

---

## vhb - Kurs: Grundlagen der elementaren Zahlentheorie

### III.4. Rechnen mit Restklassen - Beispiel: Gruppentafel

---

Für das Modul  $m = 3$  gibt es drei verschiedene Restklassen und diese lassen sich etwa als die Mengen der ganzen Zahlen beschreiben, die bei Division durch 3 entweder den Rest 0, 1 oder 2 lassen. Mit der eingeführten Addition und Multiplikation von Restklassen ergeben sich die folgenden Tabellen:

| $+$ | 0 | 1 | 2 |     | $\cdot$ | 0 | 1 | 2 |
|-----|---|---|---|-----|---------|---|---|---|
| 0   | 0 | 1 | 2 | und | 0       | 0 | 0 | 0 |
| 1   | 1 | 2 | 0 |     | 1       | 0 | 1 | 2 |
| 2   | 2 | 0 | 1 |     | 2       | 0 | 2 | 1 |

Wir erinnern uns an den Begriff der Gruppe bzw. des Rings aus dem vorherigen Modul. Tatsächlich zeigt die obige 'Gruppentafel', dass die Menge  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  der Restklassen modulo 3 eine Gruppe mit der oben eingeführten Addition von Restklassen bildet; ferner erweist sich  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  als abgeschlossen bzgl. der Multiplikation von Restklassen. Also ist  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  mit diesen Operationen ein Ring. Tatsächlich ist  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  sogar ein Körper, wie man der Gruppentafel für die Multiplikation entnimmt.

Ein weiteres Beispiel liefert  $m = 4$ . Hier findet man ganz ähnlich:

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 |     | $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|---|---|---|---|-----|---------|---|---|---|---|
| 0   | 0 | 1 | 2 | 3 | und | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1   | 1 | 2 | 3 | 0 |     | 1       | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2   | 2 | 3 | 0 | 1 |     | 2       | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3   | 3 | 0 | 1 | 2 |     | 3       | 0 | 3 | 2 | 1 |

Auch hier ist  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  ein Ring, allerdings kein Körper, da etwa  $2 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{4}$  gilt (ein Phänomen, das wir später noch studieren werden).