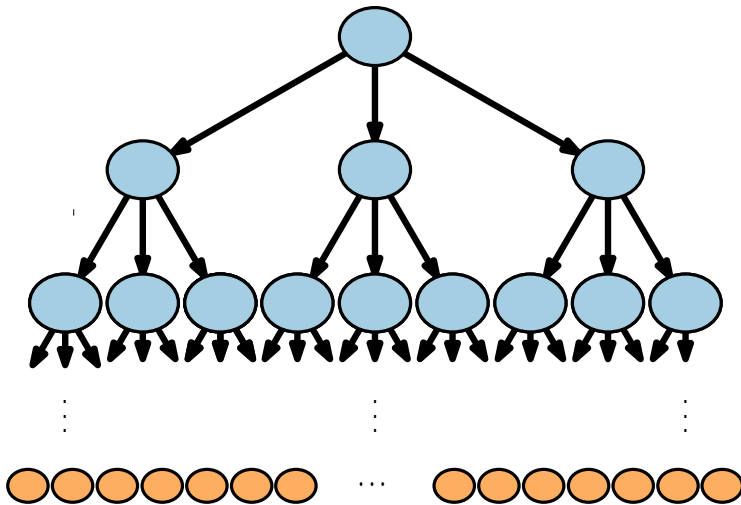




Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 5: Rekursionsgleichungen



Samuel Wolf

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$



Wintersemester 2026

Putting Things Together

Laufzeit von MAXTEILFELD:

$$T_{\text{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$: $T_{\text{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + T_{\text{MMT}}(n)$

$$= 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + n$$

$$= V_{\text{MS}}(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n) \quad \text{[für } n = \text{Zweierpotenz}]$$

MERGESORT

„Runde auf“ zu nächster
Zweierpotenz $n' < 2n$

Denn für $a, b \geq 2$ gilt:
 $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.



Denkaufgaben:

■ Lösen Sie MAXSUM in $\mathcal{O}(n)$ – also in linearer – Zeit!

■ **Und wenn...** $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (und $T(1) = \Theta(1)$)

Gilt dann auch $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$?

Putting Things Together

Laufzeit von MAXTEILFELD:

$$T_{\text{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$: $T_{\text{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + T_{\text{MMT}}(n)$

$$= 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + n$$

$$= V_{\text{MS}}(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n) \quad \text{[für } n = \text{Zweierpotenz}]$$

MERGESORT

„Runde auf“ zu nächster
Zweierpotenz $n' < 2n$

Denn für $a, b \geq 2$ gilt:
 $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.



Denkaufgaben:

- Lösen Sie MAXSUM in $\mathcal{O}(n)$ – also in linearer – Zeit!

- **Und wenn...** $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (und $T(1) = \Theta(1)$)

Gilt dann auch $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$?

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n .

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$
 $\leq$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$\leq$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n$ (wegen **IA** für $k = \frac{n}{2}$)

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad (\text{wegen IA für } k = \frac{n}{2})$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned} &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n && \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\ &= cn. \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned} &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n && \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\ &= cn. \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned} &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad (\text{wegen IA für } k = \frac{n}{2}) \\ &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned} &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad (\text{wegen IA für } k = \frac{n}{2}) \\ &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned} &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2}) \\ &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n
 \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2}) \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n
 \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n
 \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
 \end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n$$

$$\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$)

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
 \end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
 \end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
 \end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
 \end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$

$$\begin{aligned} &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2}) \\ &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\ &= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\ &= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\ &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4. \end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + dn \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)} \\
 &= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + dn \\
 &= c \cdot n \log_2 n - cn + dn \\
 &= c \cdot n \log_2 n + (d - c)n \\
 &\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq d.
 \end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$

$$\leq 2c \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + dn \stackrel{=1}{=} \text{(wegen IA für } k = \frac{n}{2} \text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + dn$$

$$= c \cdot n \log_2 n - cn + dn$$

$$= c \cdot n \log_2 n + (d - c)n$$

$$\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq d$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \dots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$!

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n = \text{Zweierpotenz}$ bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir:

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n .

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme:

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$
 $\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1$ (wegen **IA**)

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 && \text{(wegen IA)} \\
 &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1
 \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 && \text{(wegen IA)} \\
 &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq c \cdot n + 1
 \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 && (\text{wegen IA}) \\
 &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq c \cdot n + 1 \quad \text{⚡}
 \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis: Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 && \text{(wegen IA)} \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot n + 1 \quad \text{⚡} \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis.

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n .

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme:

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\ &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\
 &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \\
 &= c \cdot n + 3
 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\
 &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \\
 &= c \cdot n + 3
 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\
 &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \\
 &= c \cdot n + 3 \quad \text{⚡}
 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis: Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

$$\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1$$

$$= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3$$

$$= c \cdot n + 3 \quad \text{⚡}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir:

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n .

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$ falls $c \geq 1$ ✓

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$ falls $c \geq 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - 1$ für alle $k < n$.

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$ falls $c \geq 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$ falls $c \geq 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$ falls $c \geq 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$
 $\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - 1) + 1$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$ falls $c \geq 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - 1$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - 1) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 1 \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - 1$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - 1$ falls $c \geq 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - 1$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - 1) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 1 \\ &\leq c \cdot n - 1 \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 2d + 1 \\ &\leq c \cdot n - d \quad \text{falls } d \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 2d + 1 \\ &\leq c \cdot n - d \quad \text{falls } d \geq 1. \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für eine Konstante $c > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
 &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\
 &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 2d + 1 \\
 &\leq c \cdot n - d \quad \text{falls } d \geq 1. \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für eine Konstante $c > 0$. ✓

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

$$\begin{aligned} \text{Wissen: } T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 2d + 1 \\ &\leq c \cdot n - d \quad \text{falls } d \geq 1. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$ ✓

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für eine Konstante $c > 0$. ✓

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n . **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 2d + 1 \\ &\leq c \cdot n - d \quad \text{falls } d \geq 1. \end{aligned}$$
 ✓

II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)

II) Rekursionsbaummethode

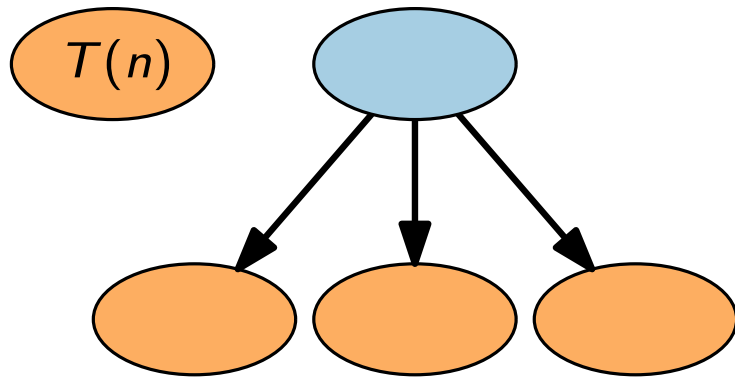
Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)

$T(n)$

II) Rekursionsbaummethode

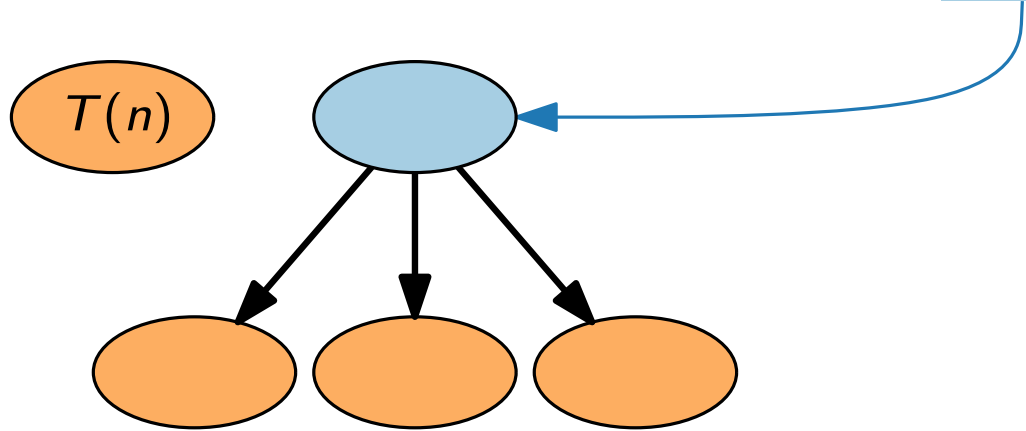
Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

(mit $T(1) = 1$)



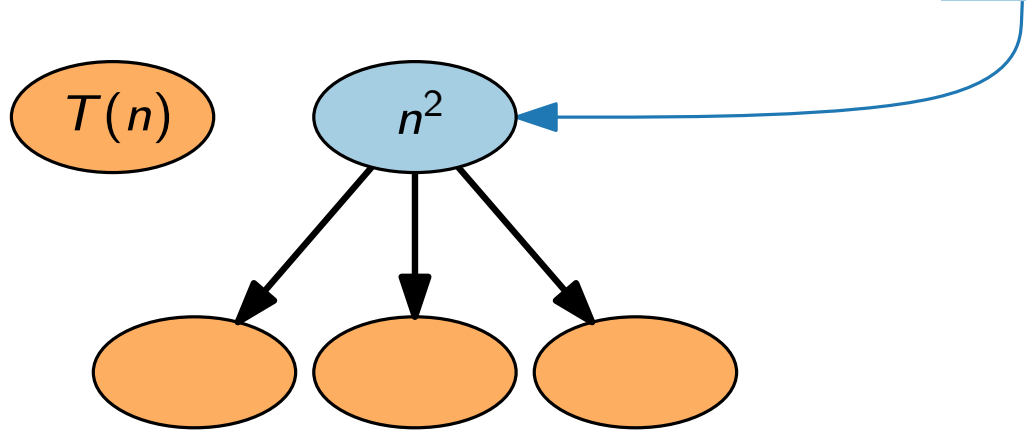
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



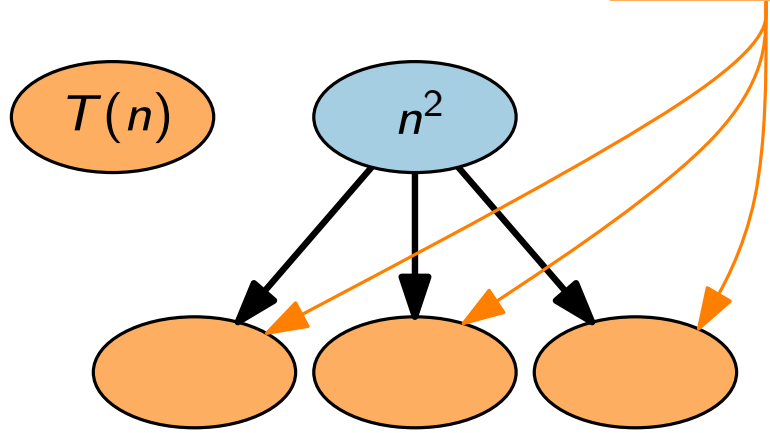
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



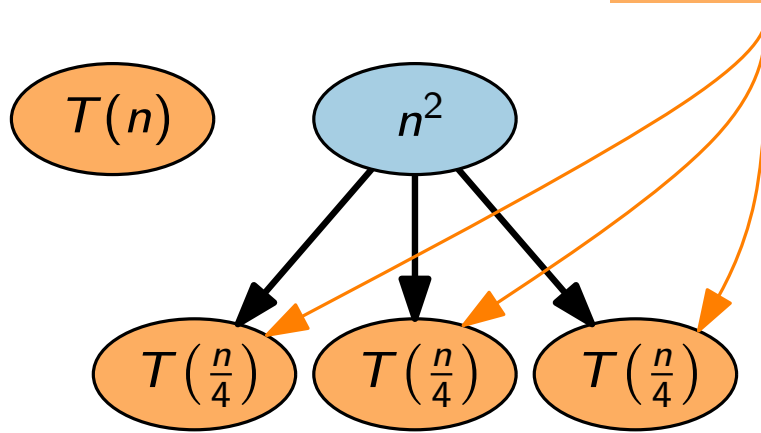
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



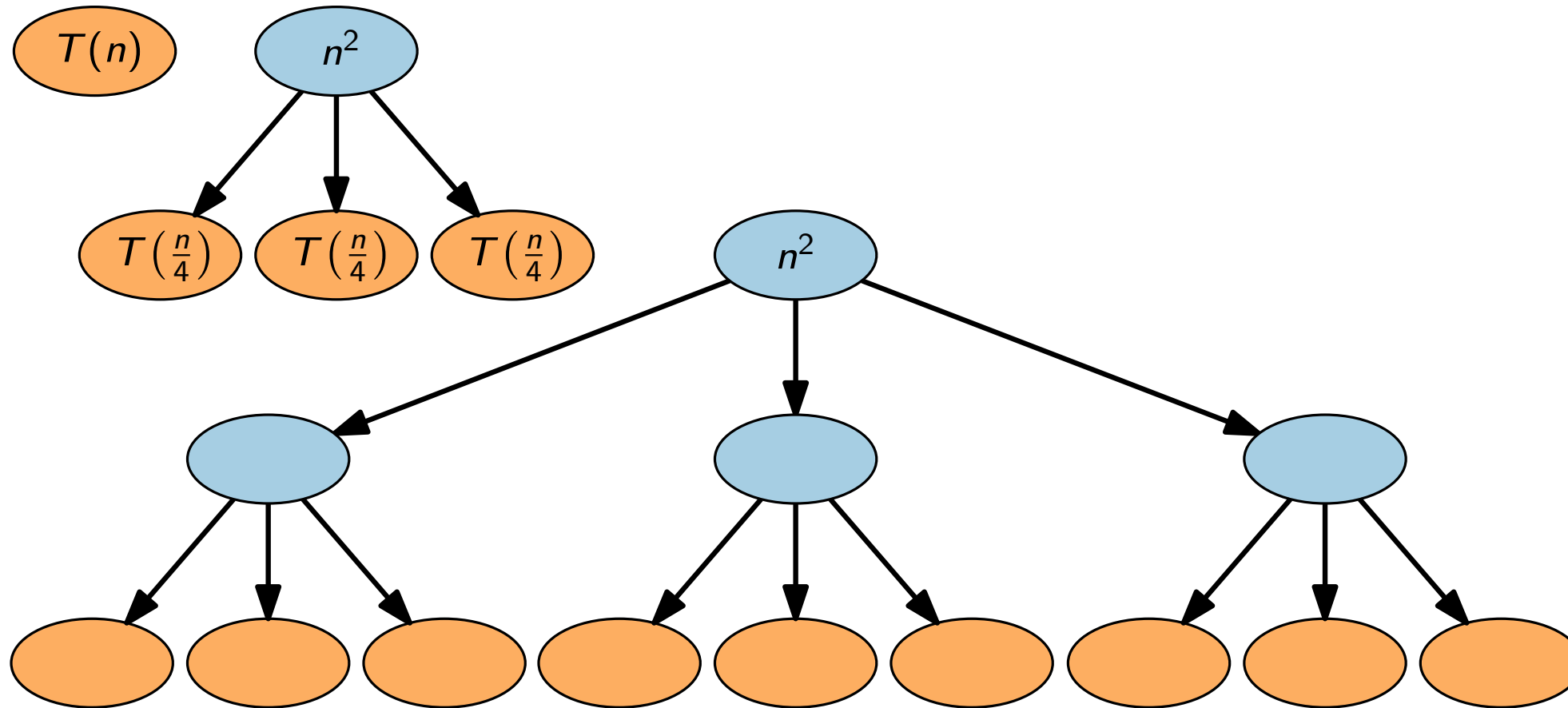
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



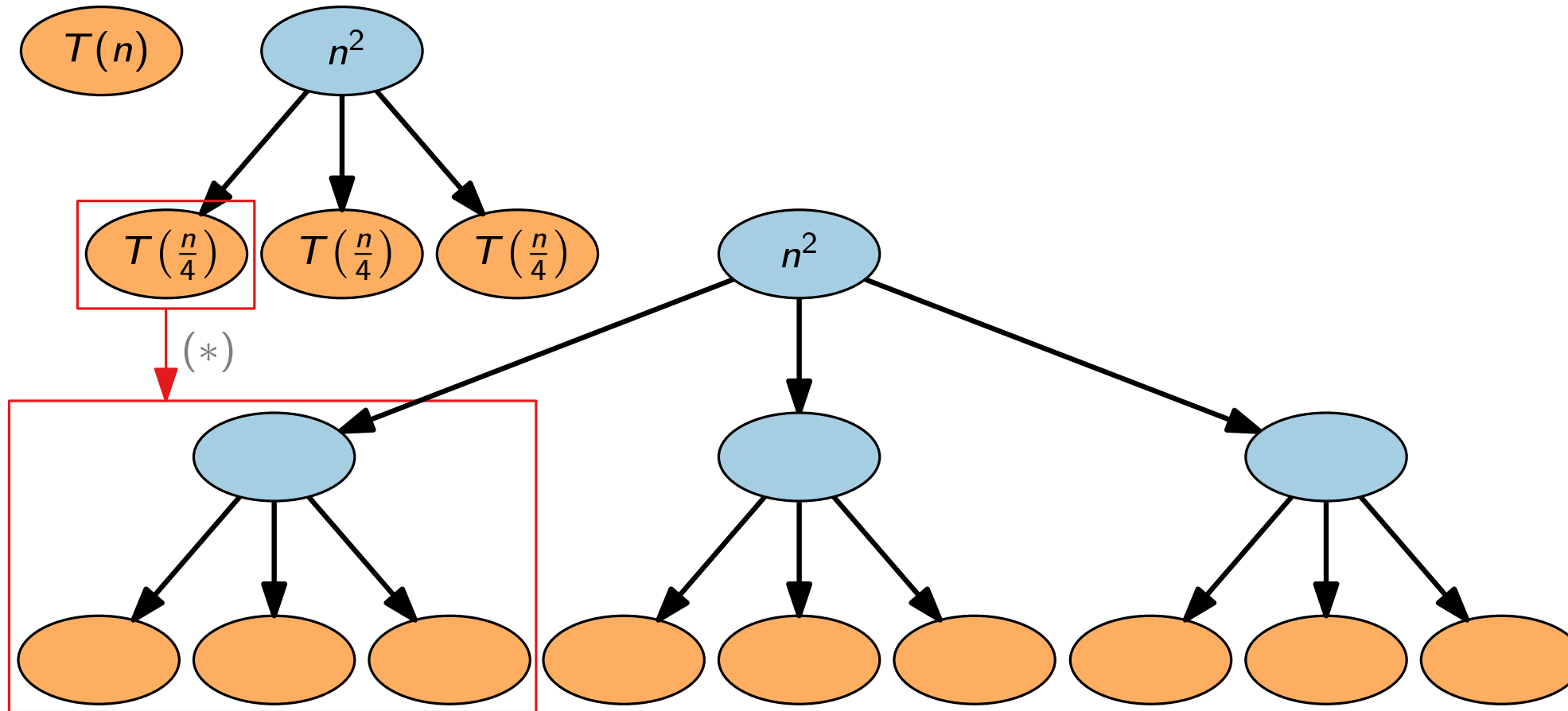
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



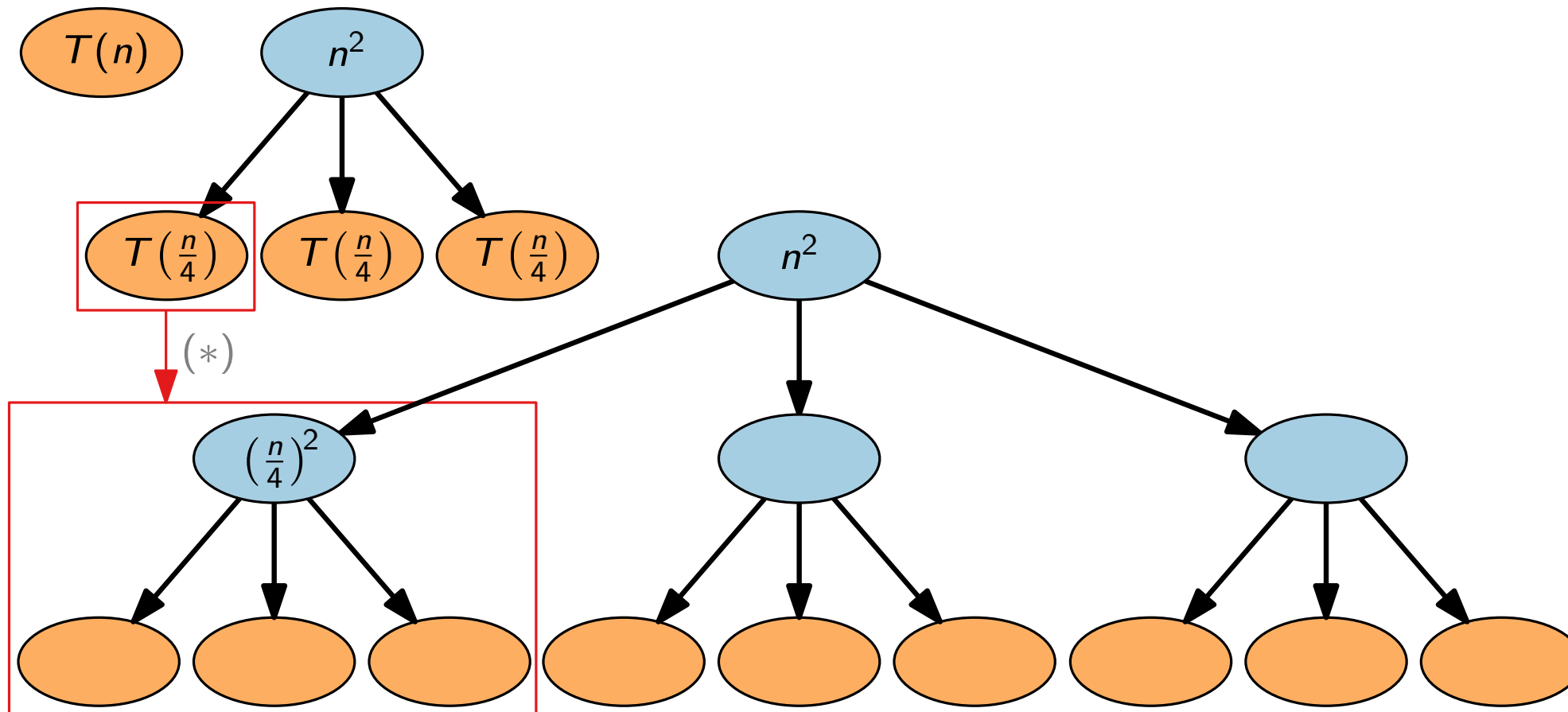
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



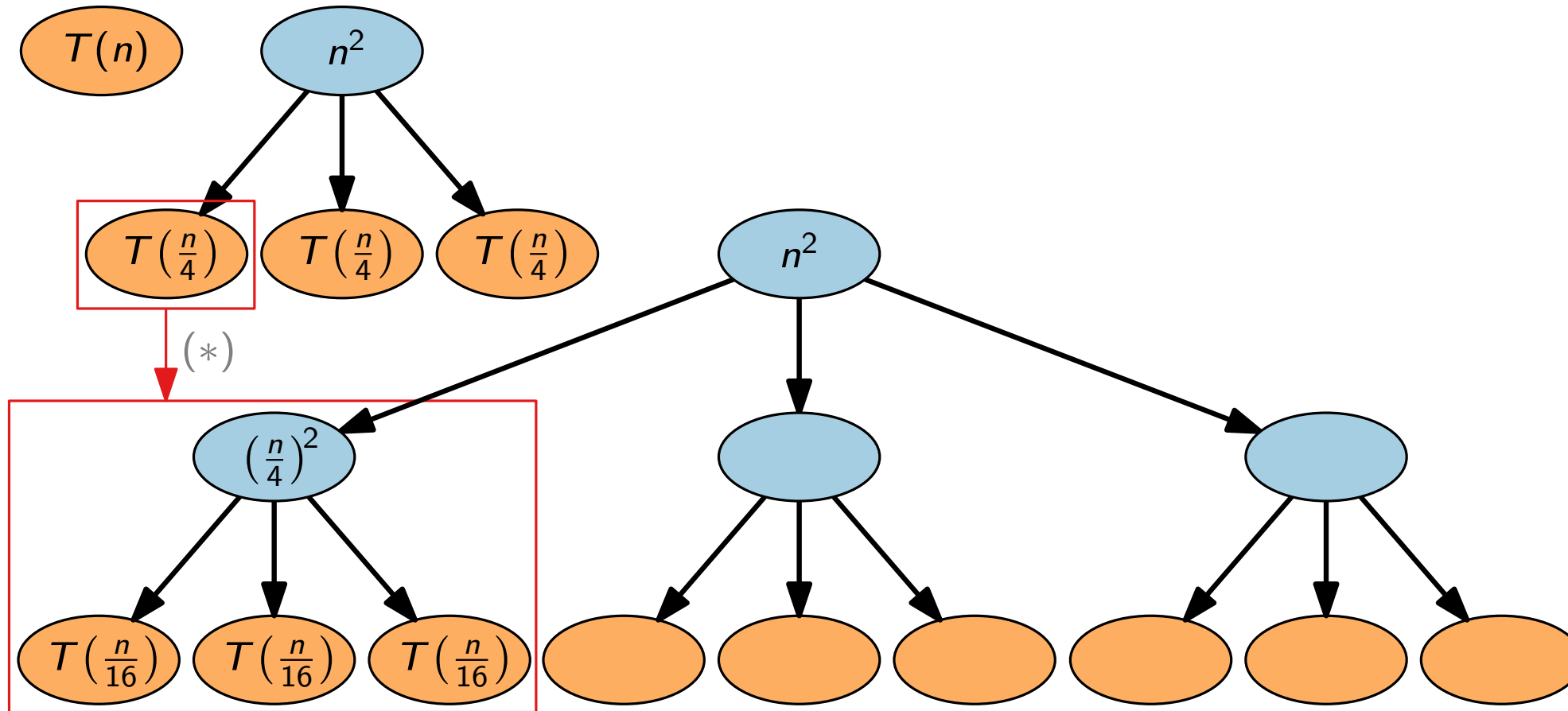
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



