vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie

III.2. Kettenbrüche und Approximation rationaler Zahlen - Beispiel: Dirichletscher Approximationssatz für π

Es lässt sich zeigen, dass $\frac{355}{113}$ eine außerordentlich gute Näherung an π ist. Tatsächlich ist dies ein Näherungsbruch an

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 21, 31, 14, 2, 1, 2, 2, 2, \ldots];$$

schneiden wir nämlich den Kettenbruch vor 292 ab, so erhalten wir

$$\frac{355}{113} = [3, 7, 15, 1] = \frac{p_3}{q_3}.$$

Da $a_4 = 292$ im Vergleich zu $q_3 = 113$ sehr groß ist, liefert dies eine exzellente Approximation:

$$0 < \frac{355}{113} - \pi < \frac{1}{292 \cdot 113^2} = 0.00000\,02682\ldots.$$

Ausserdem folgt, dass der nächste Näherungsbruch einen extrem großen Nenner besitzt, denn $q_4 = a_4 q_3 + q_2 = 292 \cdot 113 + 106 = 33\,102$. Die Folge der ersten Näherungsbrüche ist identisch mit den besten Approximationen an π, die man finden kann (in dem Sinne, dass es keine besseren rationalen Approximationen mit einem kleineren Nenner gibt):

$$\frac{3}{1} < \frac{333}{106} < \frac{1\,03993}{33102} < \ldots < \pi < \ldots < \frac{355}{113} < \frac{22}{7}.$$

Diese Beobachtung lässt sich mit dem Gesetz von Lagrange erklären.