vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie

III.2. Lineare diophantische Gleichungen - Beispiel einer rationalen Approximation

Die ganzzahligen Lösungen der linearen diophantischen Gleichung

$$106X - 333Y = 1.$$

aus dem vorangegangenen Beispiel sind auch noch aus anderer Sicht sehr interessant: Jede Lösung x, y gibt auch eine *gute rationale* Approximation $\frac{x}{y}$ an $\frac{333}{106}$. Schreiben wir nämlich eine solche Lösung als

$$\frac{x}{y} = \frac{333}{106} - \frac{1}{106x}, \tag{1}$$

dann ist der zweite Term rechts klein, und zwar beliebig klein mit wachsendem $|x|$. Also liefern die Lösungen x, y immer bessere Approximationen an $\frac{333}{106}$. Jeder Bruch $\frac{P}{Q}$ mit einem Nenner $1 \leq Q < 106$ genügt

$$\left| Q\frac{333}{106} - P \right| = Q \left| \frac{333}{106} - \frac{P}{Q} \right| = Q\frac{|106P - 333Q|}{106Q} \geq \frac{1}{106},$$

wobei Gleichheit genau für Lösungen P, Q unserer Gleichung gilt. Also lässt sich $\frac{333}{106}$ *nicht besser approximieren* als mit den Brüchen gebildet aus den Lösungen unserer Gleichung. Natürlich gilt all dies allgemeiner als für diese spezielle lineare diophantische Gleichung. In einem gewissen Sinne haben wir ja im obigen Beispiel lediglich eine *Gleichung* durch eine *Ungleichung* ersetzt; diese Idee, lineare diophantische Gleichungen durch rationale Approximationen zu lösen, geht zurück auf die indischen Mathematiker Aryabhata (um 550 n.Chr.) und Bhaskara (um 1150).

Übrigens starten die (in diesem Sinne) *besten* rationalen Approximationen an die irrationale Kreiszahl $\pi = 3,14159\,26\ldots$ mit

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{1\,03993}{33102}, \ldots \quad \longrightarrow \quad \pi,$$

und wir finden hier mit den Zahlen $\frac{22}{7}$ und $\frac{333}{106}$ zwei alte Bekannte wieder.