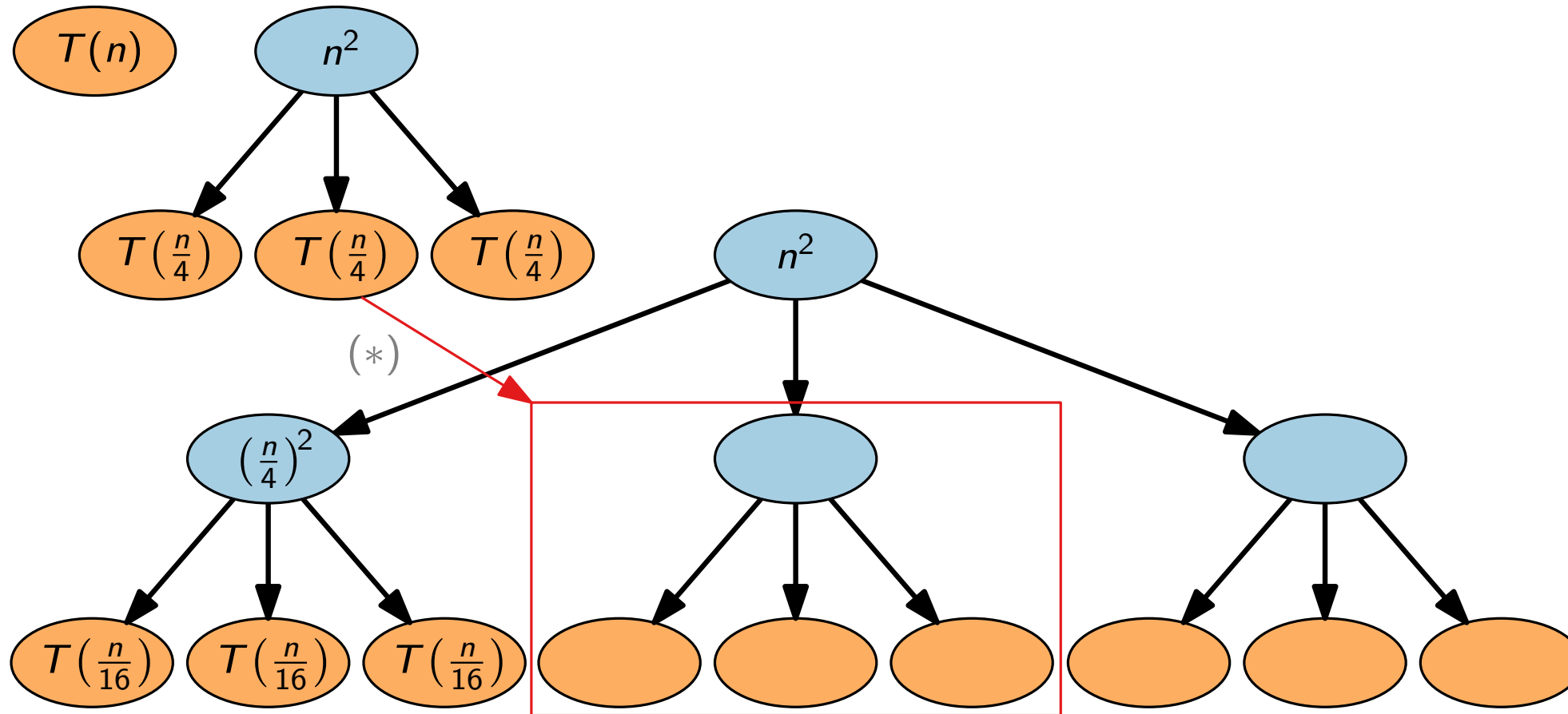
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



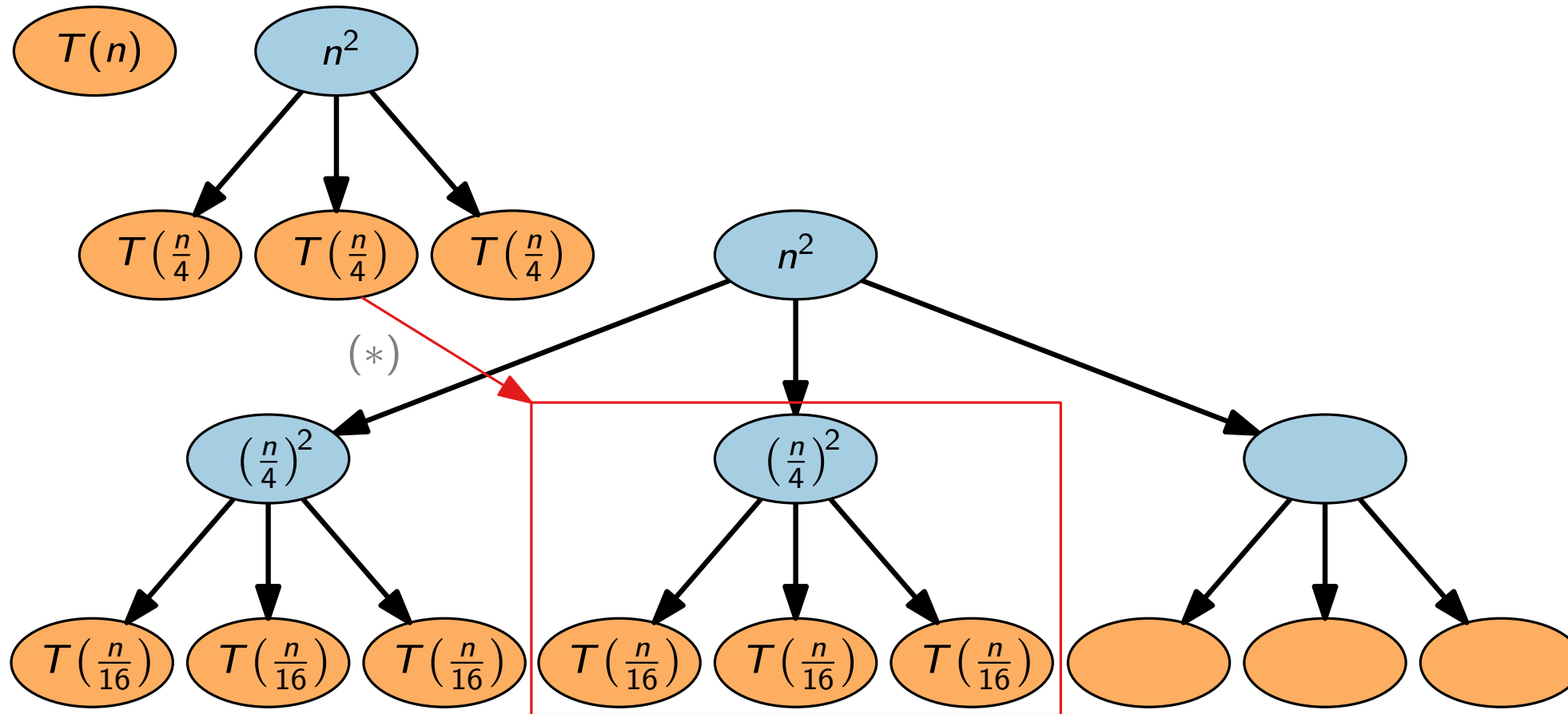
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



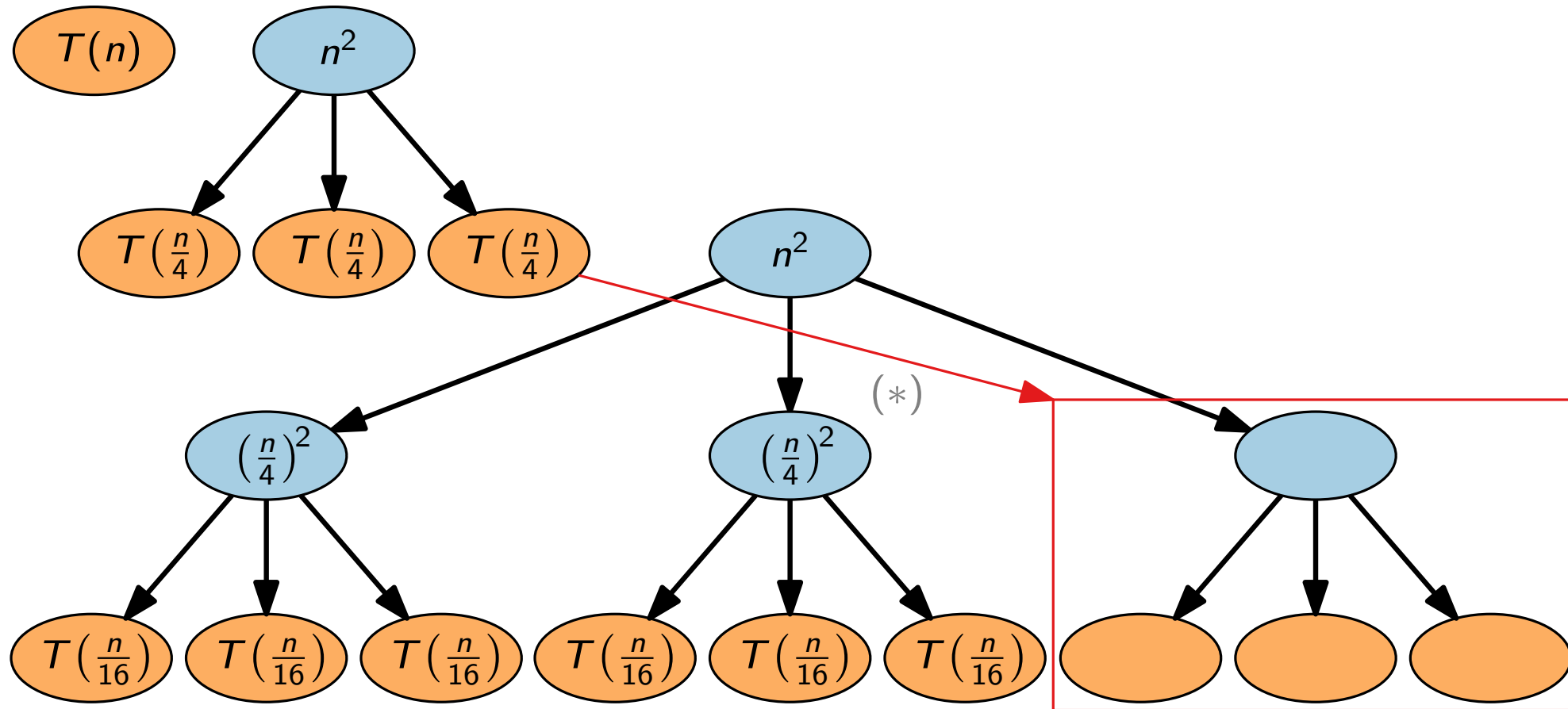
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



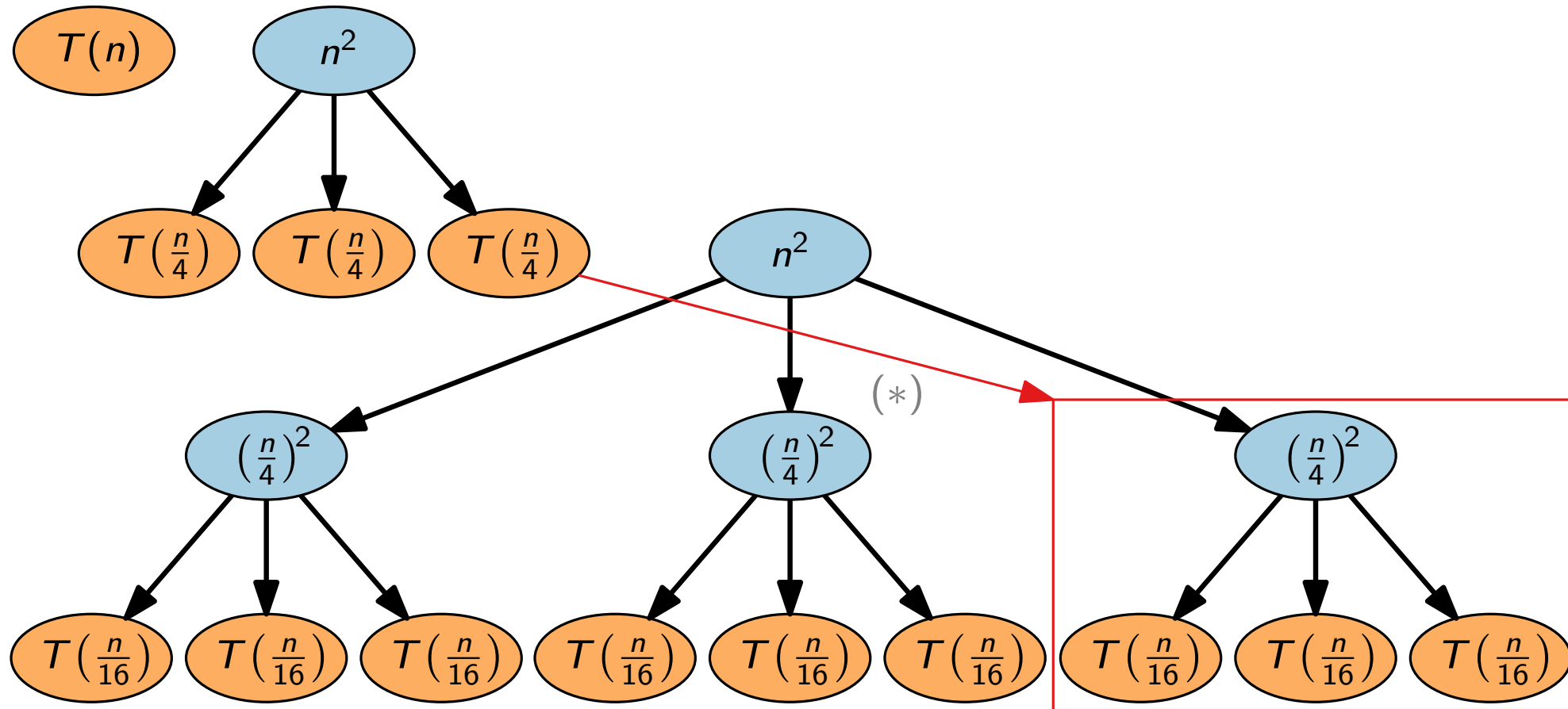
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



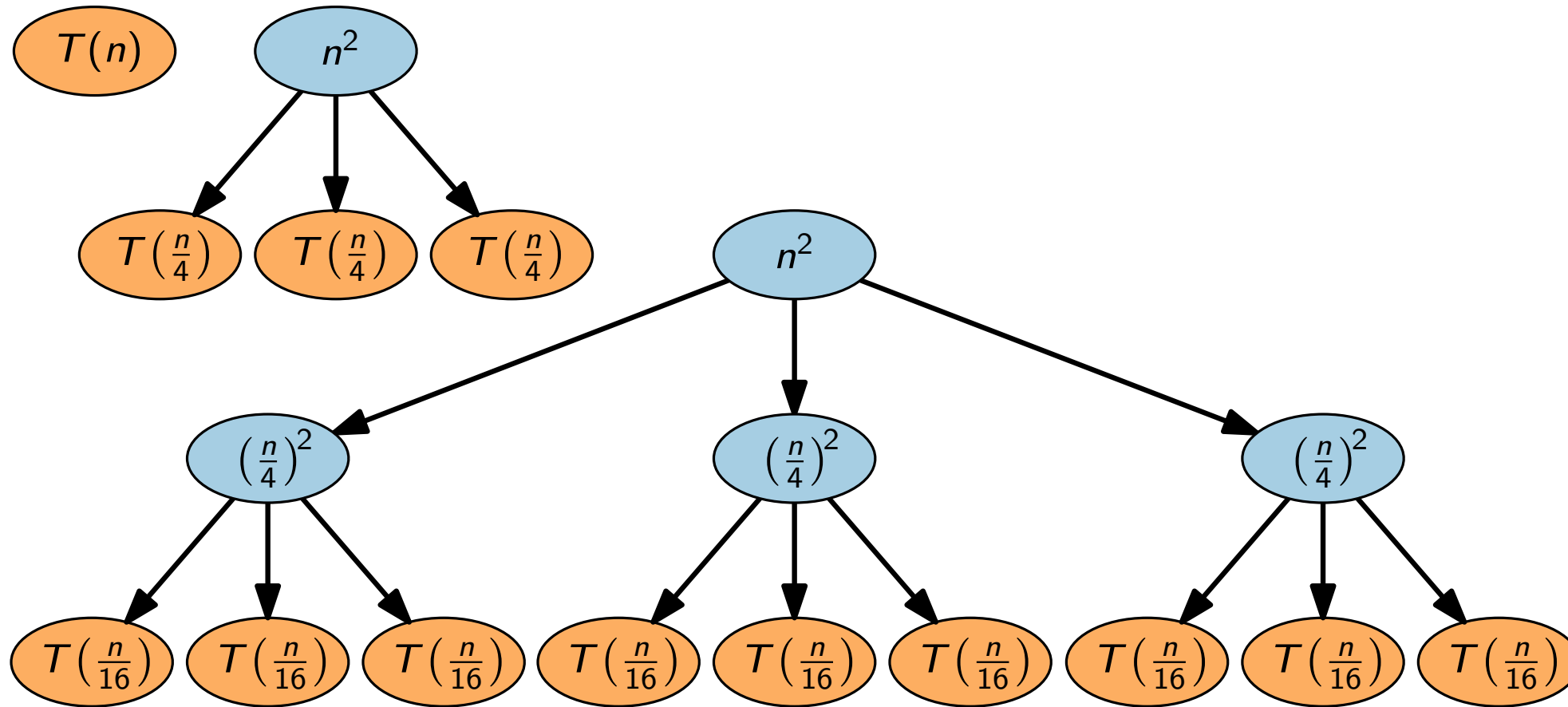
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)

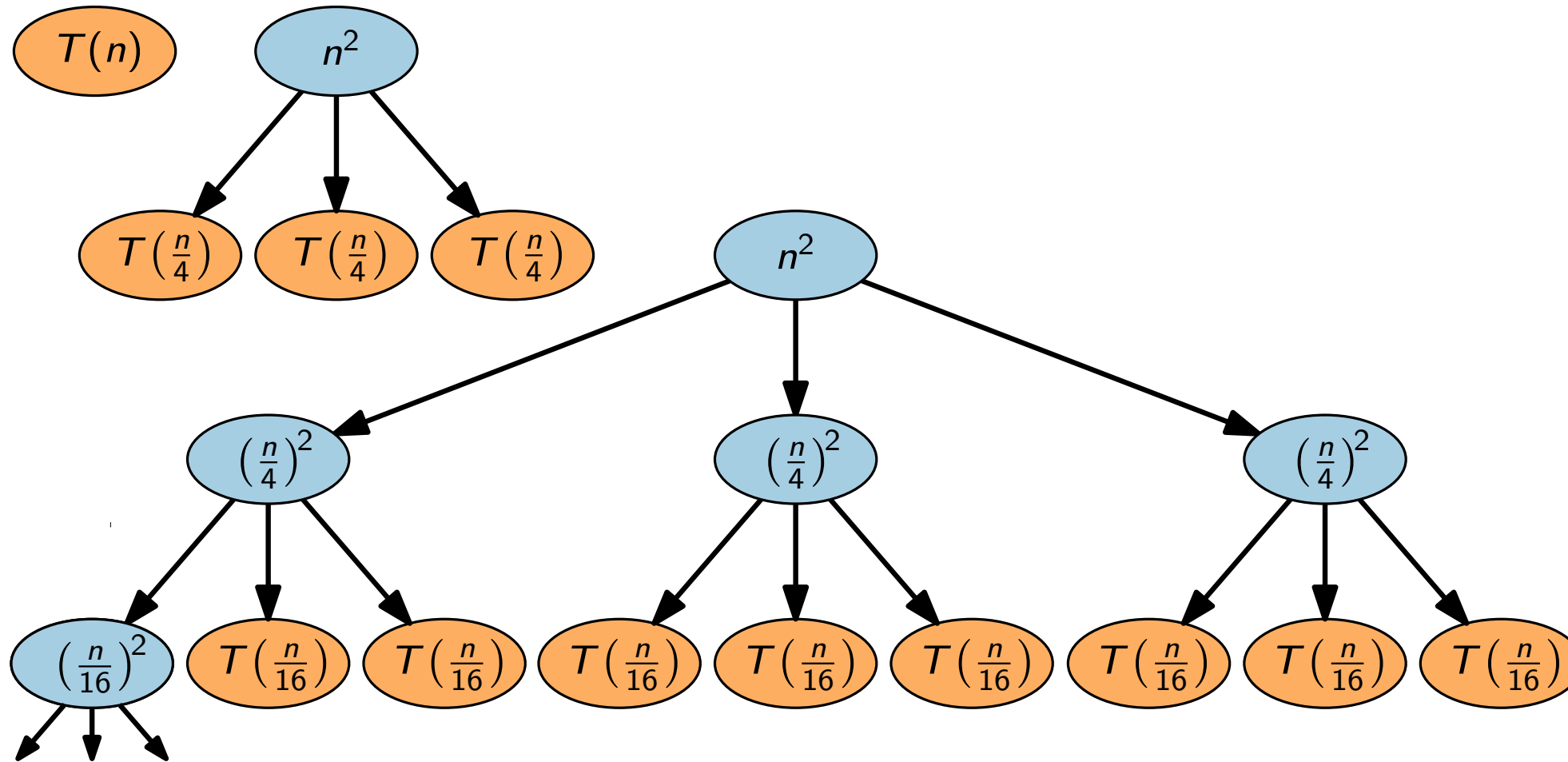


Recursion tree for $T(n) = 3T(n/4) + n^2$:

- Root node: n^2 (blue)
- Level 1 nodes: $T(n/4)$, $T(n/4)$, $T(n/4)$ (orange)
- Level 2 nodes (from leftmost $T(n/4)$):
 - Blue node (with 3 arrows pointing down)
 - $T(n/16)$ (orange)
 - $T(n/16)$ (orange)
- Level 2 nodes (from middle $T(n/4)$): $T(n/16)$, $T(n/16)$, $T(n/16)$ (orange)
- Level 2 nodes (from rightmost $T(n/4)$): $T(n/16)$, $T(n/16)$, $T(n/16)$ (orange)

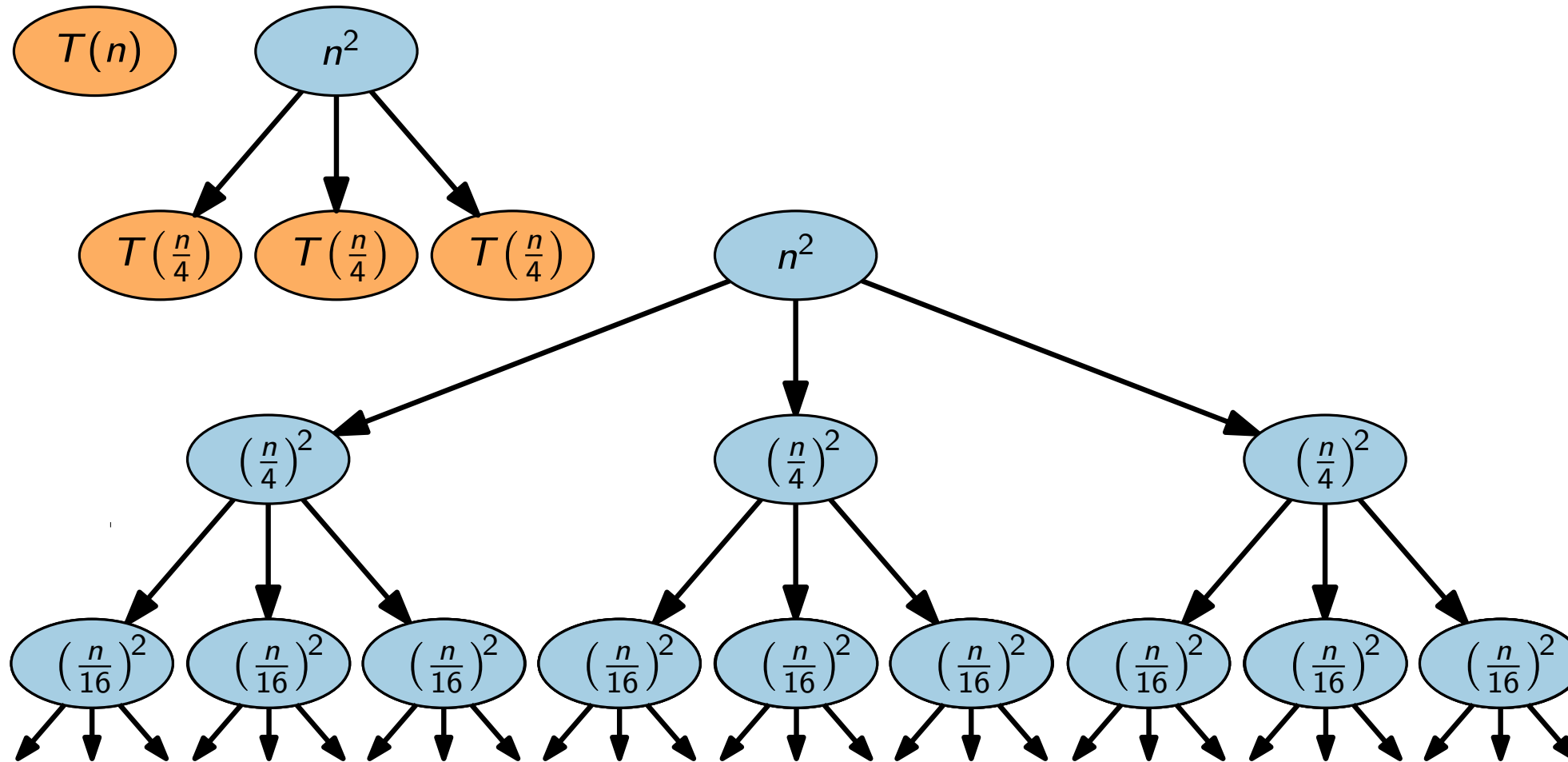
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



