die Folge der **Fibonacci-Zahlen**.

Der Rekursionsformel entnimmt man für den Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen leicht

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = [1, 1, 1, ..., 1] \ (n\text{-mal}); \quad \text{z.B. } \frac{5}{3} = [1, 1, 1, 1].$$

Was passiert, wenn wir hier n gegen Unendlich streben lassen? Angenommen, der unendlicher Kettenbruch mit lauter 1en als Teilnenner ist die uns unbekannte reelle Zahl x. Dann gilt

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

so dass also x (wie einfaches Umformen zeigt) die positive Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$X^2 - X - 1 = (X - G)(X + g)$$

ist, wobei $G := \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ der 'Goldene Schnitt' und $g := G^{-1}$ ist. Also gilt

$$G = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = [1, 1, 1, ...].$$