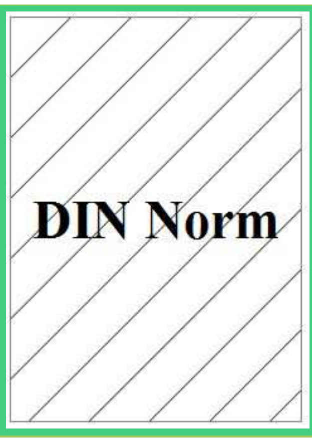
---

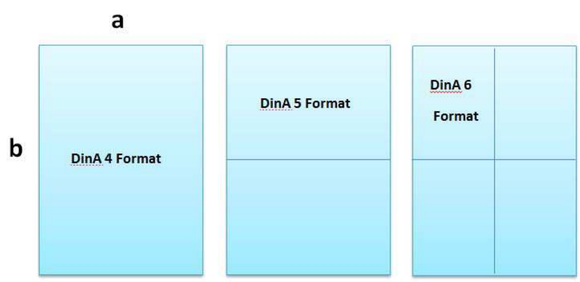
vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie
III.2. Kettenbrüche und Approximation reeller Irrationalzahlen
-Exkurs: DinA-Format

Jetzt ein weiteres Beispiel der außerordentlichen Nützlichkeit von Mathematik im täglichen Leben:



Eine Din-Norm ist ein unter Leitung eines Arbeitsausschusses im Deutschen Institut für Normung erarbeiteter freiwilliger Standard, in dem materielle und immaterielle Gegenstände vereinheitlicht sind. Din-Normen entstehen auf Anregung und durch die Initiative interessierter Kreise (in der Regel die deutsche Wirtschaft), wobei Übereinstimmung unter allen Beteiligten hergestellt wird. Ein Beispiel für eine Din Norm ist das Papierformat DinA.

Das Papierformat Din-A besitzt sehr nützliche Selbstähnlichkeitseigenschaften. Falten wir ein solches Blatt Papier in der Mitte der beiden längeren Kante, so bleibt die Proportion (nahezu) erhalten.



Damit ist diese Proportion also idealerweise $\sqrt{2} : 1$. Weil aber $\sqrt{2}$ irrational ist, muss man für die praktische Realisierung von Din-A–Formaten gute rationale Approximationen an $\sqrt{2}$ finden. Dazu berechnen wir den Kettenbruch zu $\sqrt{2}$.

Es gilt

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

bzw.

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}.$$

Erweitern mit $\sqrt{2} + 1$ liefert

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{2}-1)} \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}.$$

Substituieren wir unsere Ausgangsgleichung, so folgt $\sqrt{2} - 1 = [0, 2, 2, ...]$. Also zeigt sich

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = [1, 2, 2, ...].$$

Per Definition besitzt ein Din-A4 Papier eine Seitenlänge von $29,7$cm und eine Breite von 21cm. Diese Proportion ist ein Näherungsbruch von $\sqrt{2}$:

$$\tfrac{29,7}{21} = \tfrac{99}{7} = [1, 2, 2, 2, 2, 2] \approx \sqrt{2} = [1, 2, 2, ...].$$

Die Differenz beider Größen ist $0,00007...$, also liefert $\frac{99}{7}$ eine hervorragende Näherung an $\sqrt{2}$.