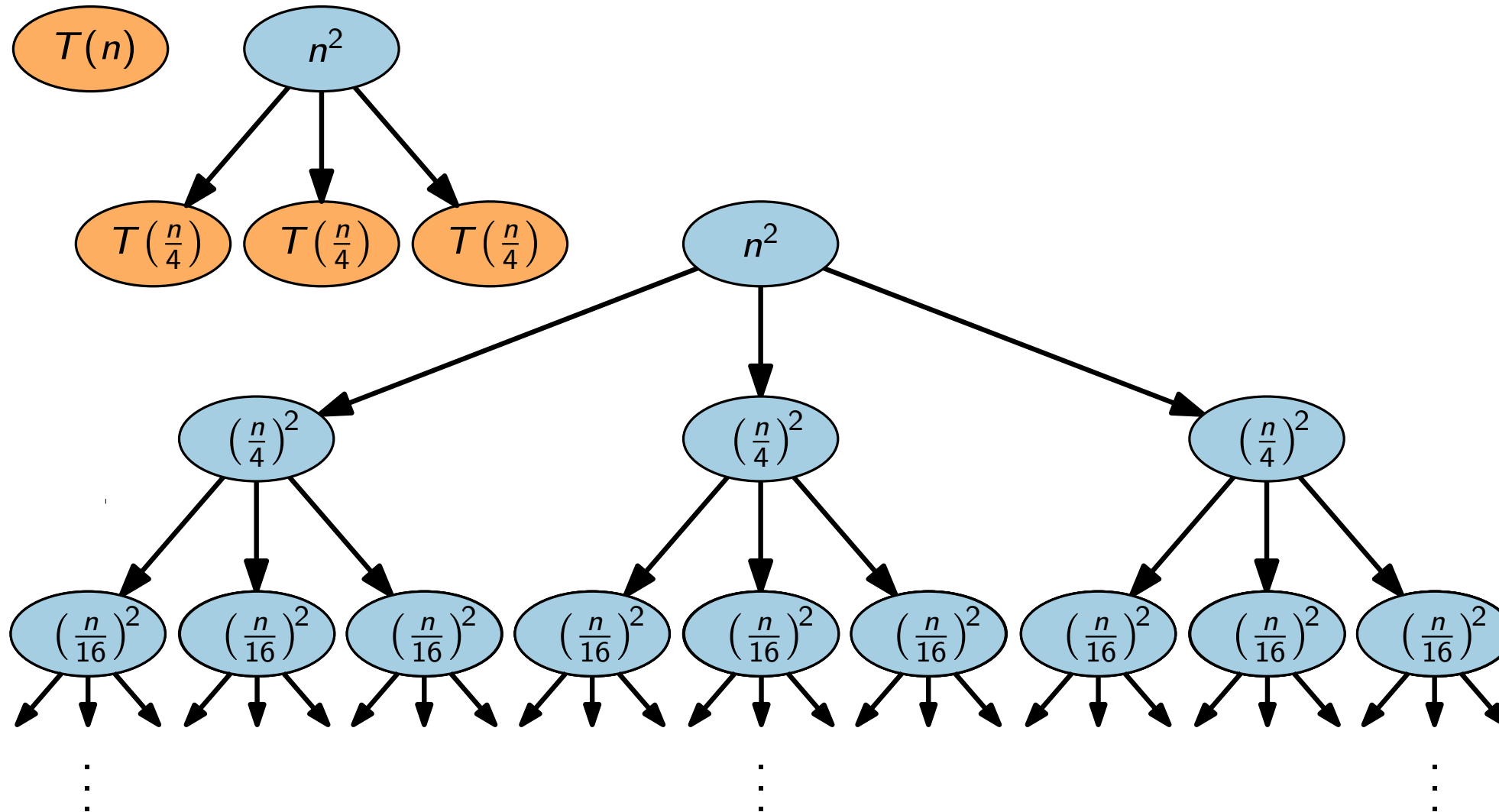
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



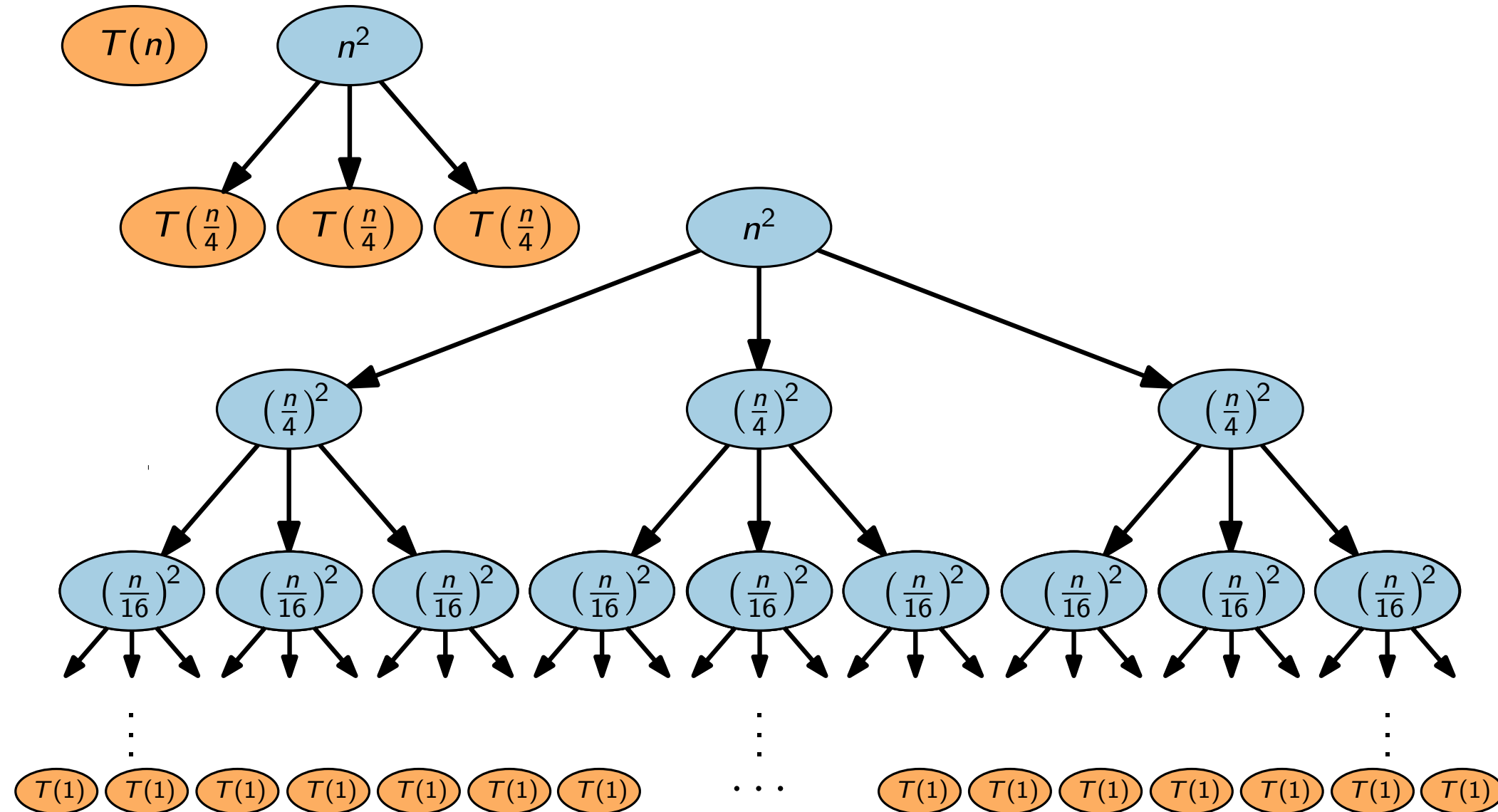
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



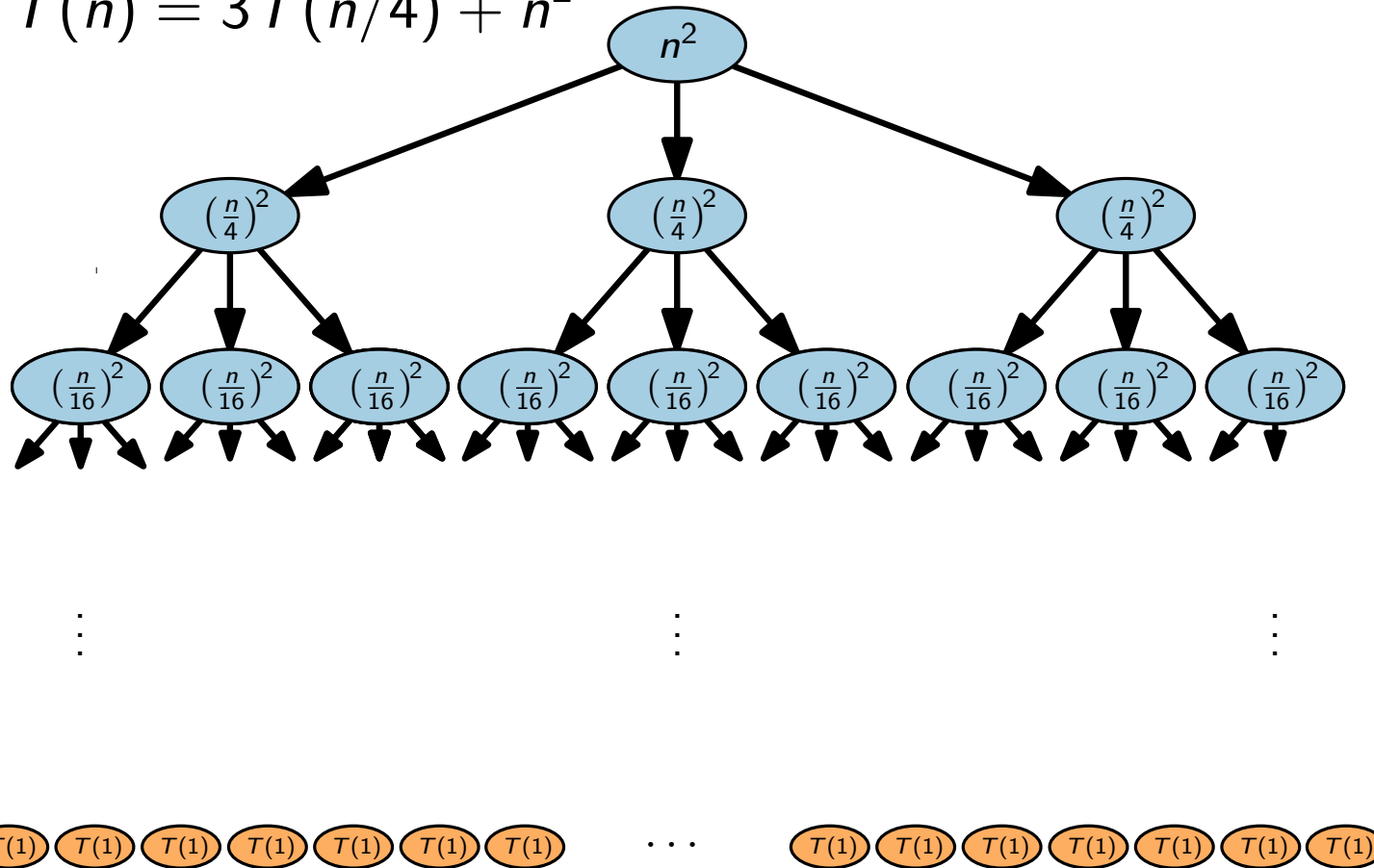
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (*) (mit $T(1) = 1$)



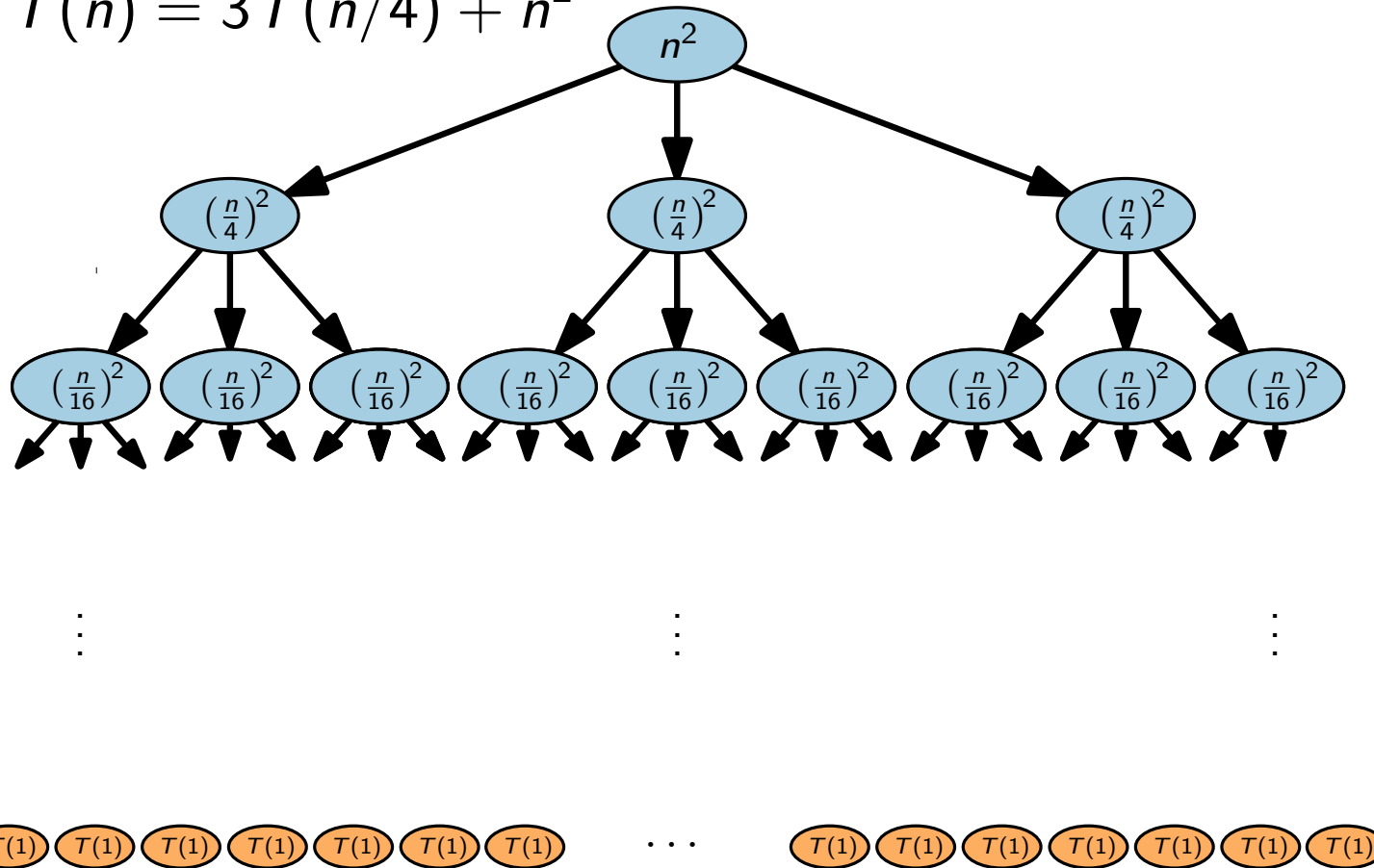
II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



II) Rekursionsbaummethode

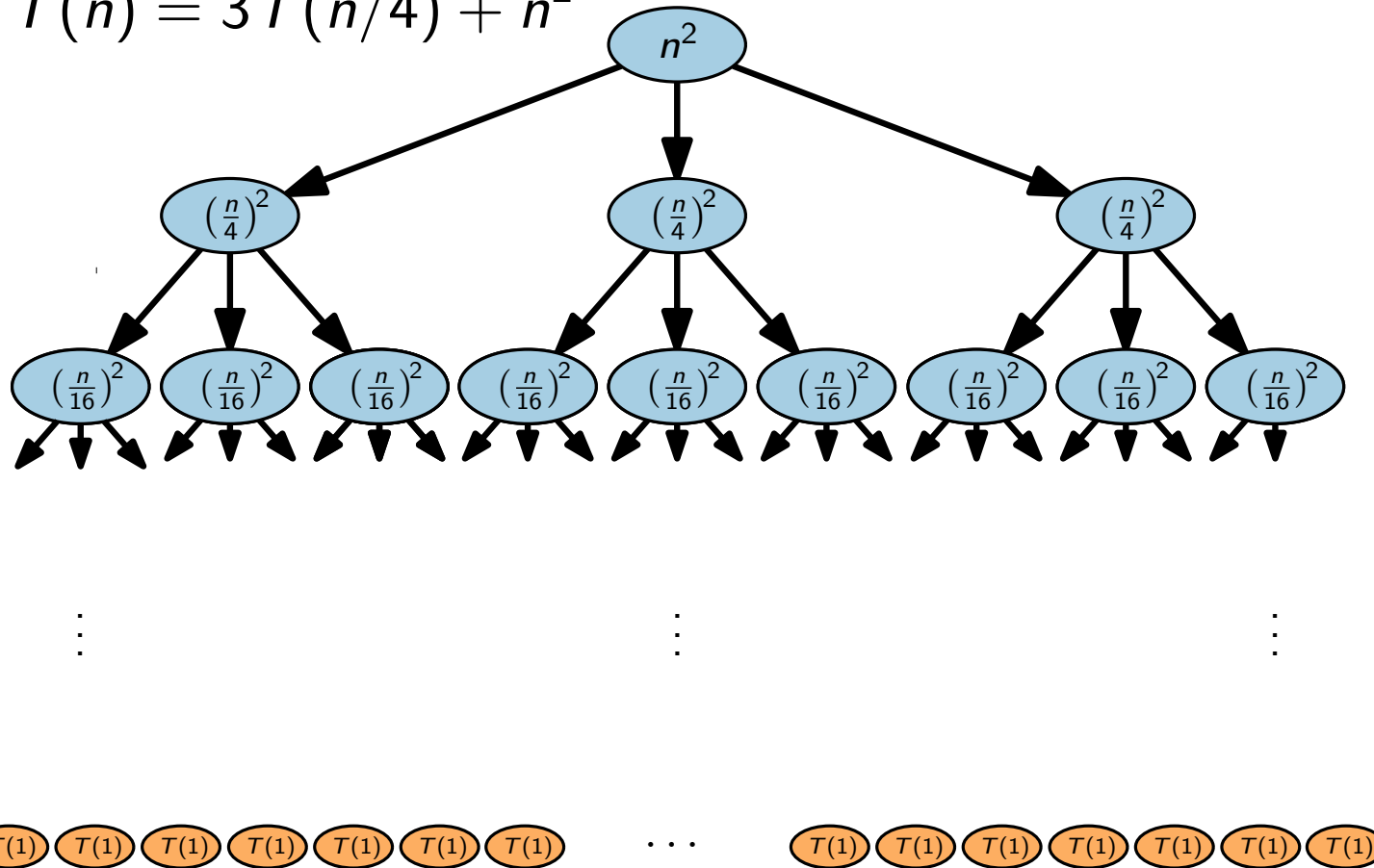
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)

II) Rekursionsbaummethode

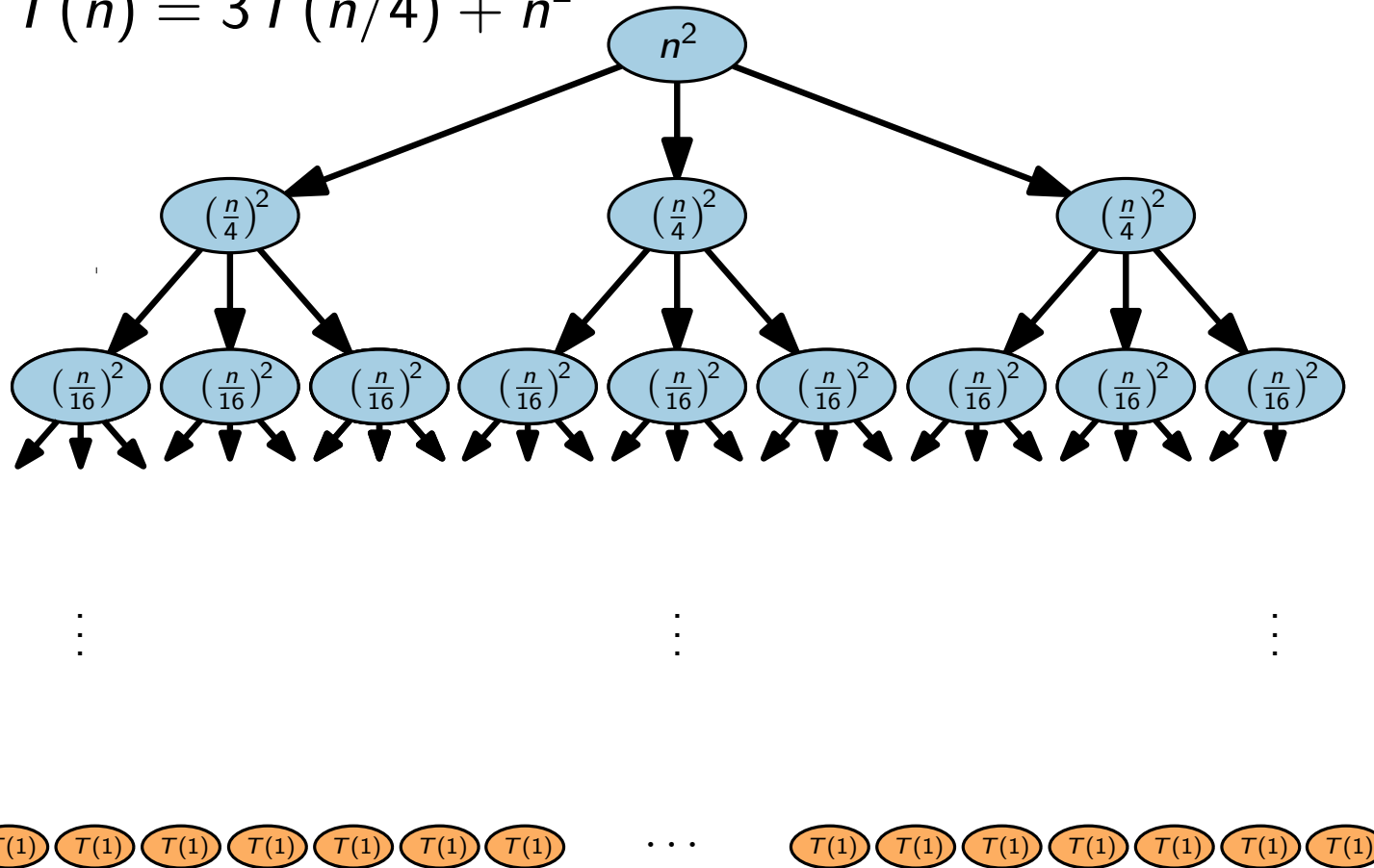
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0		

II) Rekursionsbaummethode

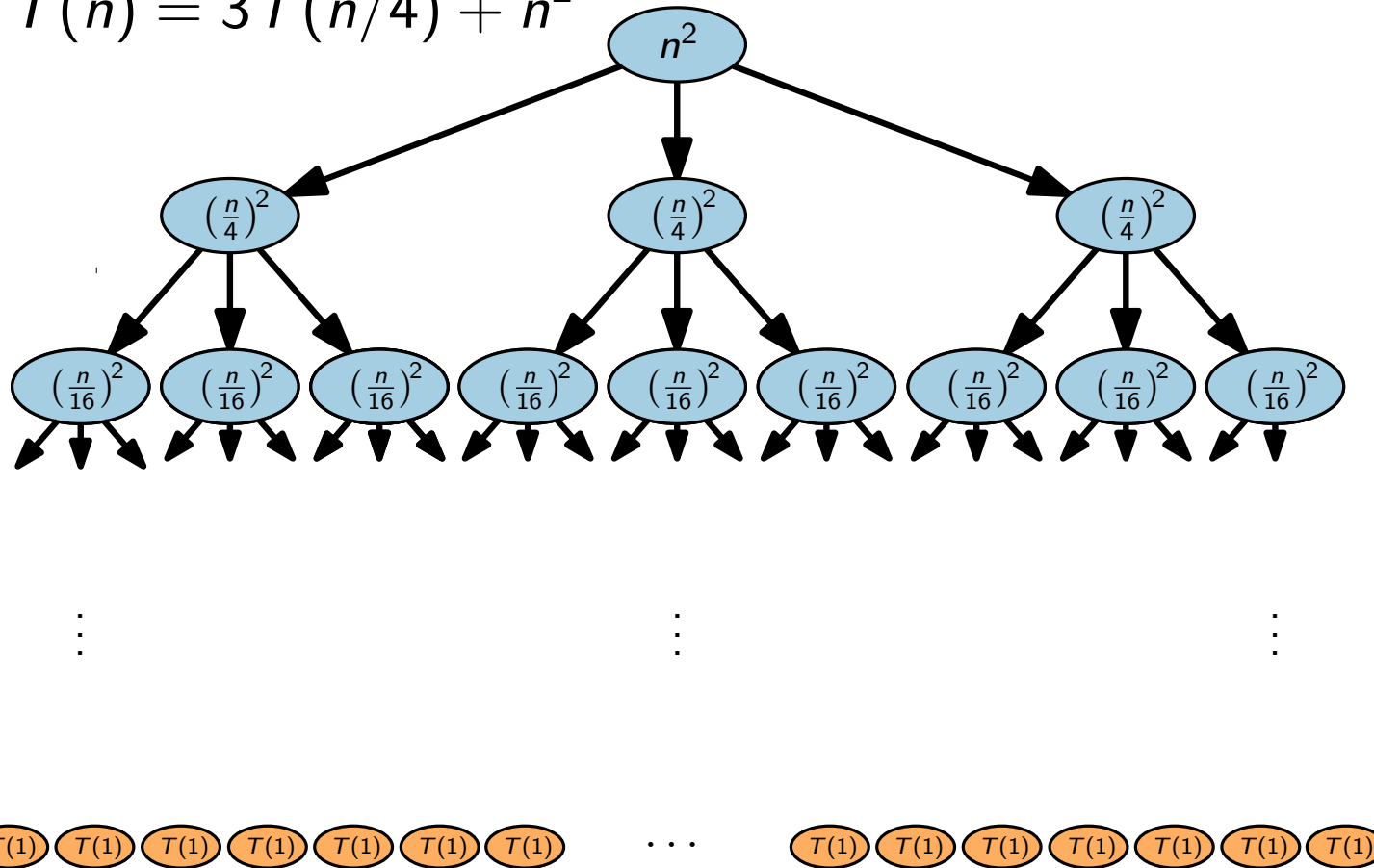
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	

