vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie
III.3. Primzahlen -Exkurs: Mysterium Primzahlen

Die 'alten Griechen' führten nicht nur den Begriff *Atom* (griech. 'tomos' für 'das Unzerschneidbare') für die unteilbaren Bestandteile der Materie ein, sie führten ebenso den entsprechenden Begriff der *Primzahl* in die Mathematik ein: Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl, die größer als eins und ausschließlich durch sich selbst und durch eins teilbar ist.

Der Satz des Euklid besagt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Die größte zur Zeit bekannte Primzahl ist

$$2^{43112609} - 1.$$

Diese Zahl hat mehr als *zwölf Millionen Stellen* und wurde im August 2008 im Rahmen des GIMPS-Projekts gefunden (siehe http://www.mersenne.org/).

Eratosthenes (276 v. Chr. in Kyrene (Libyen)- 194 v. Chr. in Alexandria); Universalgelehrter und Direktor der legendären alexandrinischen Bibliothek. Eratosthenes bestimmte unter anderem den Erdumfang mit einer erstaunlichen Genauigkeit als 39 375 Kilometer (nach heutigen Messungen beträgt der Erdumfang 40 074 km).

Wie sind die Primzahlen innerhalb der natürlichen Zahlen verteilt?

Um ein erstes Bild von der Verteilung der Primzahlen zu gewinnen, benutzen wir das so genannte **Sieb des Eratosthenes**: Wir streichen sukzessive die *echten* Vielfachen der Primzahlen aus einer Liste der natürlichen Zahlen größer Eins:

$$2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ \ldots$$

Die kleinste Zahl dieser Liste ist eine Primzahl (muss eine Primzahl sein!), nämlich $p = 2$; die echten Vielfachen sind die geraden Zahlen > 2 und keine von denen ist prim:

$$2\ 3\ \cancel{4}\ 5\ \cancel{\mathbf{6}}\ 7\ \cancel{8}\ 9\ \cancel{\mathbf{10}}\ 11\ \cancel{\mathbf{12}}\ 13\ \cancel{\mathbf{14}}\ 15\ \cancel{\mathbf{16}}\ 17\ \cancel{\mathbf{18}}\ 19\ \cancel{\mathbf{20}}\ \ldots$$

Die kleinste ungestrichene Zahl unserer Liste > 2 ist natürlich eine Primzahl, nämlich $p = 3$. Streichen aller echten Vielfachen von 3 liefert:

$$2\ 3\ \cancel{4}\ 5\ \cancel{\mathbf{6}}\ 7\ \cancel{8}\ \cancel{\mathbf{9}}\ \cancel{10}\ 11\ \cancel{\mathbf{12}}\ 13\ \cancel{14}\ \cancel{\mathbf{15}}\ \cancel{16}\ 17\ \cancel{\mathbf{18}}\ 19\ \cancel{\mathbf{20}}\ \ldots$$

Wir beobachten, dass die verbleibenden Zahlen dieser Liste genau die Primzahlen $p \leq 20$ sind:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19.$$

Hätten wir eine längere Liste natürlicher Zahlen angelegt, so wären womöglich noch zusammengesetzte Zahlen übriggeblieben; beispielsweise besitzt $25 = 5^2$ nur Primfaktoren, die echt größer als die Primzahlen sind, mit Hilfe derer wir unsere Liste gesiebt haben. Ist $n = ab$ eine zusammengesetzte Zahl und in deren Faktorisierung weder a noch $b = 1$, so sprechen wir von einer *echten* Faktorisierung. In diesem Fall muss mindestens einer der Faktoren $\leq \sqrt{n}$ sein (ansonsten wären ja beide $> \sqrt{n}$ und also ihr Produkt echt größer als n, ein Widerspruch).

Die Primzahlen sind die *multiplikativen Atome*, aus denen die natürlichen Zahlen zusammengesetzt sind; z.B:

$$2009 = 7^2 \cdot 41, \quad 47 = 47, \quad -363 = -1 \cdot 3 \cdot 11^2.$$

Primzahlen faszinieren aus verschiedenen Gründen. Zum einen sind sie recht 'einfache' Objekte, aber trotzdem gibt es eine Fülle von schwierigen, teilweise ungelösten mathematischen Problemen, die mit Primzahlen zusammenhängen.

Die ungelöste Primzahlzwillingsvermutung besagt, dass es unendlich viele Pärchen von Primzahlen der Form $p, p+2$ gibt. Beispiele von solchen Primzahlen findet man schnell:

$$3\,\&\,5, \quad 7\,\&\,9, \quad 11\,\&\,13, \quad 17\,\&\,19, \quad \ldots\,, \quad 101\,\&\,103, \quad \ldots$$

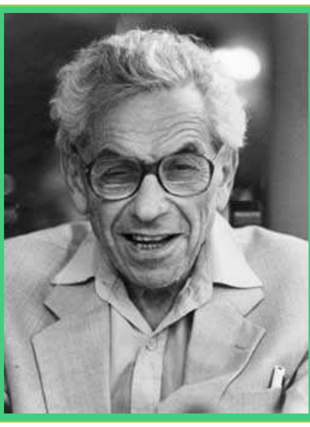
Der größte bekannte Primzahlzwilling ist $2003663613 \cdot 2^{195000} \pm 1$.

Ein weiteres ungelöstes Problem ist die **Goldbachsche Vermutung**, welche besagt, dass jede gerade Zahl ≥ 4 sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt. Für explizit gegebene Zahlen ist diese leicht zu verifizieren, z.B.:

$$4 = 2+2, \quad 10 = 3+7 = 5+5, \quad 20 = 17+3 = 13+7.$$

Tatsächlich scheint dieses Problem einfacher zu werden, je größer die Zahl ist, die in Primzahlen zerlegt werden soll. Natürlich wachsen die Möglichkeiten für solche Zerlegungen mit der Größe der geraden Zahl, die so dargestellt werden soll. Man kann tatsächlich mit Hilfe sehr fortgeschrittener Methoden zeigen, dass auch *die meisten* geraden Zahlen *eine Vielzahl* solcher Zerlegungen besitzen, jedoch können Ausnahmen bislang nicht ausgeschlossen werden.

Warum sind die oben genannten Probleme schwierig? Sie verbinden multiplikative Strukturen (Primzahlen) mit additiven Fragestellungen. Diese Art von Problemen sind tatsächlich oft sehr hartnäckig, insbesondere weil die Primzahlen eine recht *dünne* Teilmenge der natürlichen Zahlen bilden. Paul Erdös sagte einmal: *"... jeder Dummkopf kann Fragen über Primzahlen stellen, auf die auch der klügste Mensch keine Antwort hat."*



Paul Erdös (1913-1996) war ein bemerkenswerter Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er arbeitete in Kombinatorik, Graphentheorie und Zahlentheorie und publizierte mehr als eintausend wissenschaftliche Arbeiten. Er ist bekannt für seine Idee eines Buches, in dem Gott die perfekten Beweise für mathematische Sätze aufbewahrt. Ein Versuch, diesem Buch nahe zu kommen, war die Veröffentlichung von *Das Buch der Beweise* von Aigner und Ziegler.