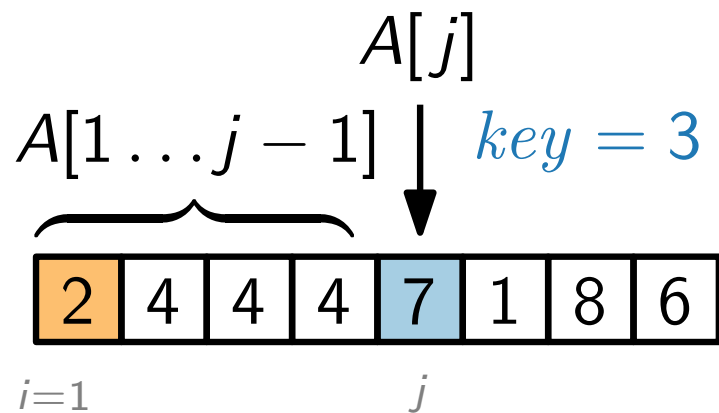
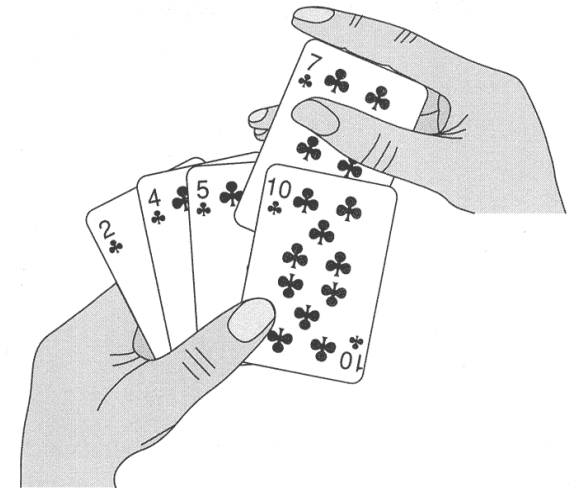




Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 1: Sortieren



Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!
Wichtig:

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!
Wichtig: ■ Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:

- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert **konstante Zeit**, d.h. die Dauer ist unabhängig von n .

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:

- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert **konstante Zeit**, d.h. die Dauer ist unabhängig von n .

Noch was:

0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Umordnung

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:

- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert **konstante Zeit**, d.h. die Dauer ist unabhängig von n .

Noch was:



Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe

↓ **Algorithmus**

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Umordnung

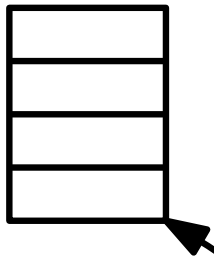
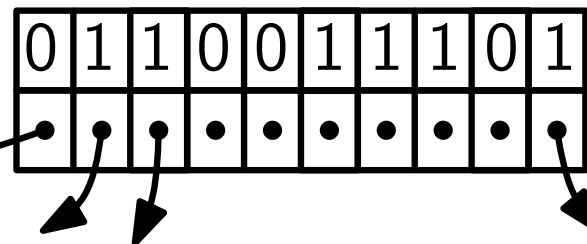
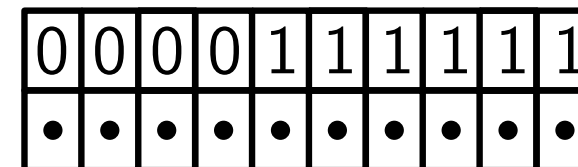
Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:

- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert **konstante Zeit**, d.h. die Dauer ist unabhängig von n .

Noch was:



Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe

↓ **Algorithmus**

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Umordnung

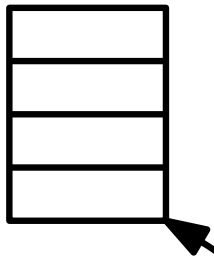
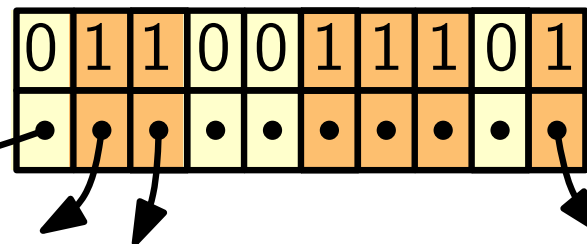
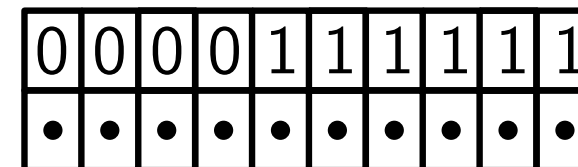
Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:

- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert **konstante Zeit**, d.h. die Dauer ist unabhängig von n .