II) Rekursionsbaummethode

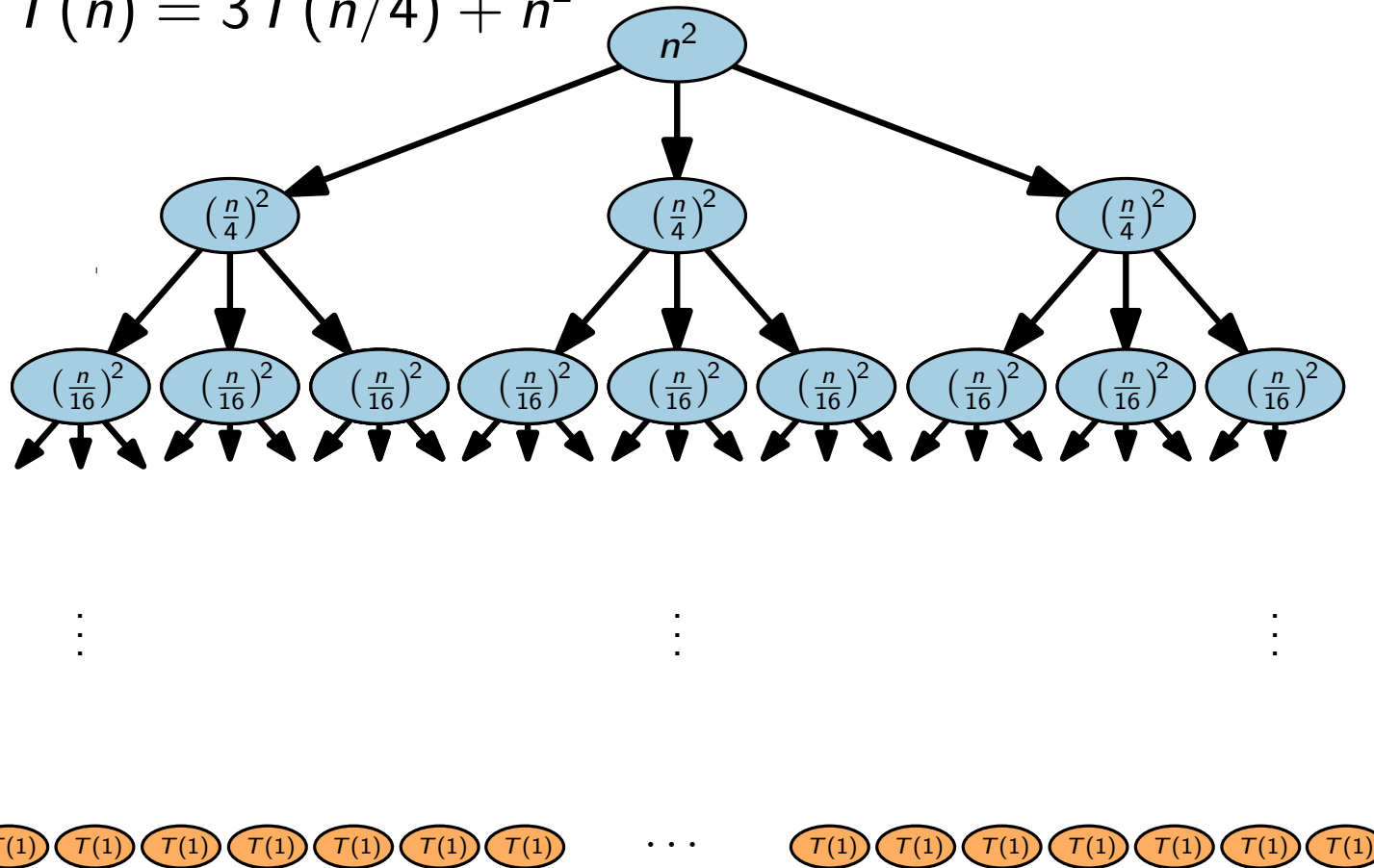
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2

II) Rekursionsbaummethode

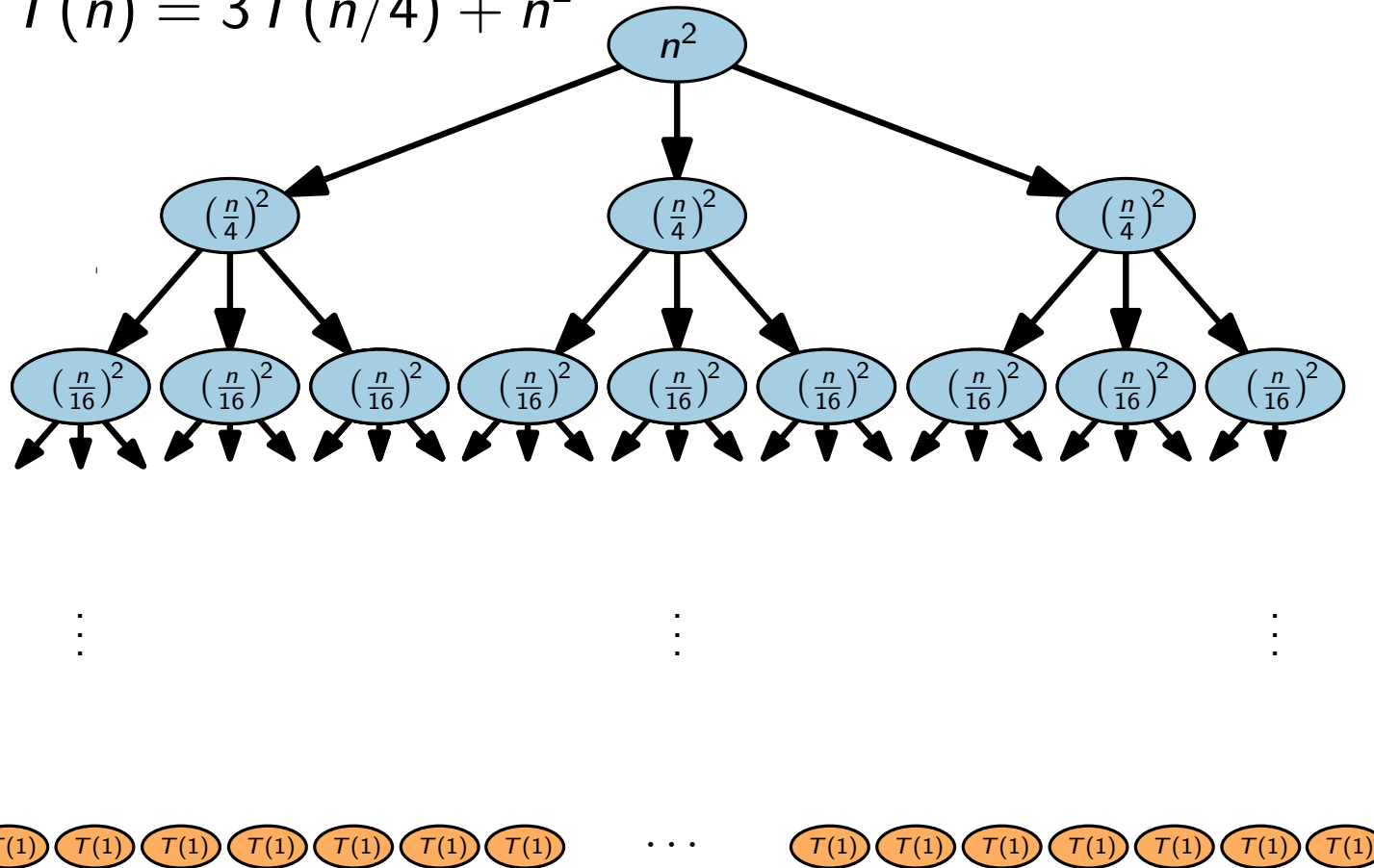
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1		

II) Rekursionsbaummethode

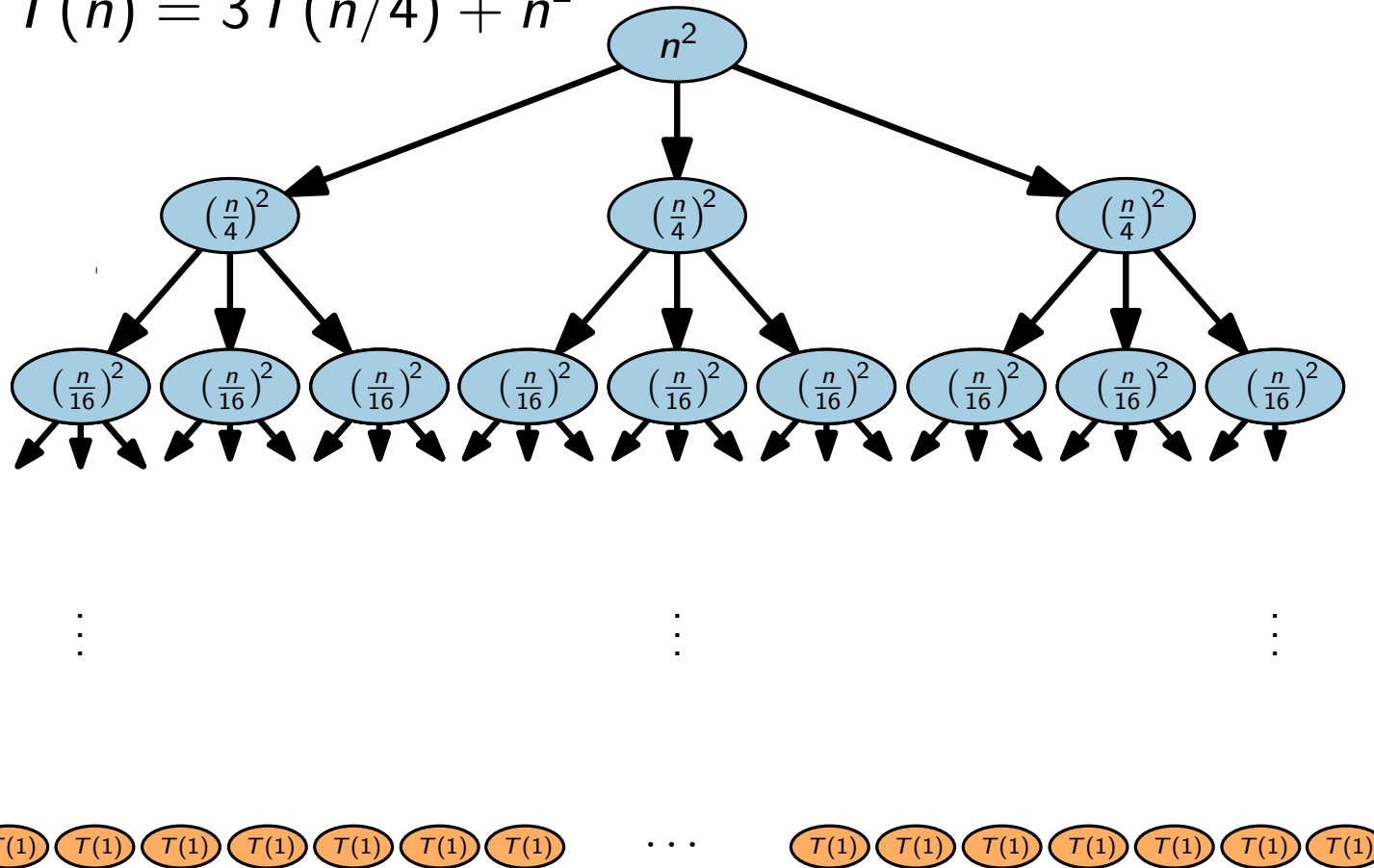
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	

II) Rekursionsbaummethode

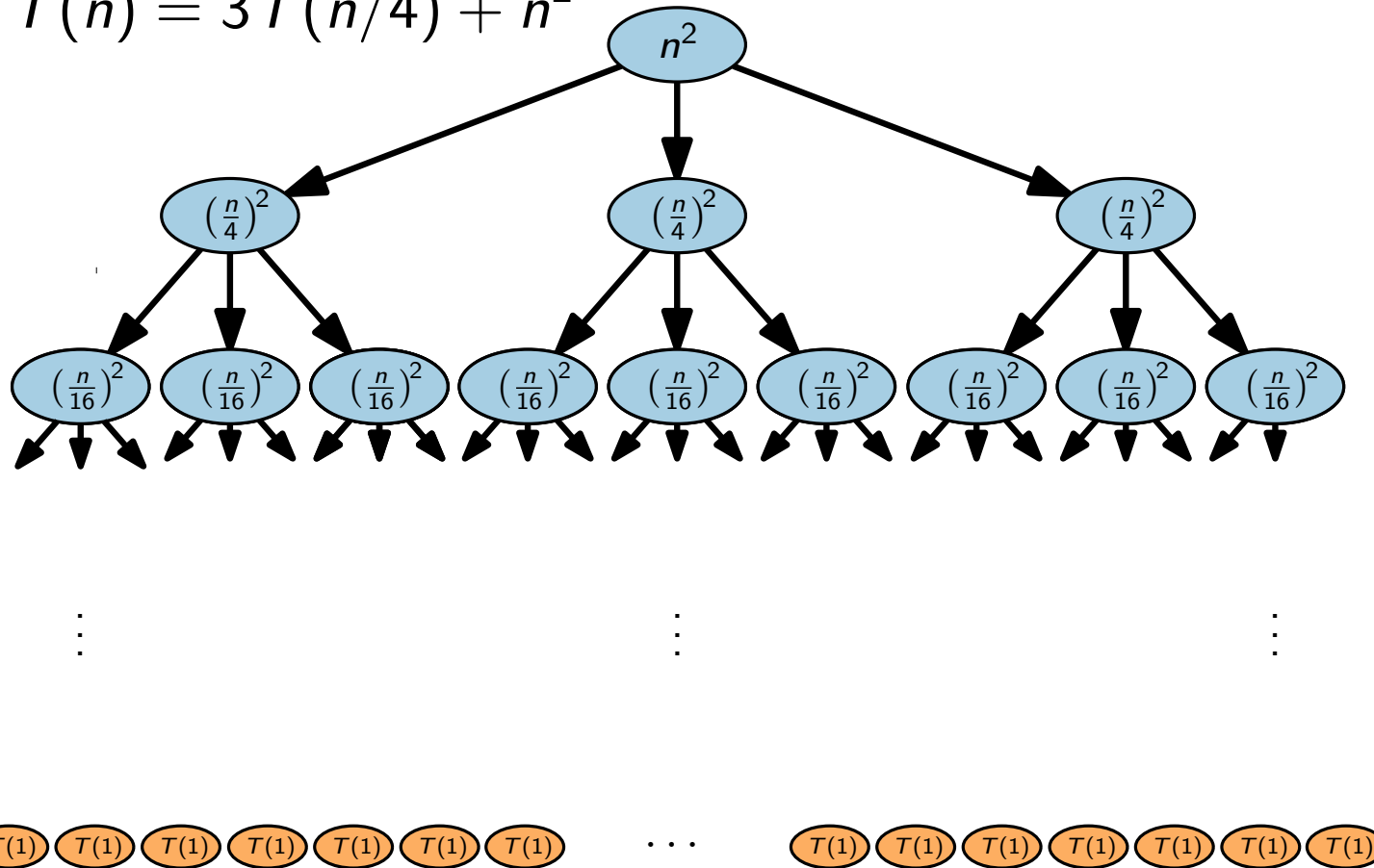
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$

II) Rekursionsbaummethode

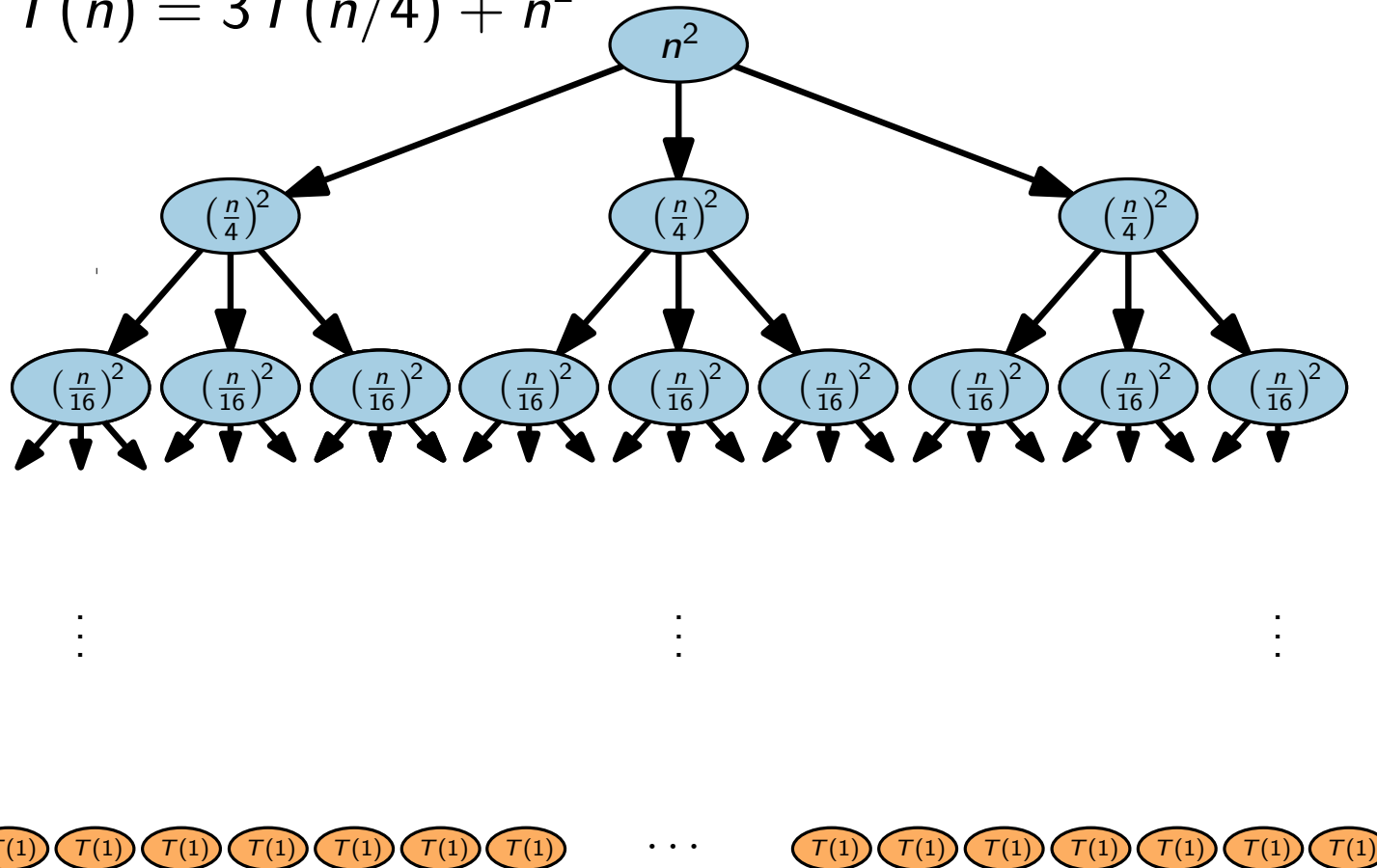
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2		

II) Rekursionsbaummethode

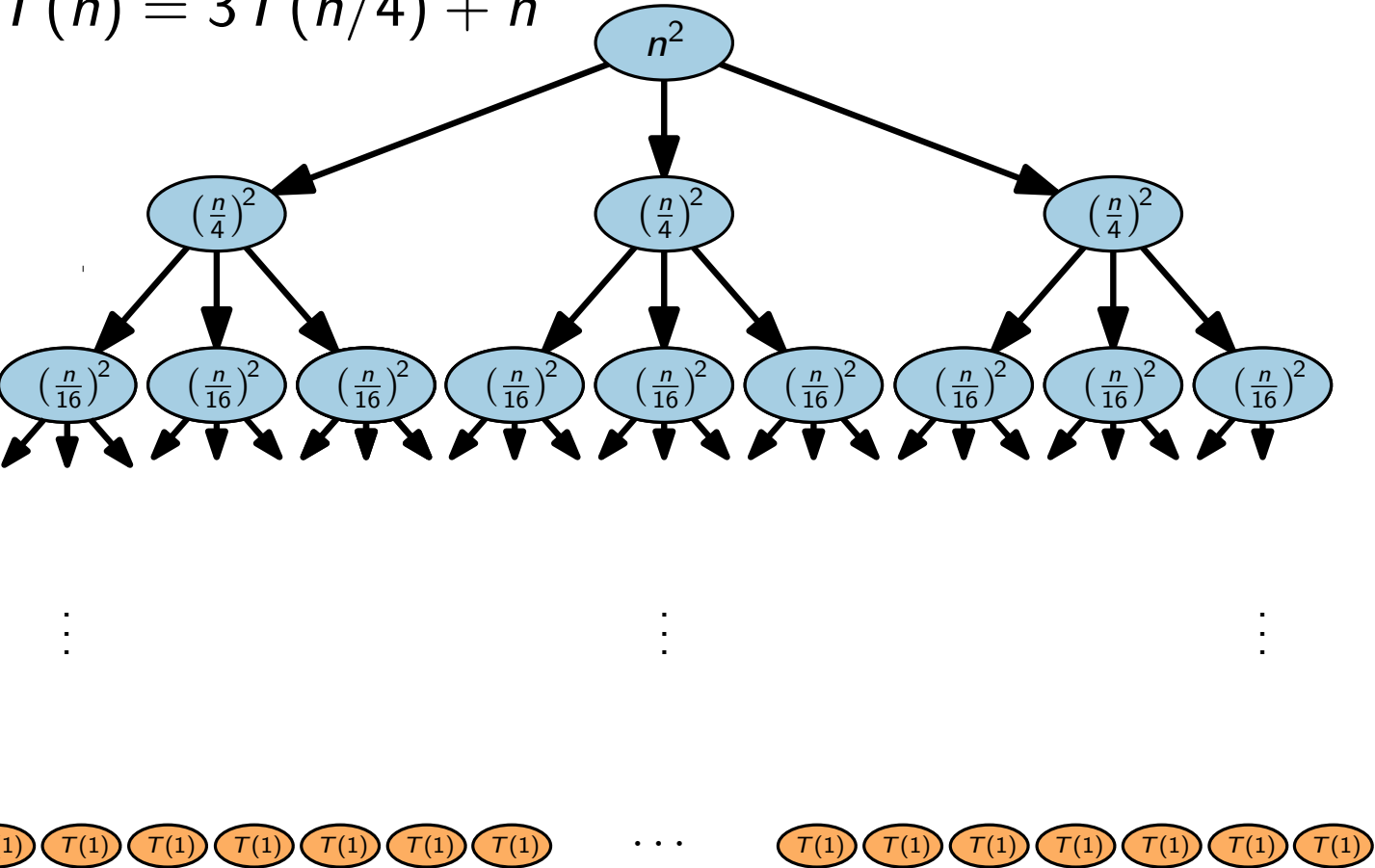
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	

