vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie

III.2. Kettenbrüche und Approximation rationaler Zahlen - Beispiel: Das Sonnenjahr

Das Sonnenjahr hat ungefähr

$$\text{365 Tage 5 Stunde 48 Minuten und 45.8 Sekunden} \quad \approx \quad 365 + \frac{\mathbf{419}}{\mathbf{1730}} \text{ Tage.}$$

Unglücklicherweise ist dies keine ganze Zahl, wie also bildet man einen *guten* Kalender? Mit dem euklidischen Algorithmus findet man

$$\begin{aligned} 1730 &= 4 \cdot 419 + 54, \\ 419 &= 7 \cdot 54 + 41, \\ 54 &= 1 \cdot 41 + 13, \\ &\dots \end{aligned}$$

Durch zeilenweise Betrachtung kommt man auf

$$\frac{\mathbf{1730}}{\mathbf{419}} = \mathbf{4} + \frac{54}{419},$$

bzw.

$$365 + \frac{\mathbf{419}}{\mathbf{1730}} = 365 + \left(\frac{\mathbf{1730}}{\mathbf{419}}\right)^{-1} \approx 365 + \frac{1}{\mathbf{4}}.$$

Dies ist nichts anderes als der Julianische Kalender (nach Caesar): Alle vier Jahre ein Schaltjahr. Mit dem vollständigen euklidischen Algorithmus ergibt sich

$$365 + \frac{\mathbf{419}}{\mathbf{1730}} = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}}}}}.$$

Diese rationale Näherung ohne den letzten Bruch $\frac{1}{2}$ liefert die Approximation

$$365 + \frac{194}{801} \approx 365 + \frac{\mathbf{419}}{\mathbf{1730}},$$

welche unseren derzeitigen Gregorianischen Kalender (nach Papst Gregor XIII, 1582) repräsentiert: In 800 Jahren werden 6 (= 200 − 194) der Schaltjahre ausgelassen. Die Geschichte der Kalender in einem Kettenbruch!