vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie

III.2. Kettenbrüche und Approximation rationaler Zahlen - Beispiel: Kettenbruchentwicklung von $\alpha = \frac{12}{5}$ und $\alpha = \pi$

Für die beispielhafte rationale Zahl $\alpha = \frac{12}{5}$ berechnet sich sukzessive

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \tfrac{7}{5}, \quad a_0 = \lfloor \tfrac{7}{5} \rfloor = 1 \quad &\rightsquigarrow \quad \tfrac{7}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} \\ \alpha_1 = \tfrac{5}{2}, \quad a_1 = \lfloor \tfrac{5}{2} \rfloor = 2 \quad &\rightsquigarrow \quad \tfrac{5}{2} = 2 + \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

was wegen $\alpha = 2 = 2 = \lfloor a_2 \rfloor$ auf den endlichen Kettenbruch

$$\tfrac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [1, 2, 2]$$

führt (und man mit dem entsprechenden euklidischen Algorithmus vergleichen mag: $7 = 1 \cdot 5 + 2$ und $5 = 2 \cdot 2 + 1$ mit Division durch 5 bzw. 2).

Aber was passiert für eine Irrationalzahl? Z.B. kommt für $\alpha = \pi = 3.14159\ldots$

$$\begin{aligned} a_0 = \lfloor \pi \rfloor = 3 \qquad &\text{und} \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\pi - 3} = 7.06251\ldots, \\ a_1 = \lfloor 7.06251\ldots \rfloor = 7 \qquad &\text{und} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{7.06251\ldots - 7} = 15.99744\ldots, \\ a_2 = \lfloor 15.99744\ldots \rfloor = 15 \qquad &\text{und} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{15.99744\ldots - 15}. \end{aligned}$$

Dies gibt $\pi = [3, 7, 15, \alpha_3]$.