II) Rekursionsbaummethode

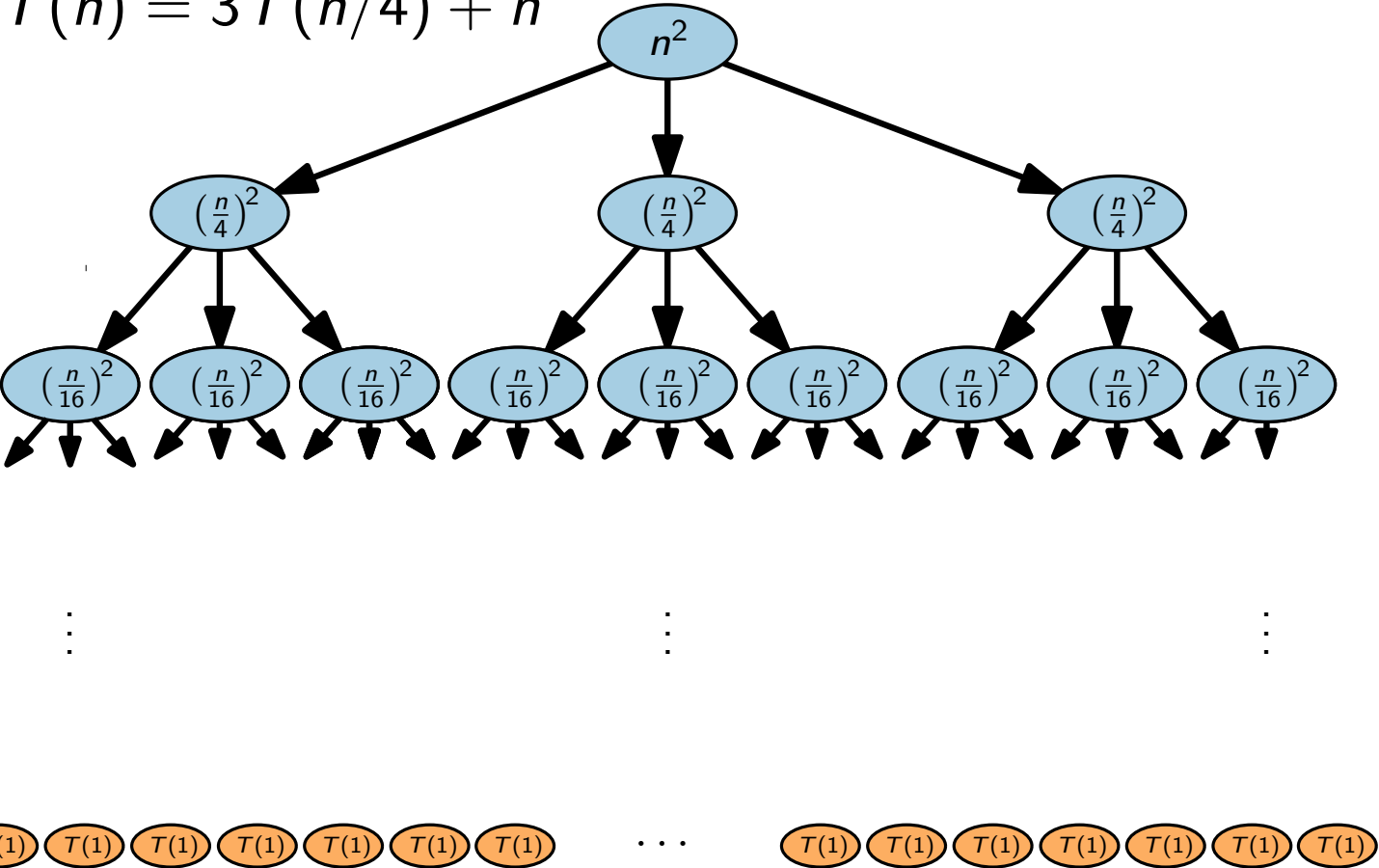
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$

II) Rekursionsbaummethode

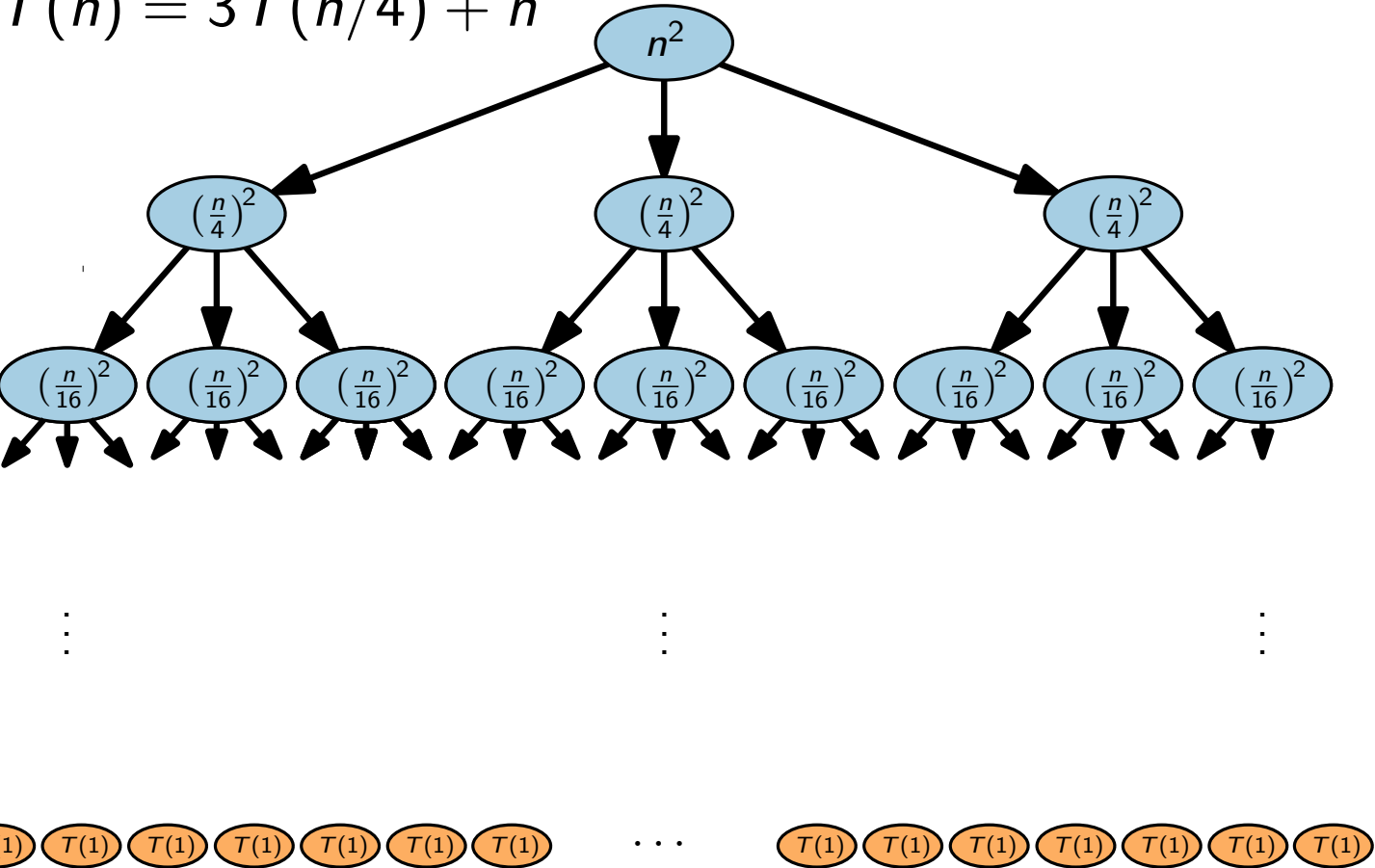
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



Ifd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
⋮		
i		

II) Rekursionsbaummethode

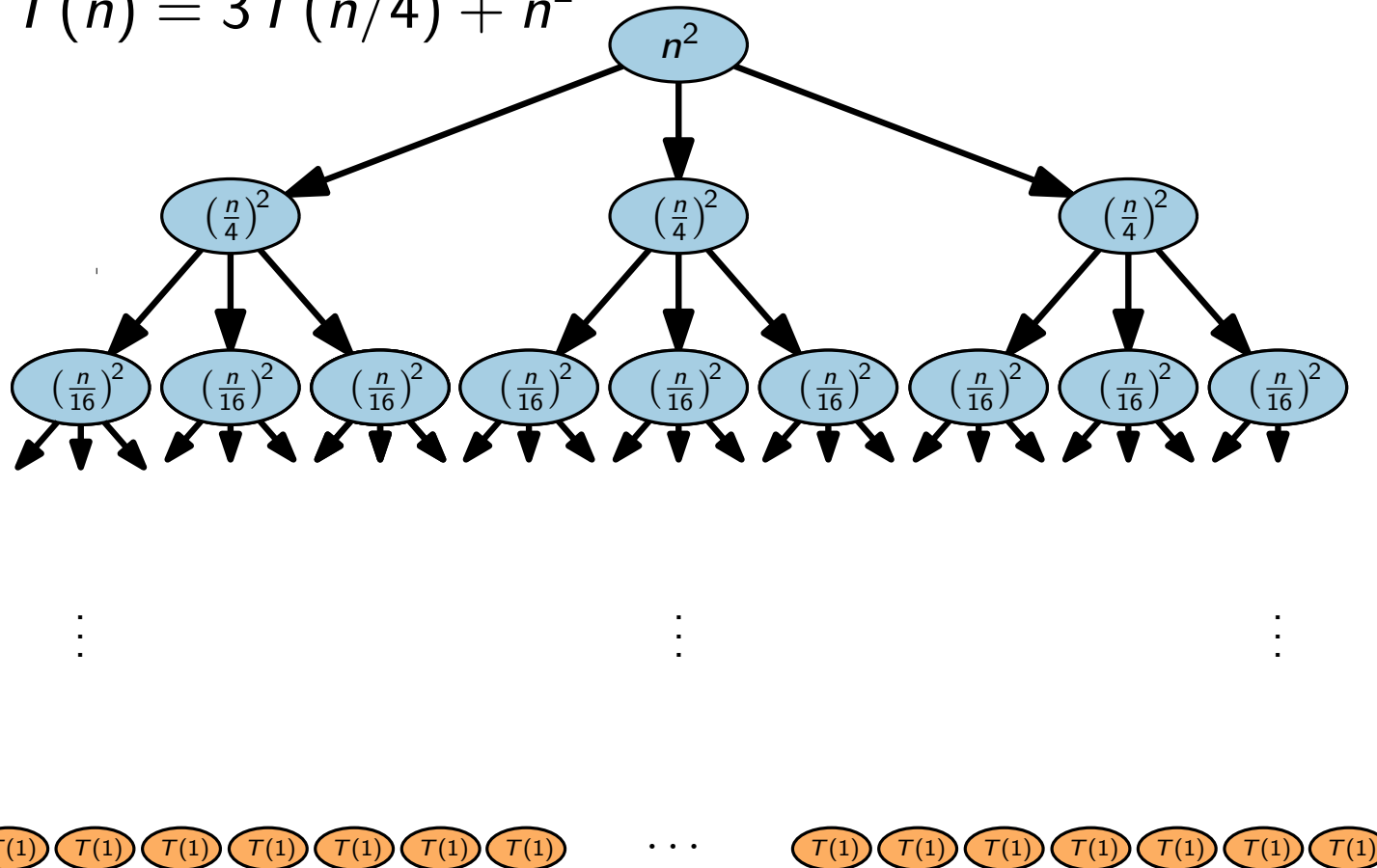
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



Ifd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	
i	3^i	

II) Rekursionsbaummethode

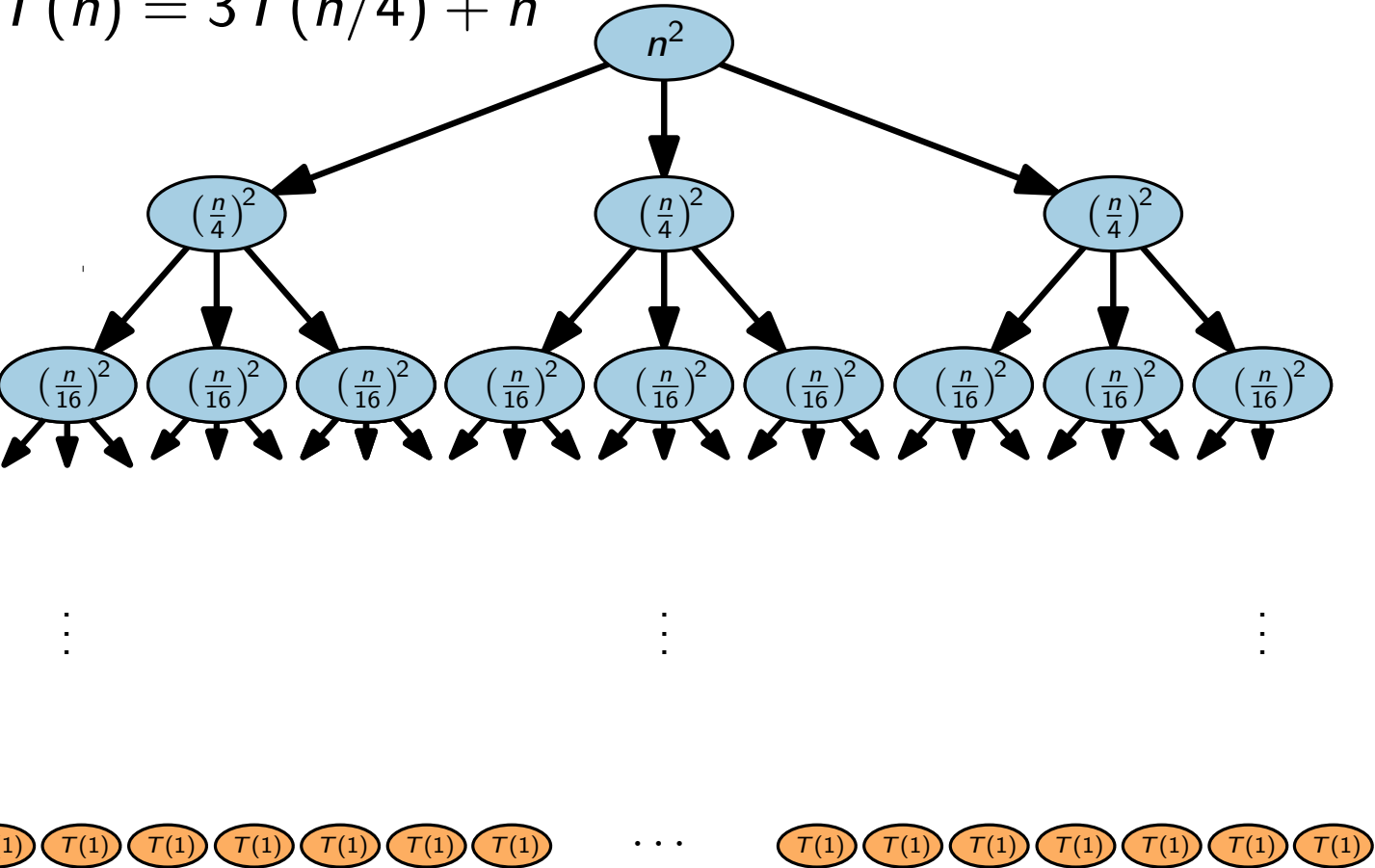
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$

II) Rekursionsbaummethode

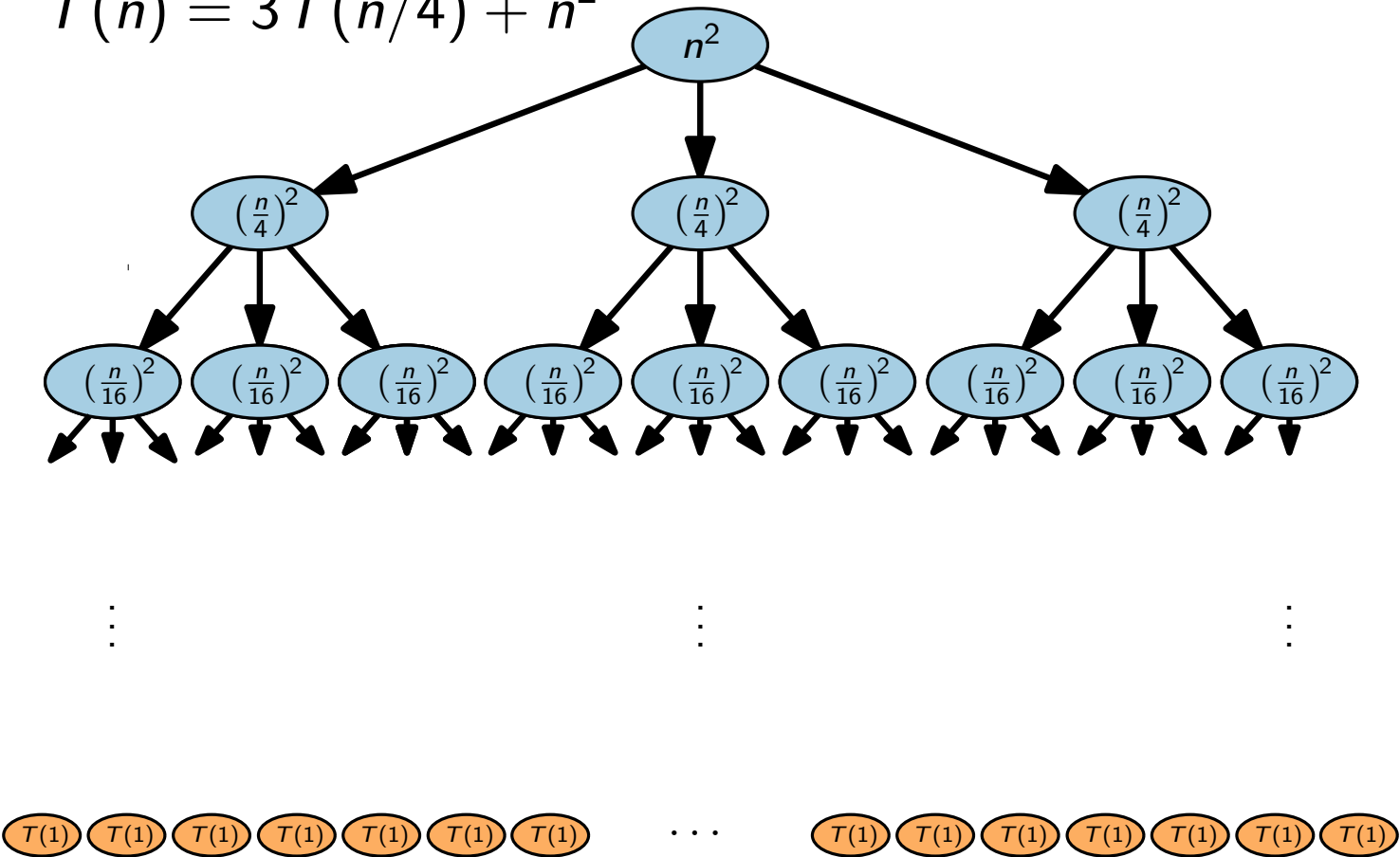
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$		

II) Rekursionsbaummethode

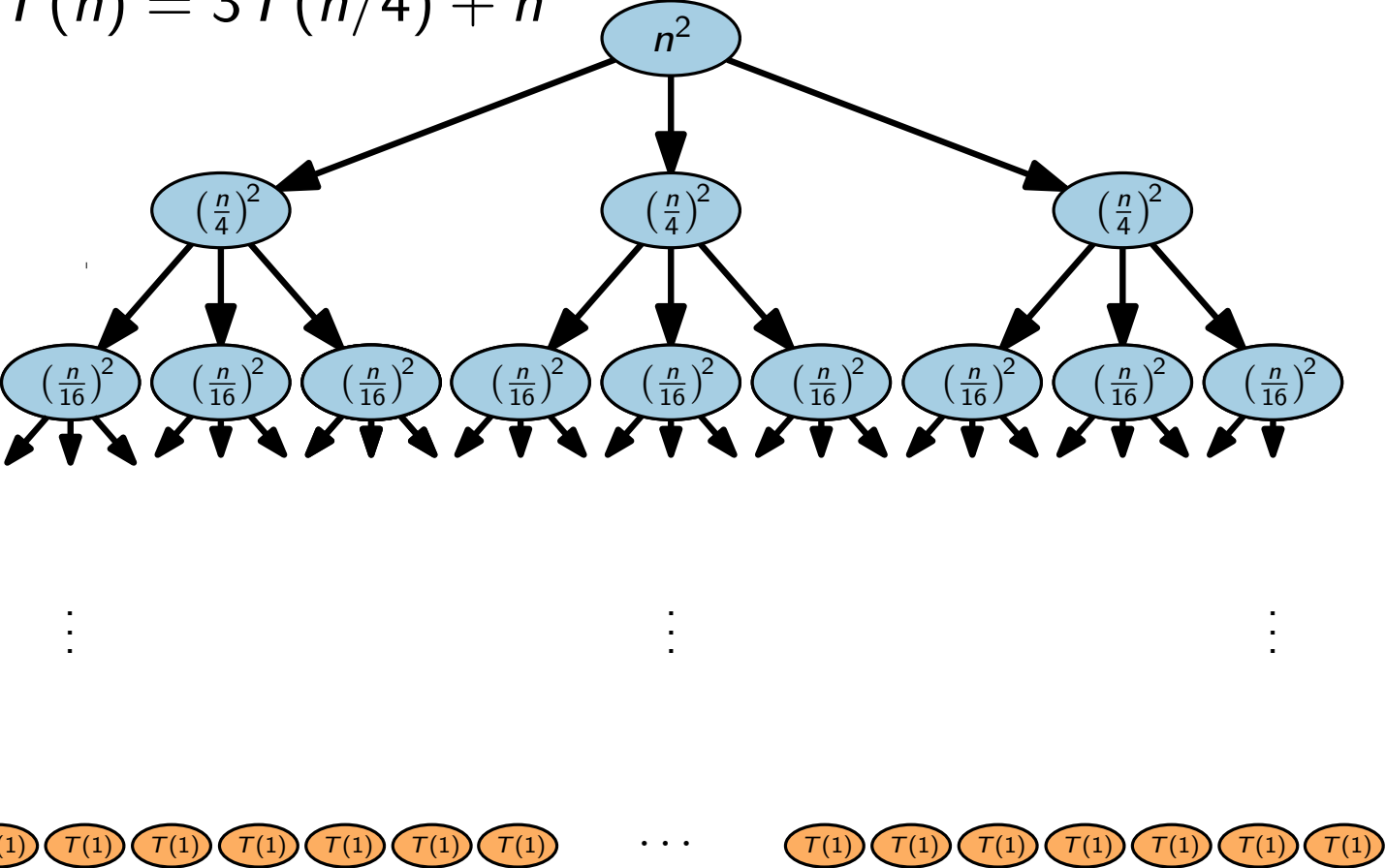
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



Ifd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$		
$\log_4 n$		

II) Rekursionsbaummethode

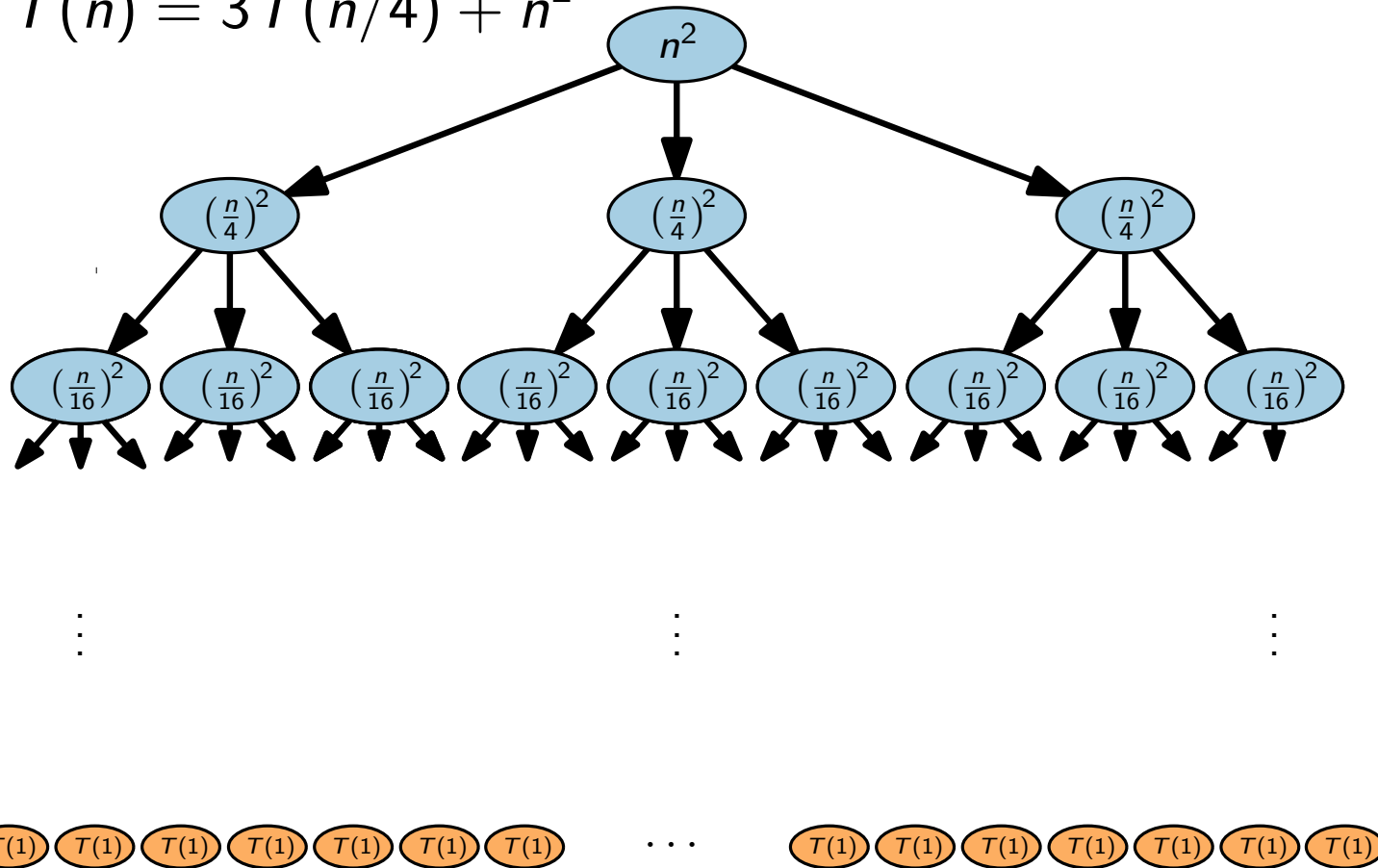
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$	

II) Rekursionsbaummethode

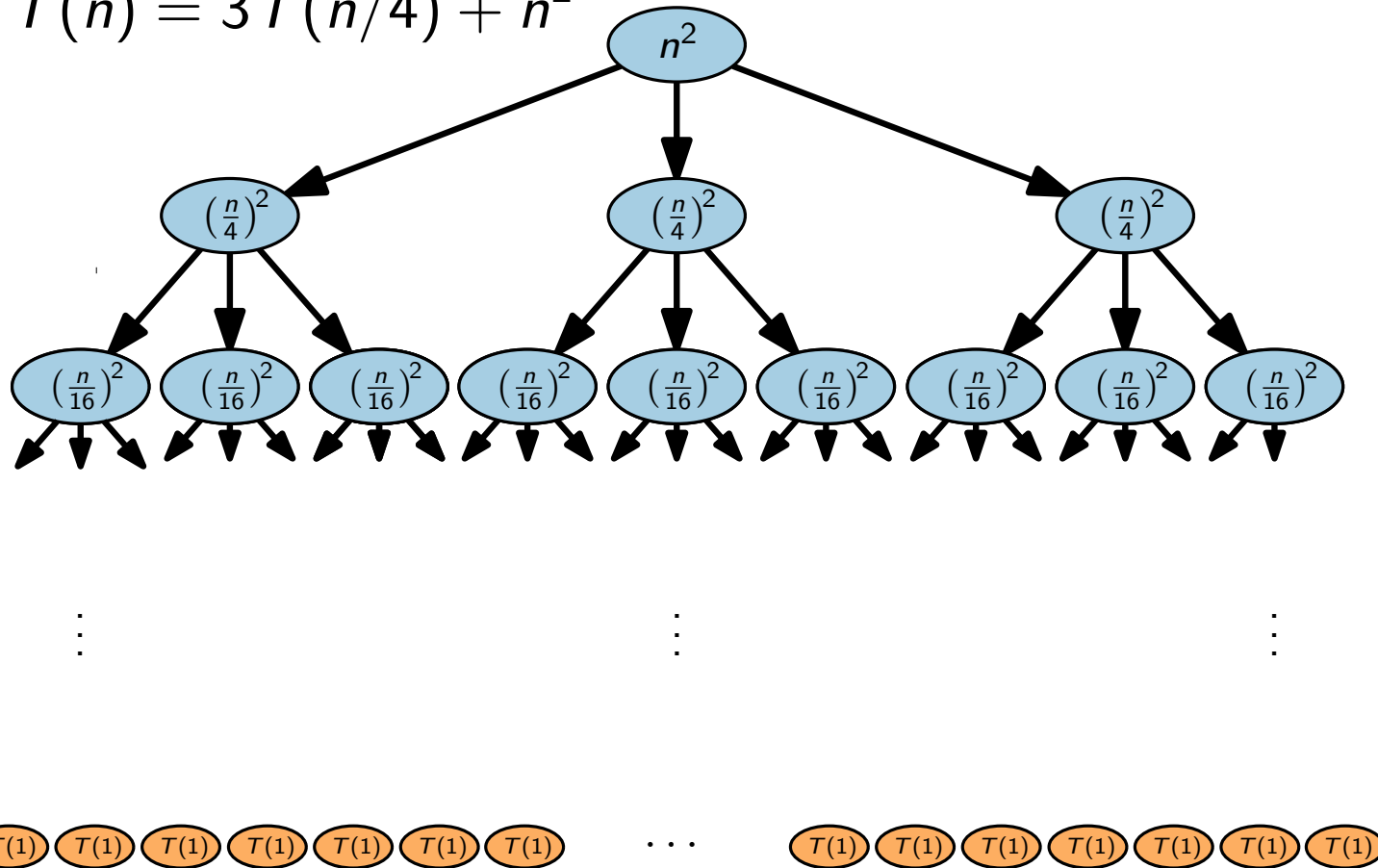
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ =	

II) Rekursionsbaummethode

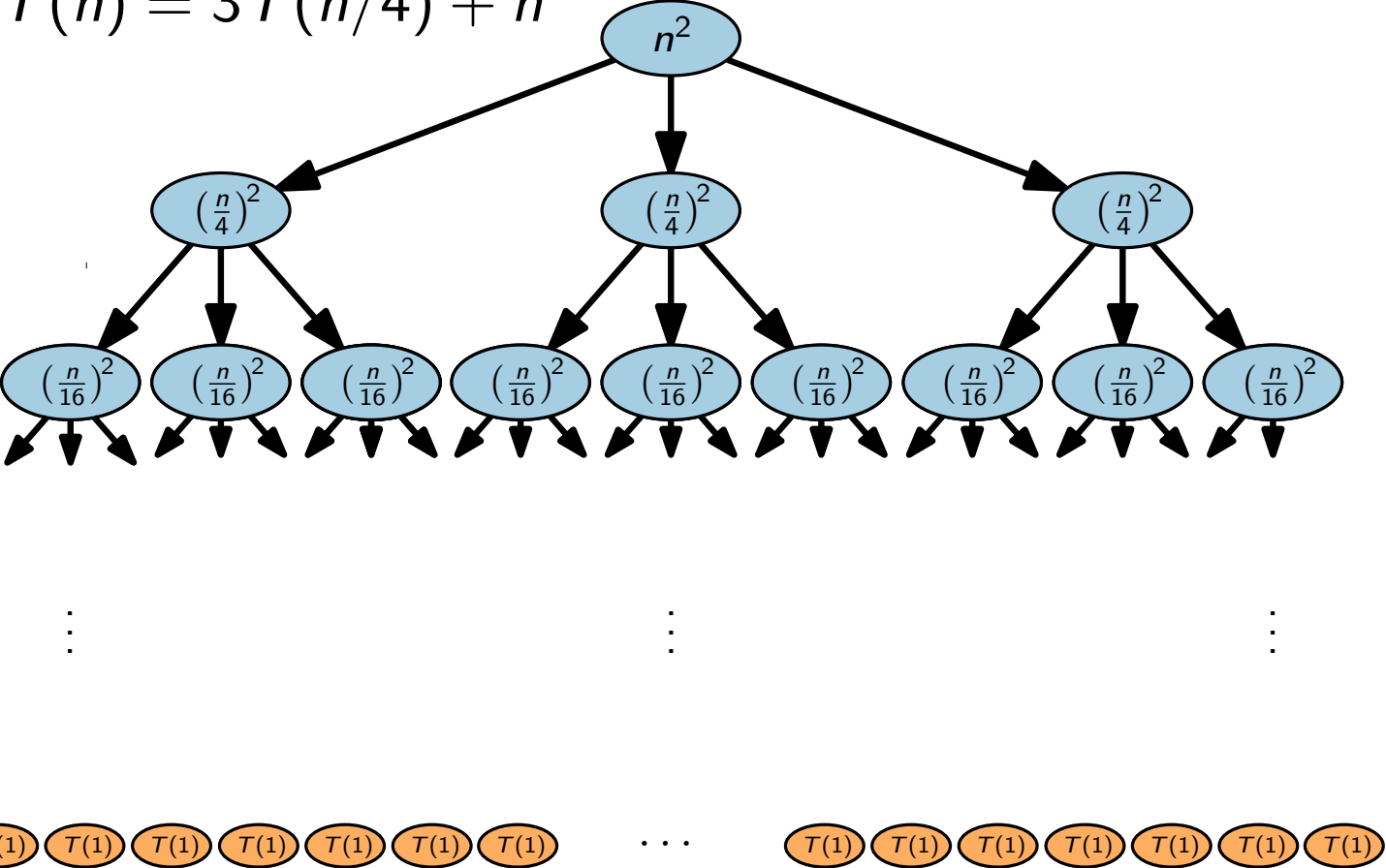
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	

II) Rekursionsbaummethode

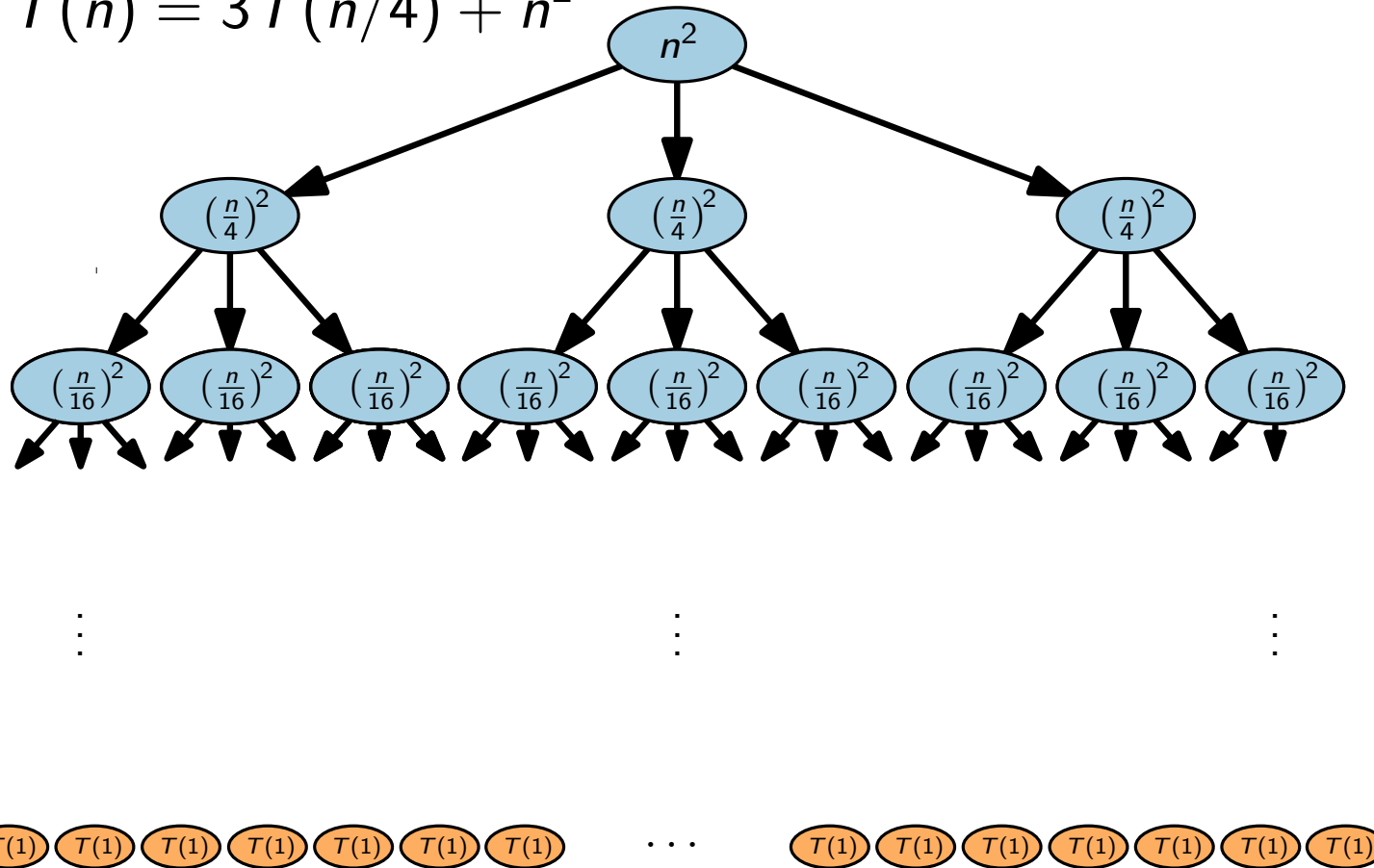
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$

II) Rekursionsbaummethode

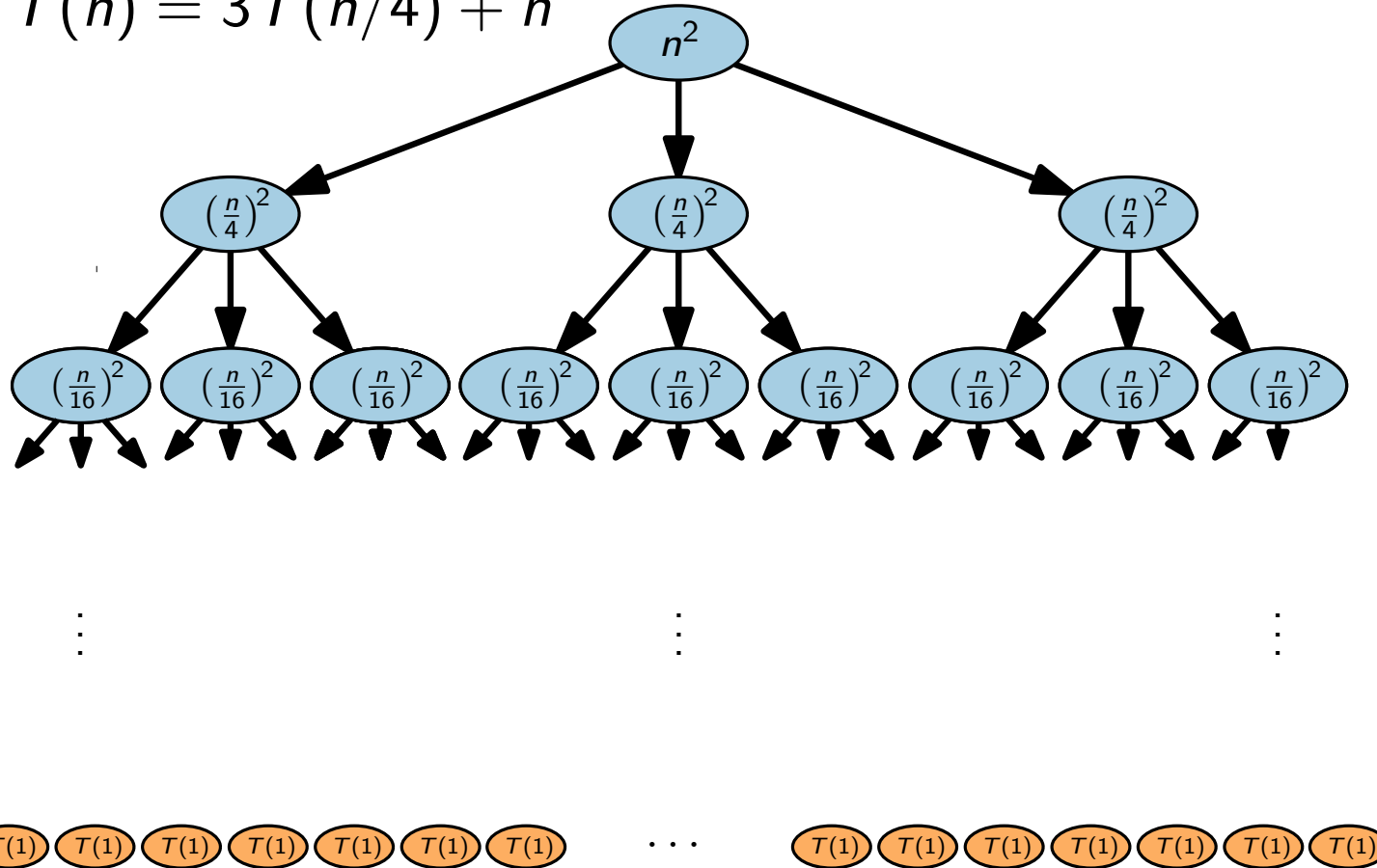
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$

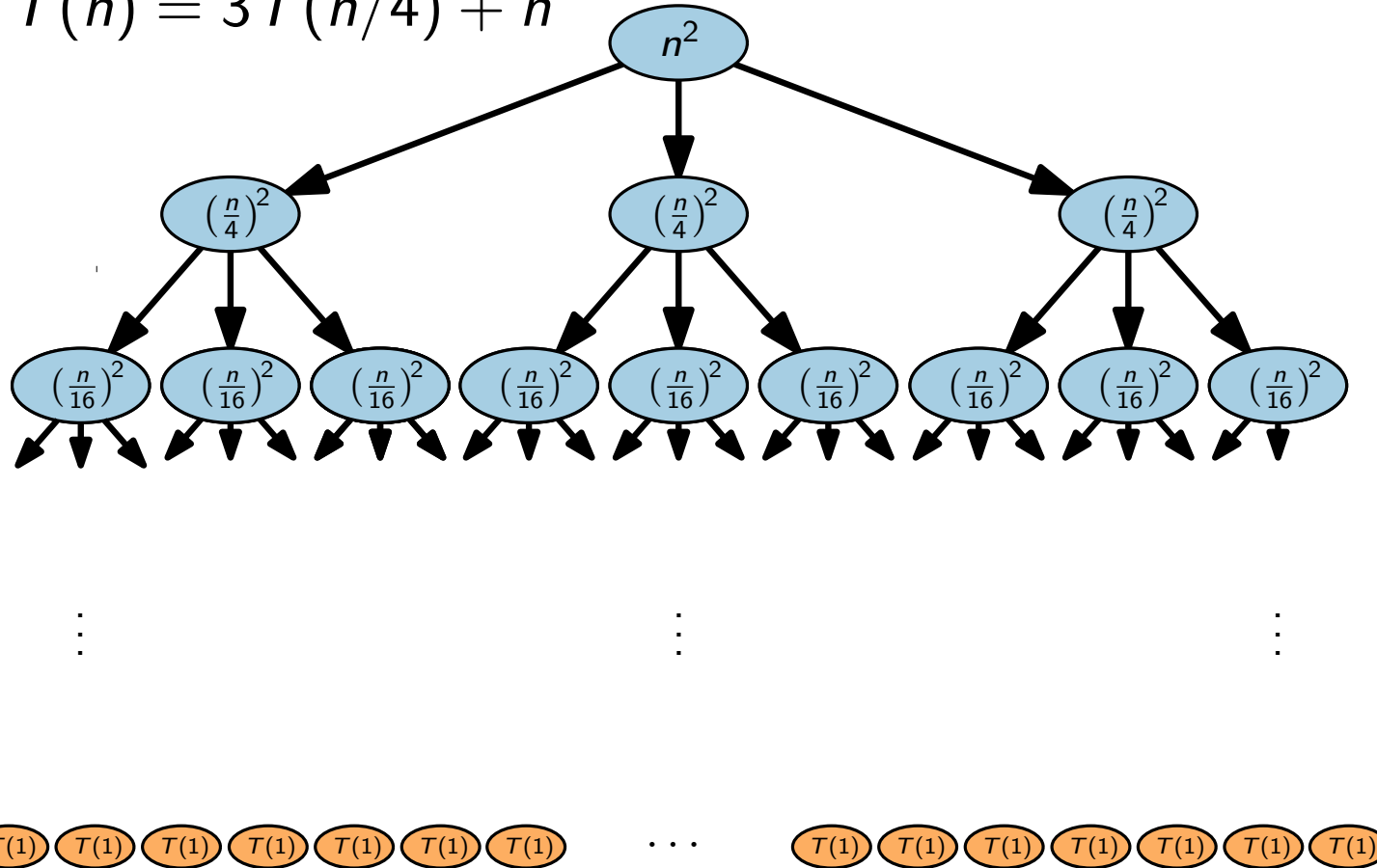


lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

$$\Rightarrow T(n) =$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



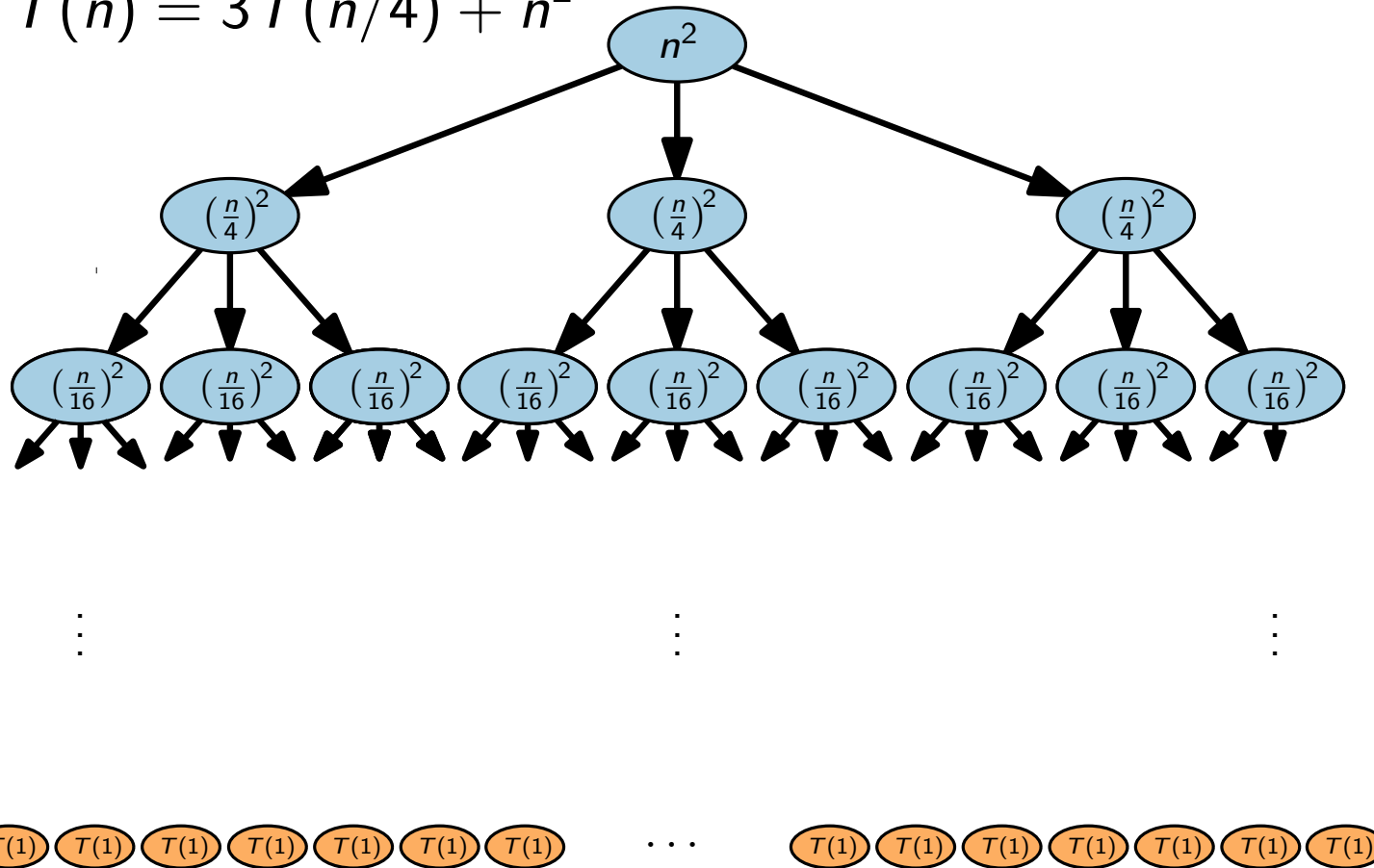
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = \text{[orange box]} + \text{[blue box]}$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



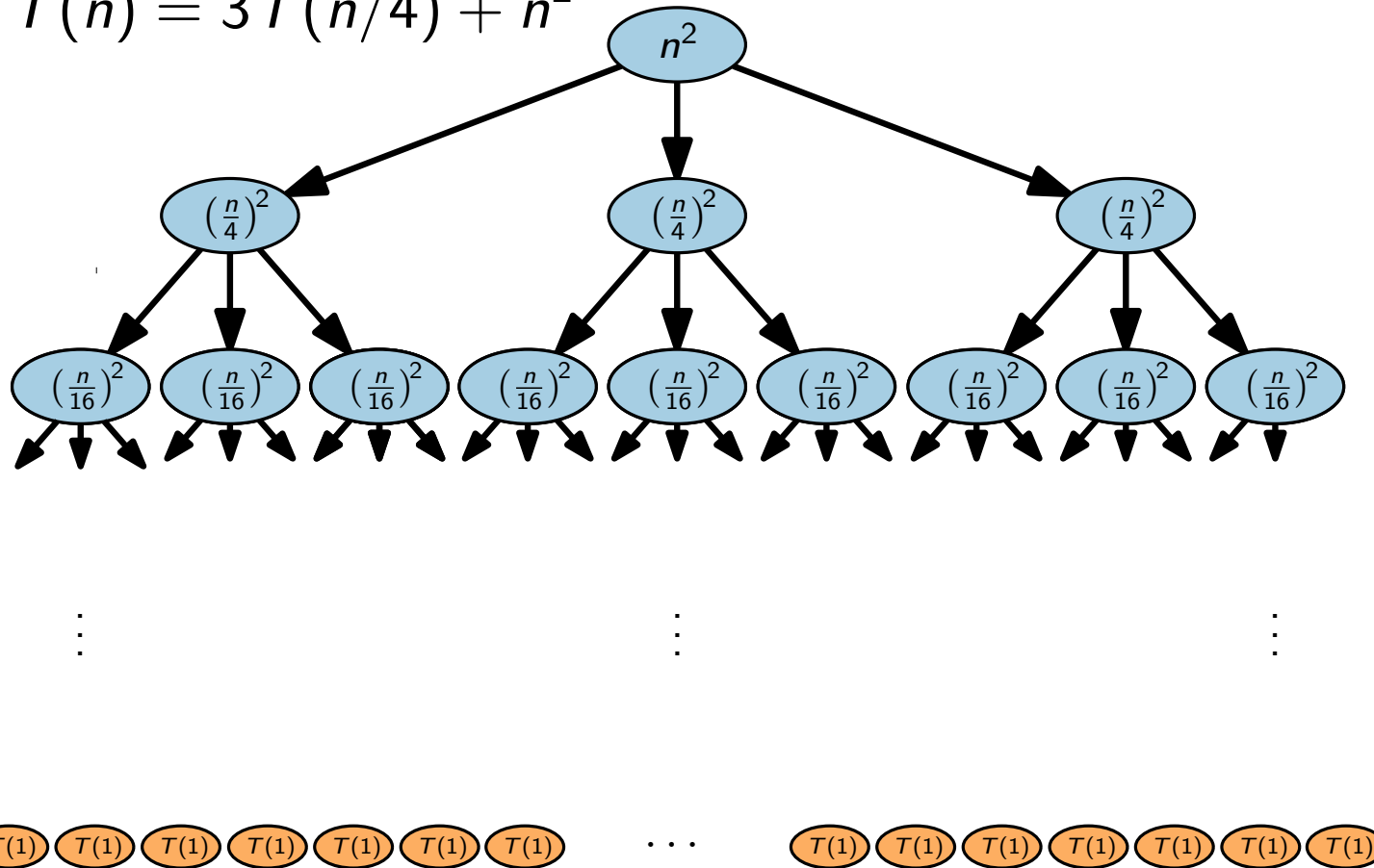
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \text{[blue box]}$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



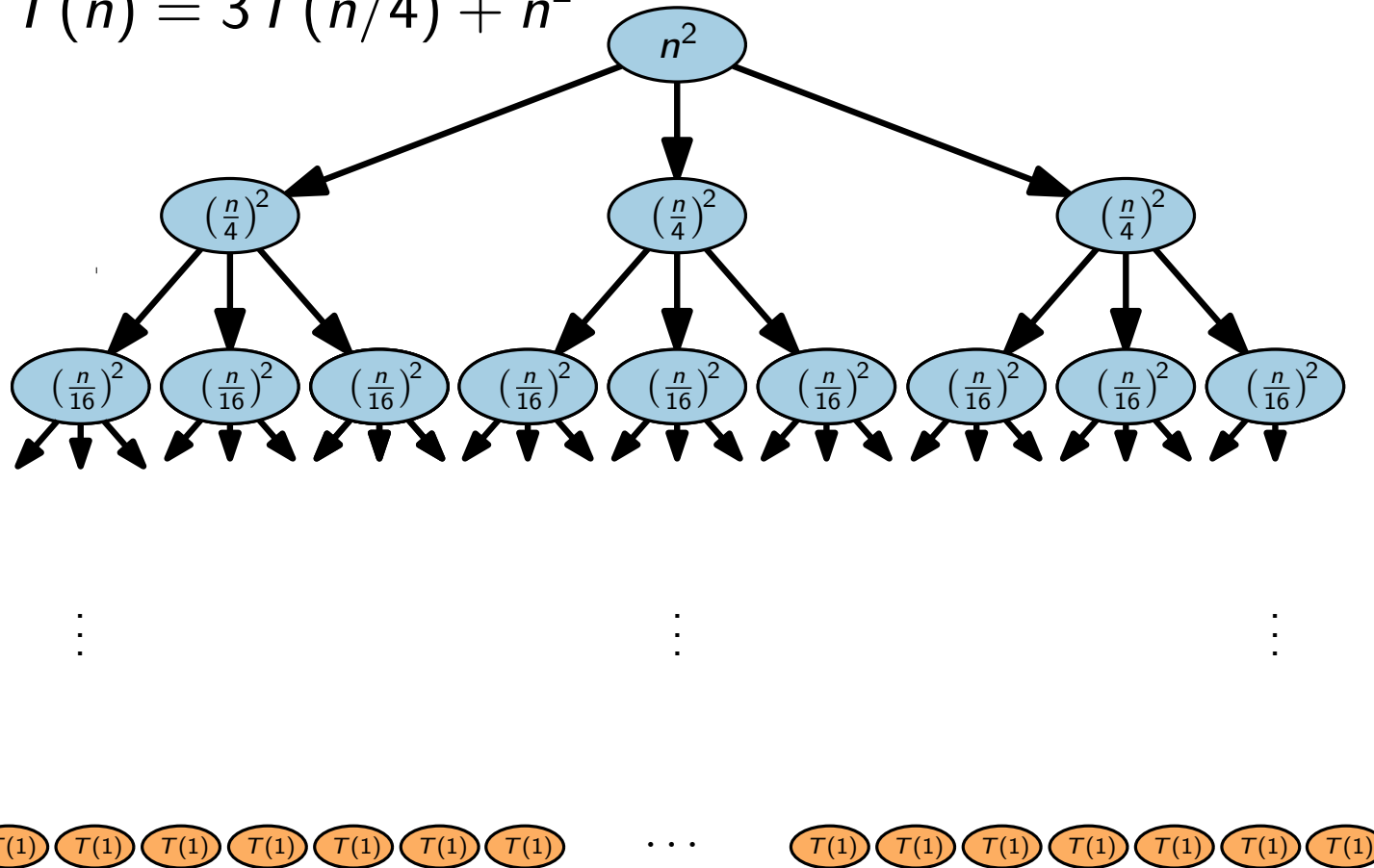
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



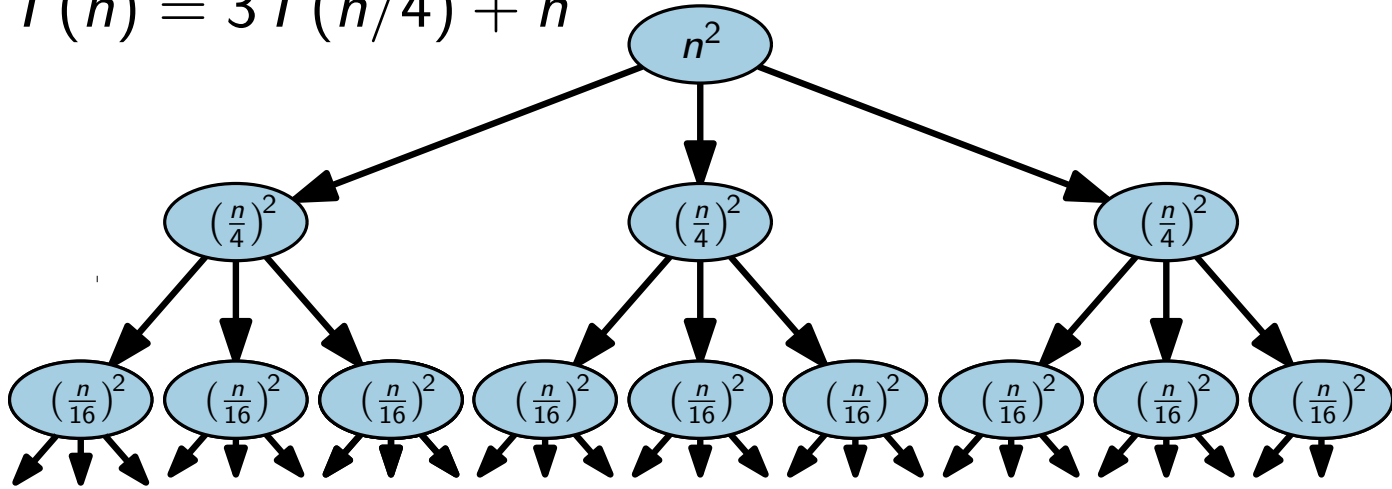
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} +$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



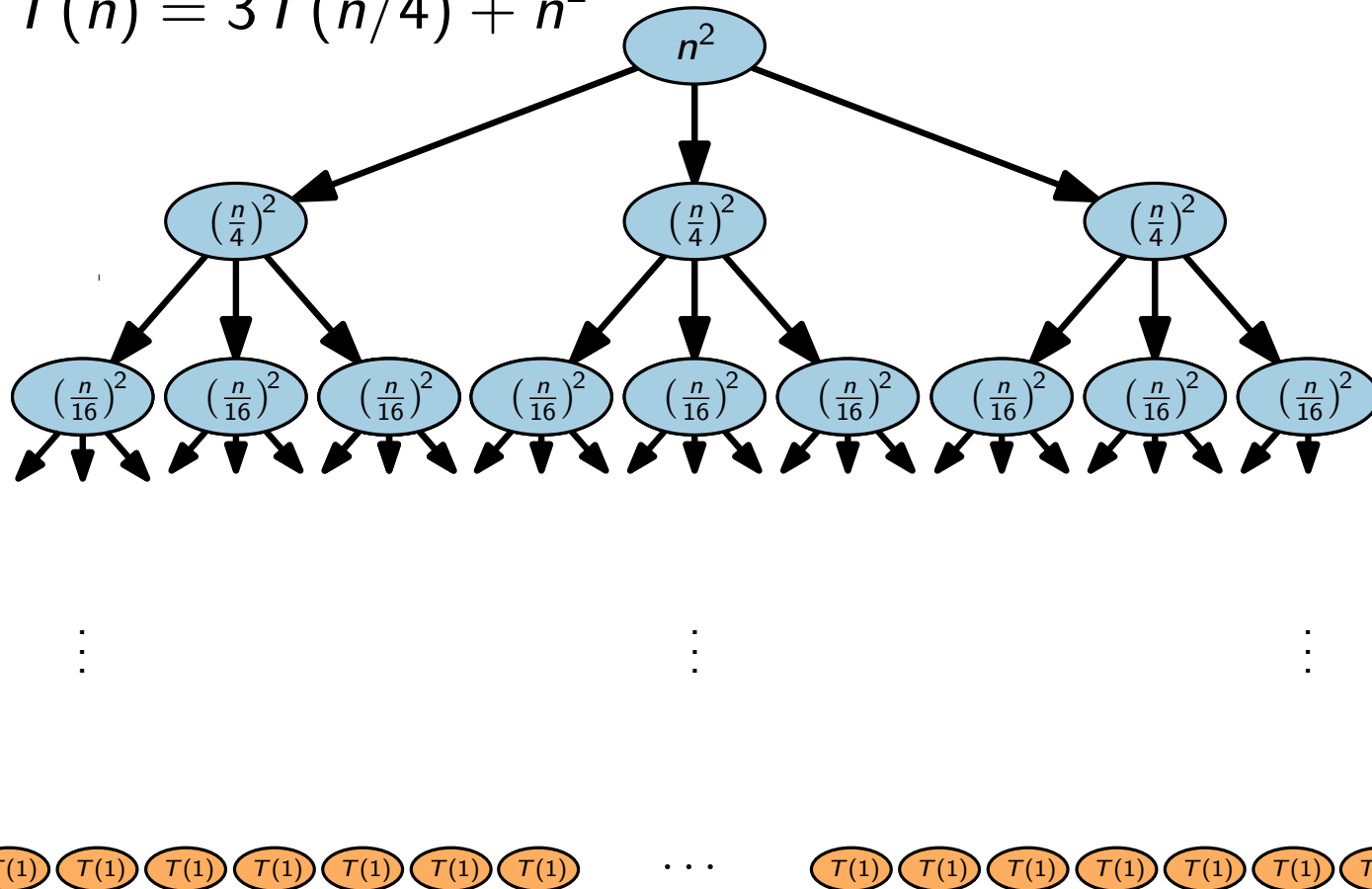
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i =$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



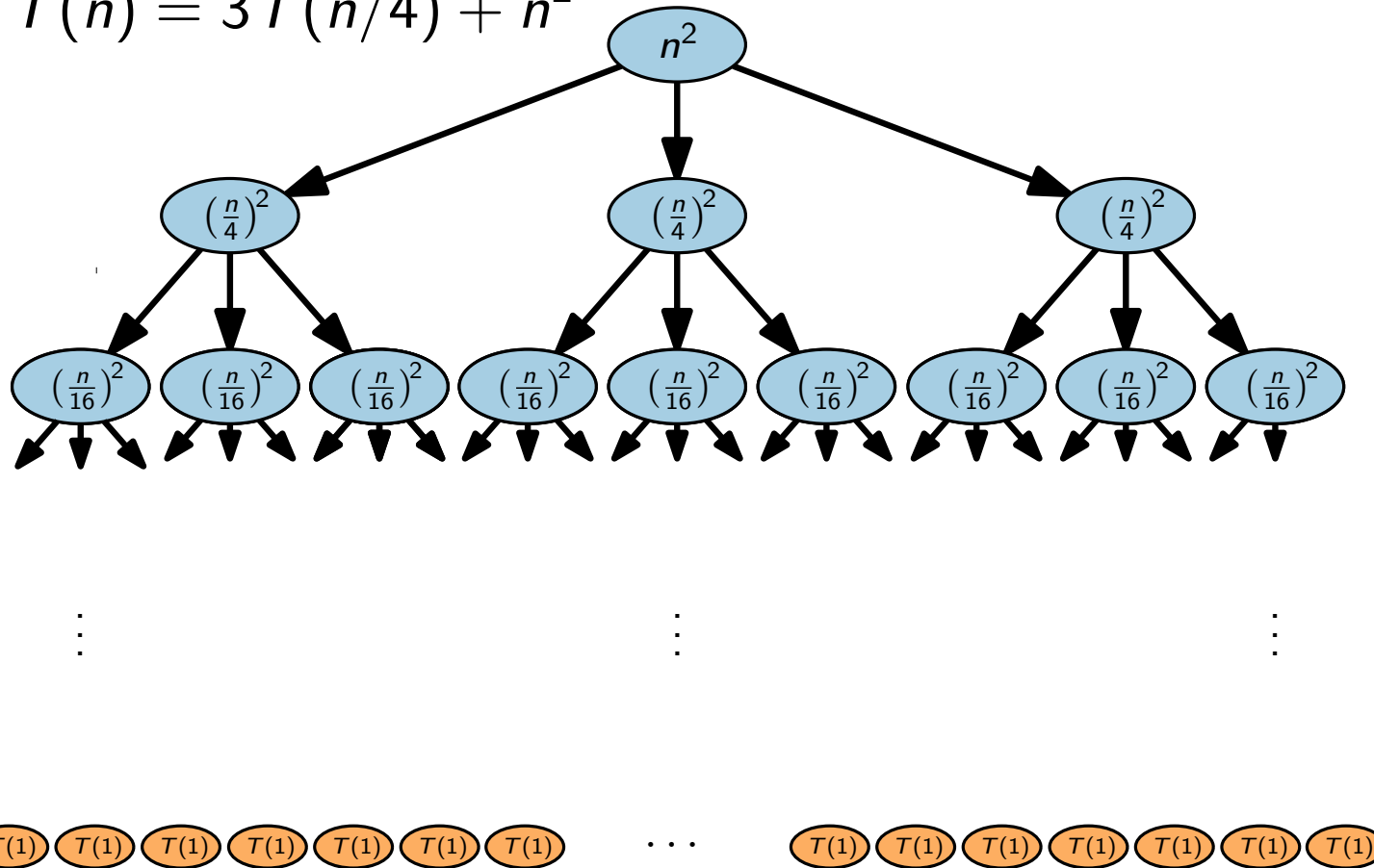
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i =$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i =$$

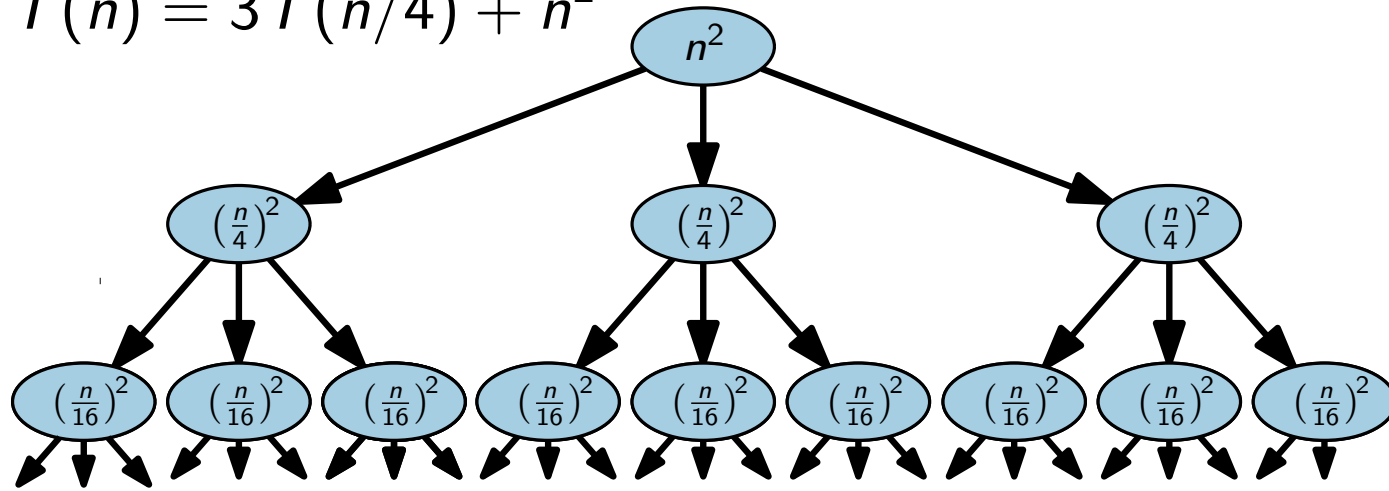
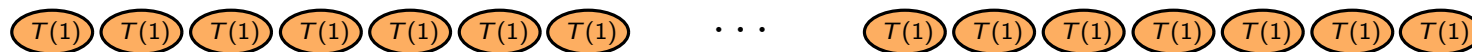
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i =$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

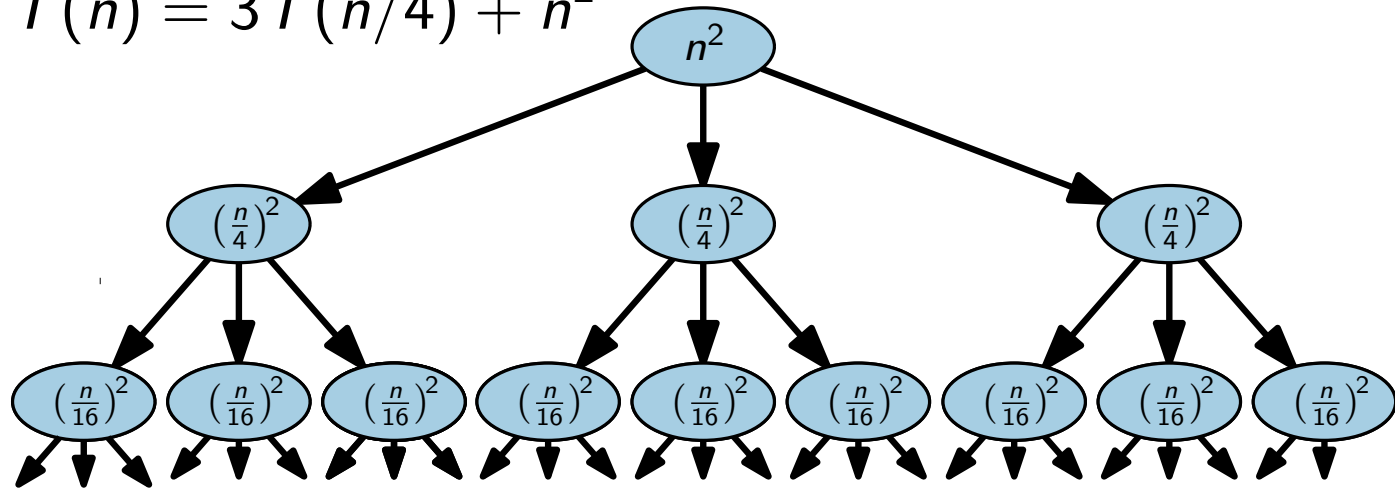
geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



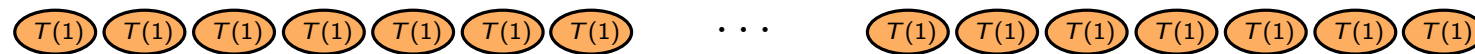
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe



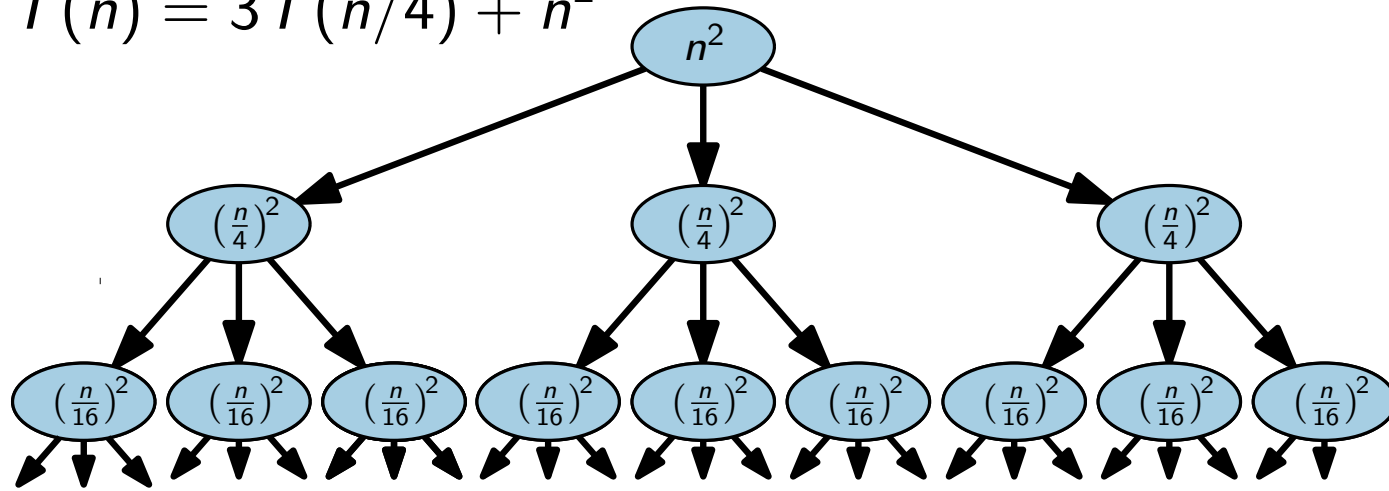
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i =$$

$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



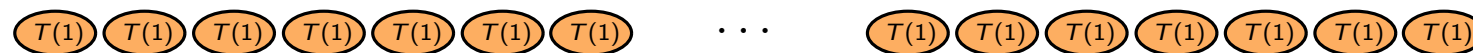
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe



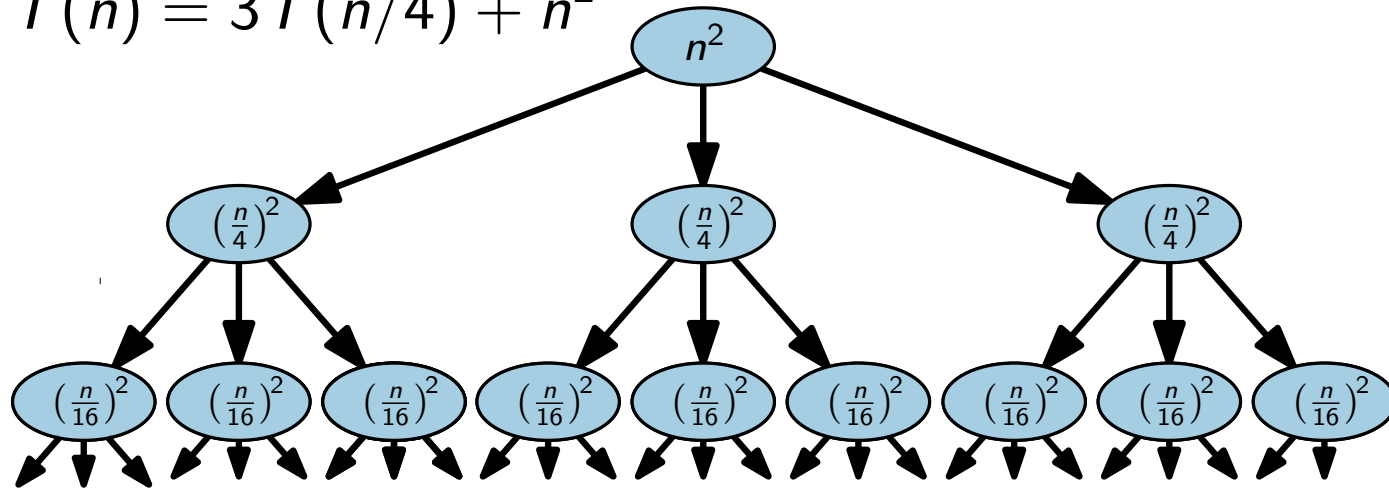
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

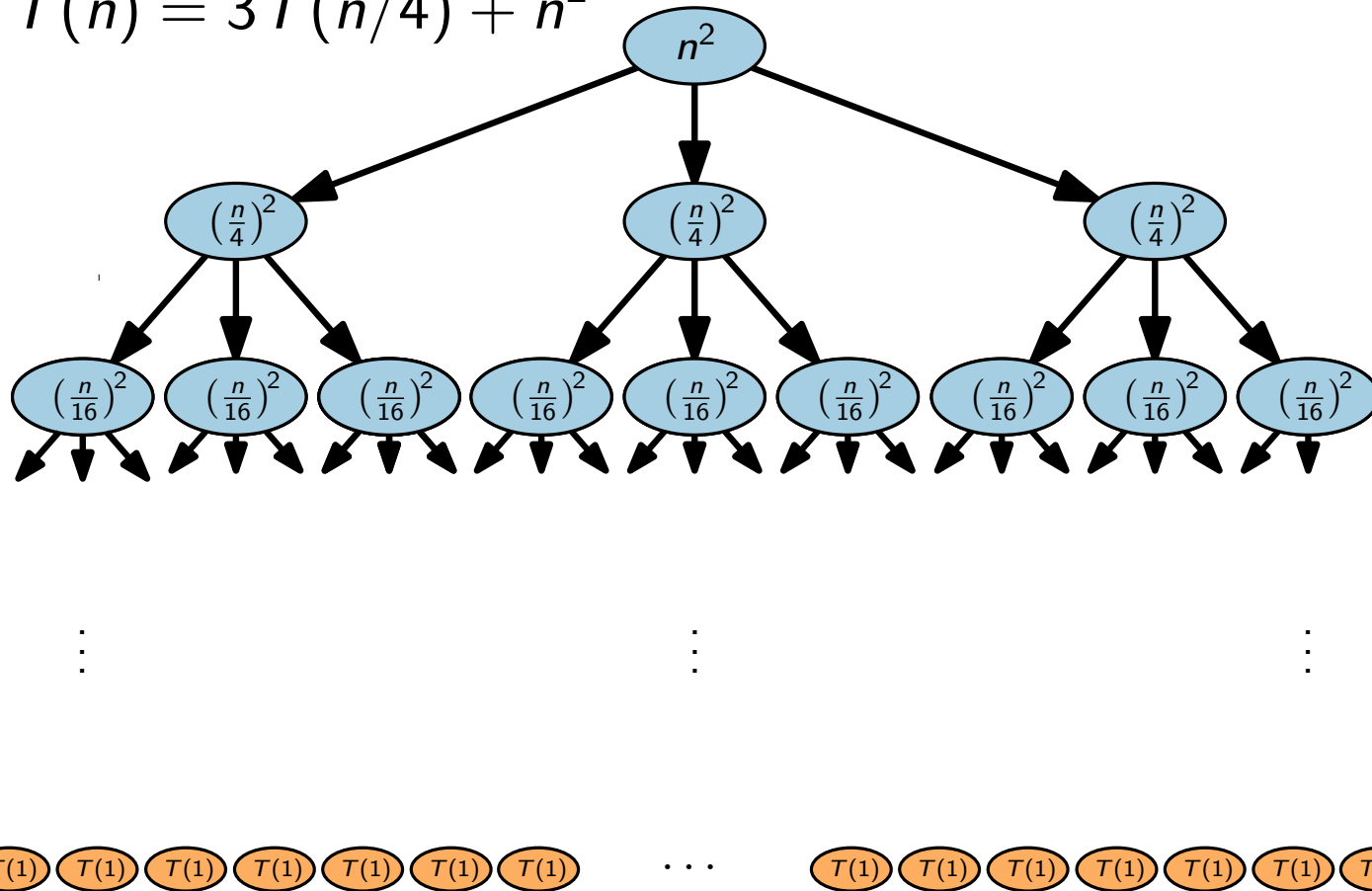
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

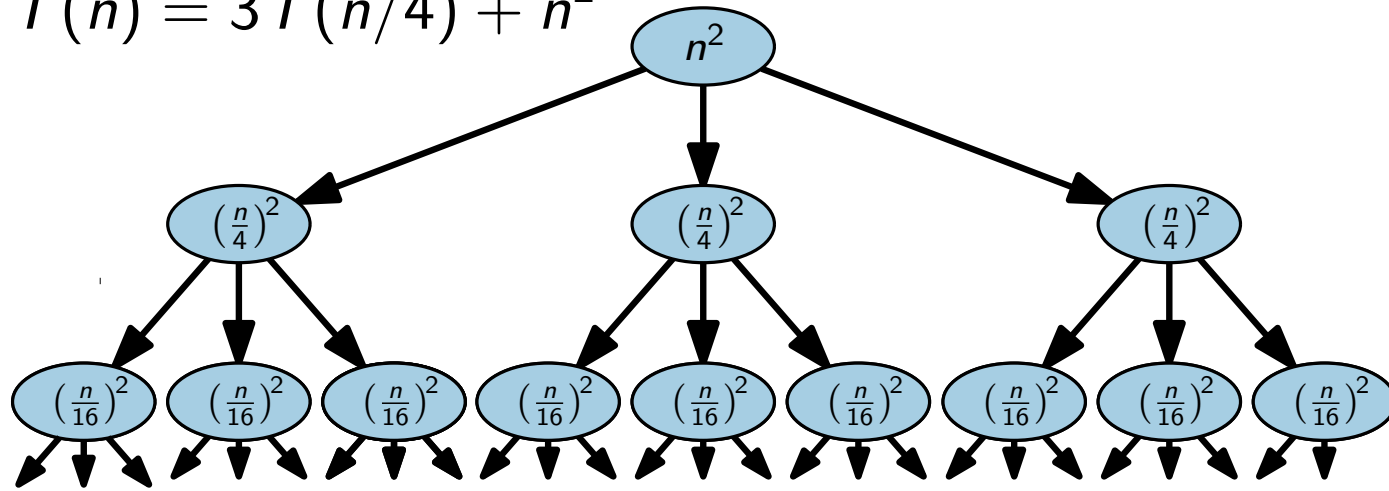
geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

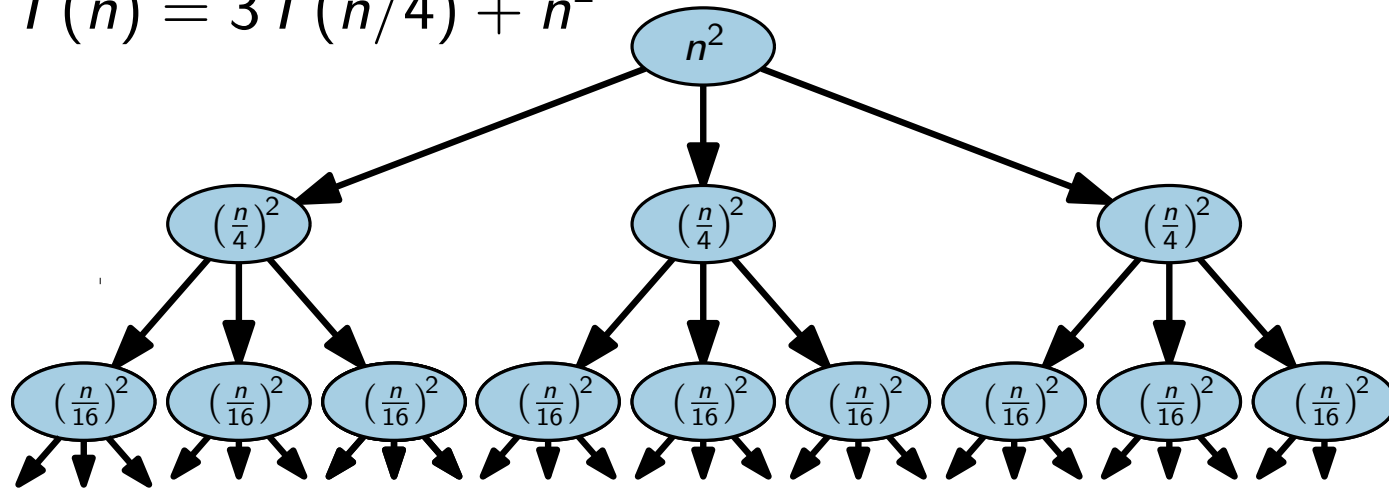
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

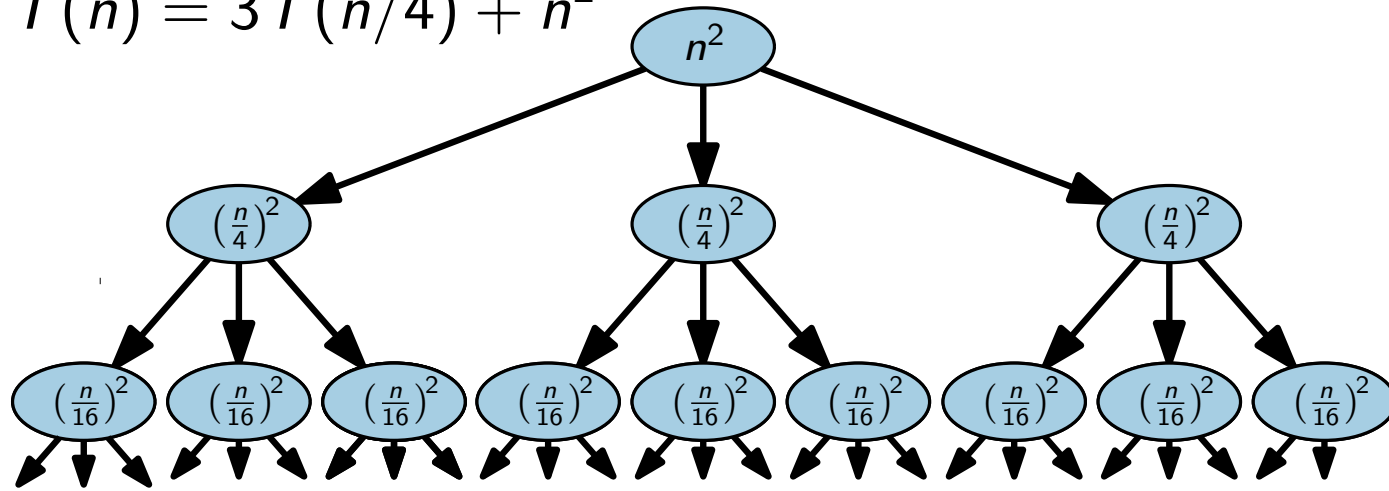
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

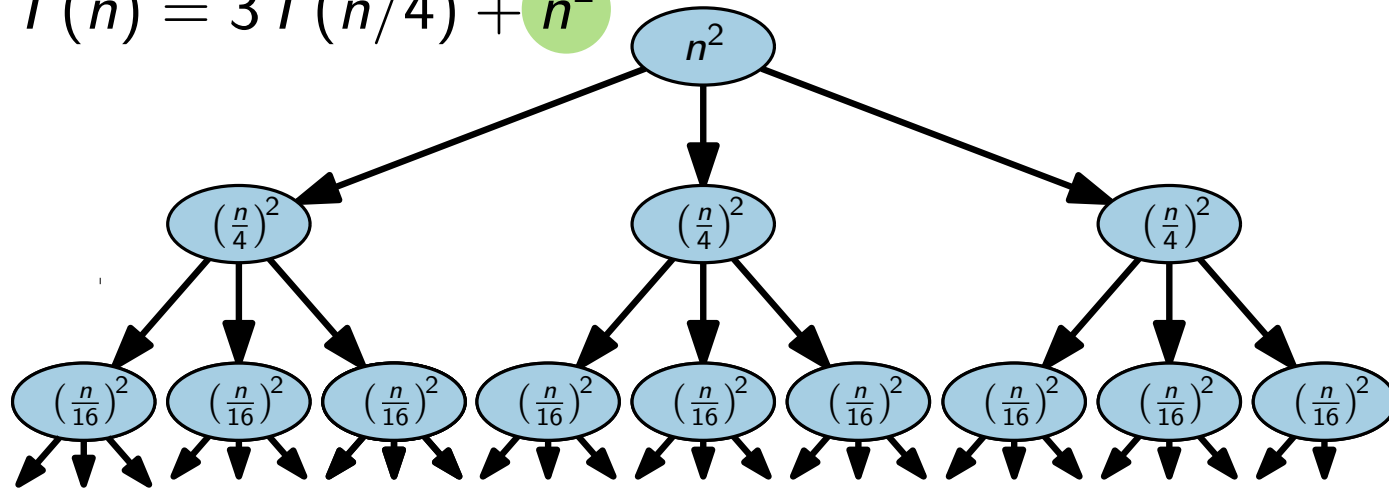
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

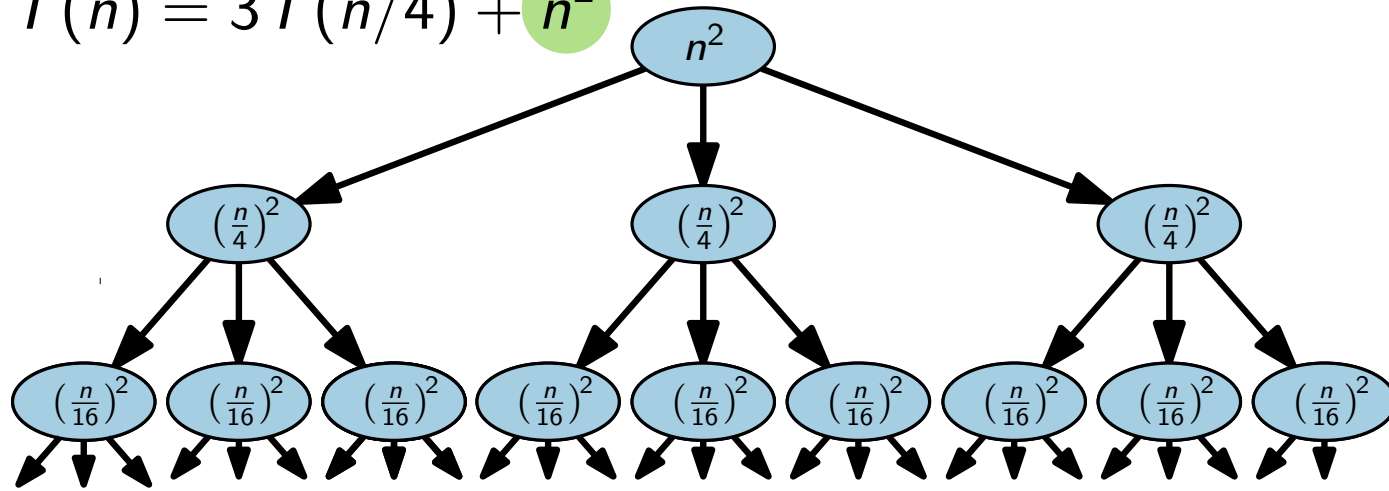
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

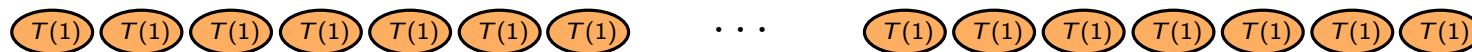
$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



Übung.

Berechnen Sie mit der
Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n, \text{ wobei } T(1) = 0.$$



unterste Ebene

andere Ebenen

0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

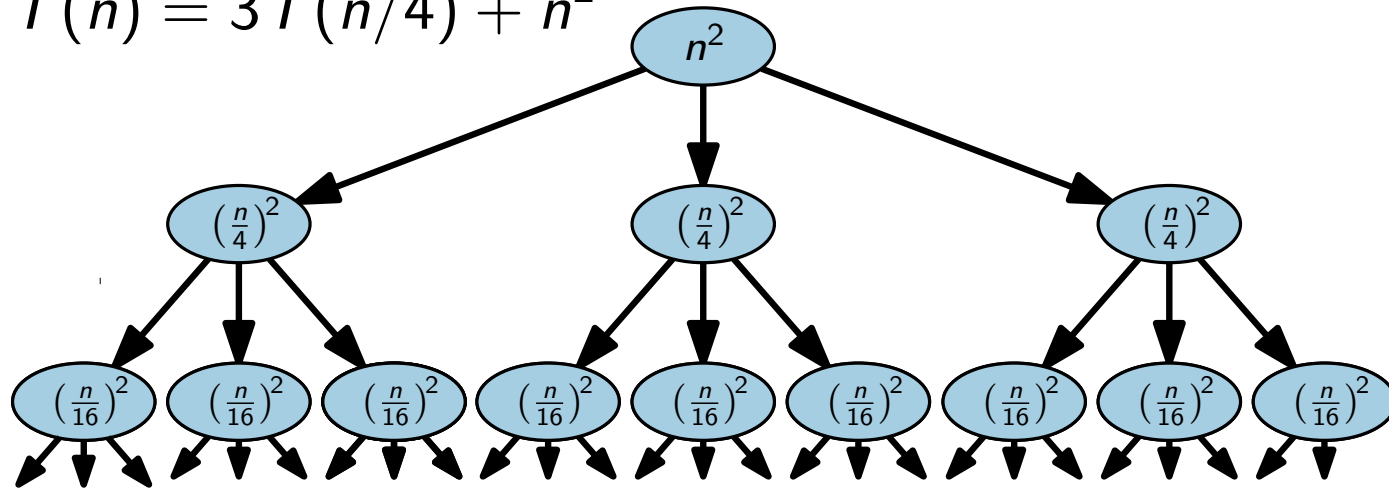
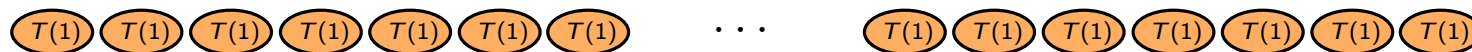
geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



unterste Ebene

andere Ebenen

0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

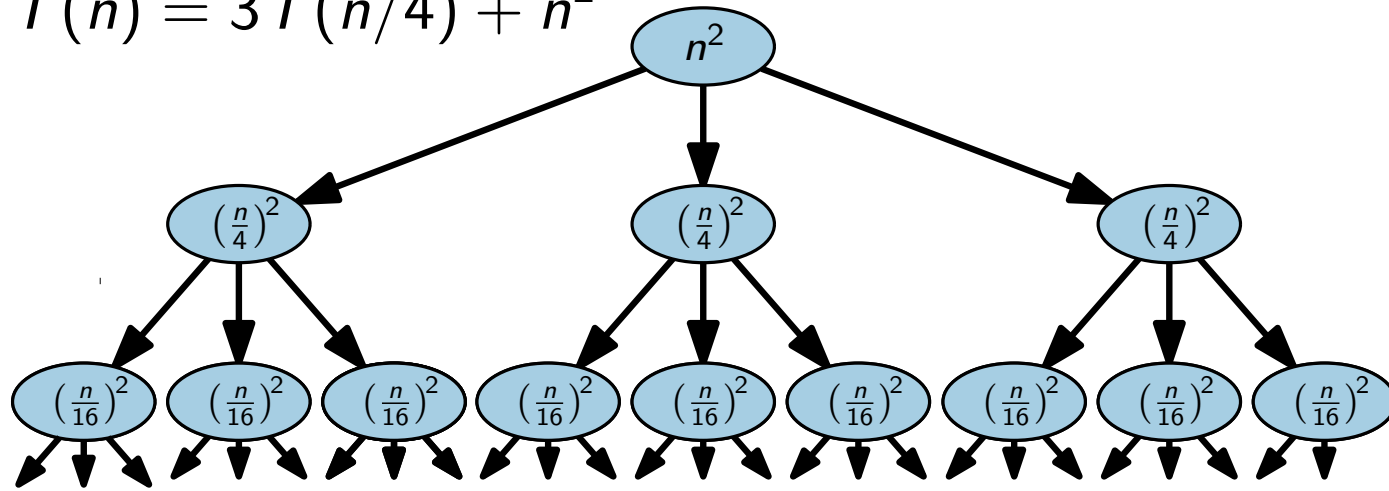
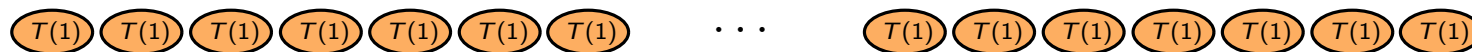
geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



unterste Ebene

andere Ebenen

0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

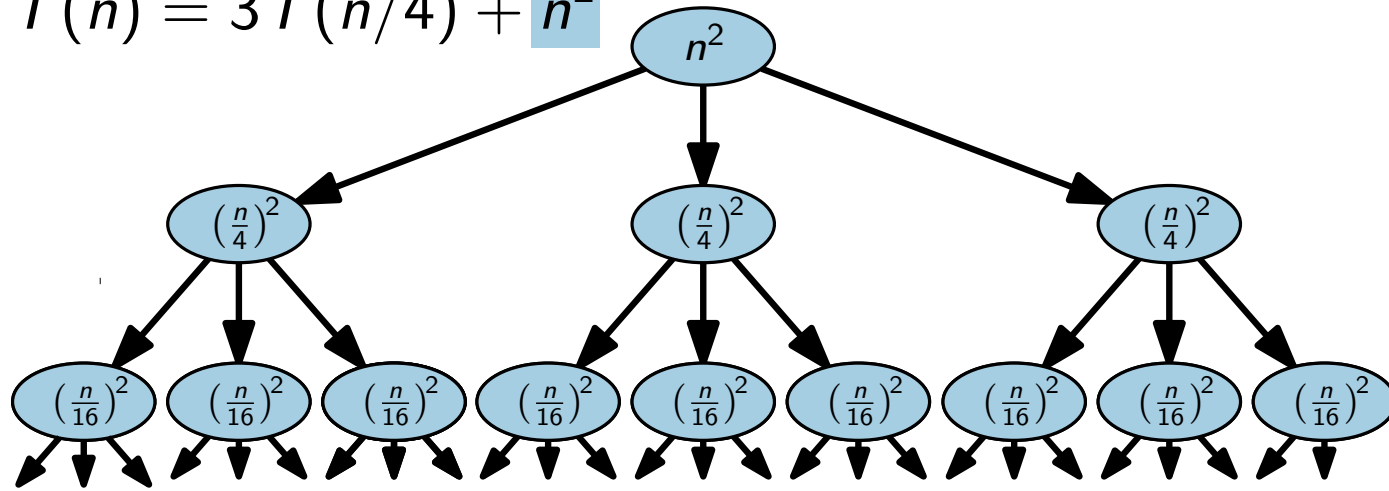
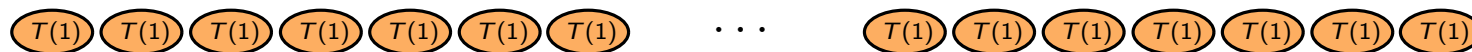
geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



unterste Ebene

andere Ebenen

0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

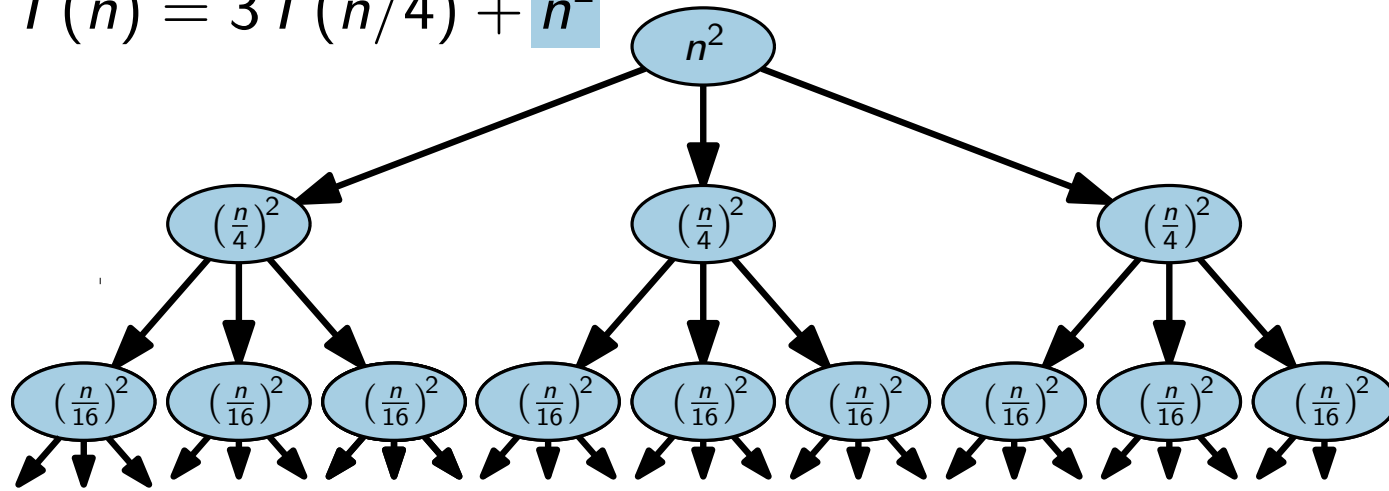
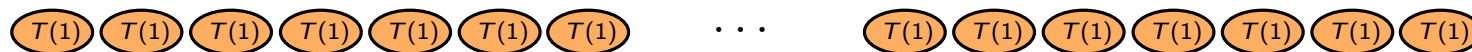
geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



unterste Ebene

andere Ebenen

0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$ $n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ <small>vorausgesetzt $T(1) = 1$</small>

$$2) \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

geometrische Reihe

$$2') \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

geometrische Reihe

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ **asymptotisch positiv**...

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ **asymptotisch positiv**...

...und auch da nicht in allen Fällen!

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Definition. Die **Regularitätsbedingung** ist erfüllt, falls

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

für ein $c < 1$ und für alle großen n .

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

$$\Rightarrow f \in ?(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon})$$

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

$$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)^{\pm \varepsilon}})$$

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

$$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)^{\pm \varepsilon}}), \text{ z.B. für } \varepsilon = 1, \text{ da } \log_4 3 < 1.$$

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel.

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

$$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)^{\pm \varepsilon}}), \text{ z.B. für } \varepsilon = 1, \text{ da } \log_4 3 < 1.$$

Das ist **Fall 3!**

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel.

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

$$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)^{\pm \varepsilon}}), \text{ z.B. für } \varepsilon = 1, \text{ da } \log_4 3 < 1.$$

Das ist **Fall 3!**

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1)$ und $f: n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)^{\pm \varepsilon}})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist **Fall 3!**

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n ?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1)$ und $f: n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \Omega(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist **Fall 3!**

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n ?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$?

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1)$ und $f: n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \Omega(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist **Fall 3!**

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n ?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1)$ und $f: n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \Omega(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist **Fall 3!**

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n ?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein!

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1)$ und $f: n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \Omega(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist **Fall 3!**

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein! ✓

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1) \text{ und } f: n \mapsto n^2.$$

$$\Rightarrow f \in \Omega(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon}) \text{ , z.B. für } \varepsilon = 1, \text{ da } \log_4 3 < 1.$$

Das ist **Fall 3!** $\Rightarrow$

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

$$\text{Gilt } 3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2? \text{ Ja - z.B. für } c = \frac{3}{16}.$$

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein! 

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1)$ und $f: n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \Omega(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist **Fall 3!** $\Rightarrow T \in \Theta(f)$

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein! ✓

III) Meistermethode

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \text{und die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow a = 3 (\geq 1), b = 4 (> 1)$ und $f: n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \Omega(n^{(\log_4 3) \pm \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist **Fall 3!** $\Rightarrow T \in \Theta(f) = \Theta(n^2)$ $\square$

Üben! Hausaufgaben!

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein! 

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

$$\Rightarrow n^{\log_b a} =$$

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

$$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} =$$

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

$$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$$

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$, aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$!

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$, aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$!

Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^ε , für jedes $\varepsilon > 0$.

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
(und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$
 $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$, aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$!

Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^ε , für jedes $\varepsilon > 0$.

PS: Wie könnte man das beweisen?

Übersicht

■ Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

■ Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

■ Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

Achtung:

Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

Also können wir die Meistermethode hier **nicht** verwenden!

$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$, aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$!

Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^ε , für jedes $\varepsilon > 0$.

PS: Wie könnte man das beweisen?