Noch was:



Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Umordnung

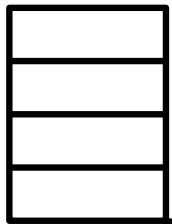
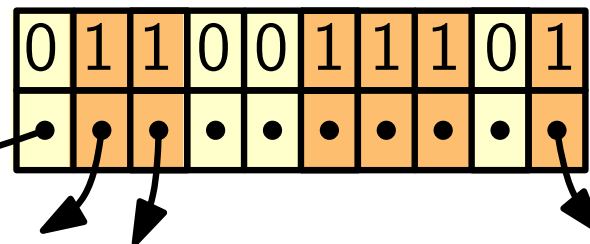
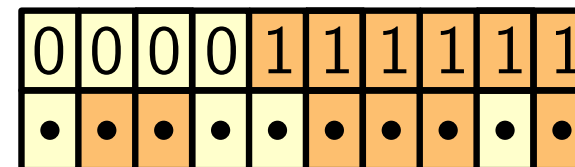
Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:

- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert **konstante Zeit**, d.h. die Dauer ist unabhängig von n .

Noch was:



Das Problem

Gegeben. eine Folge $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ von n Zahlen

Eingabe



Algorithmus

Gesucht. eine **Permutation** $\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$ von A , so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Umordnung

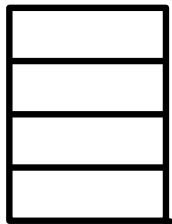
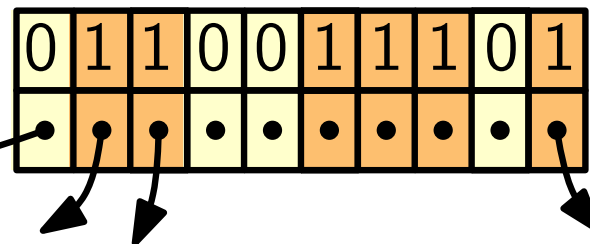
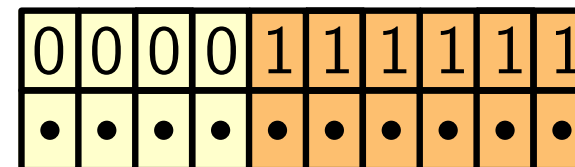
Ausgabe

Beachte. Computerinterne Zahlendarstellung hier unwichtig!

Wichtig:

- Je zwei Zahlen lassen sich vergleichen.
- Ein Vergleich dauert **konstante Zeit**, d.h. die Dauer ist unabhängig von n .

Noch was:



Frage an Alle

Frage an Alle

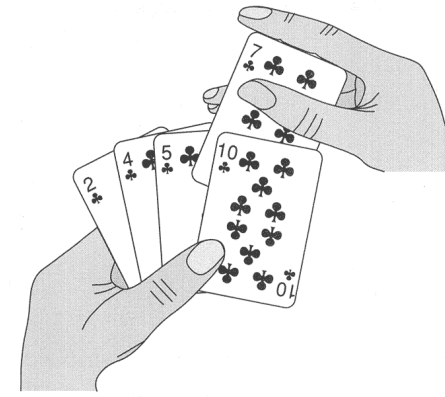
Bild von Kundan Kumar



Wie sortieren Sie Karten?

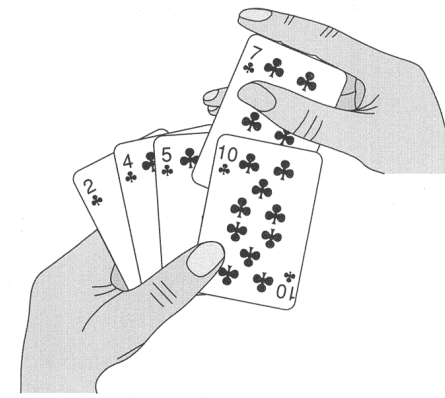
Mögliche Lösungen

INSERTIONSORT



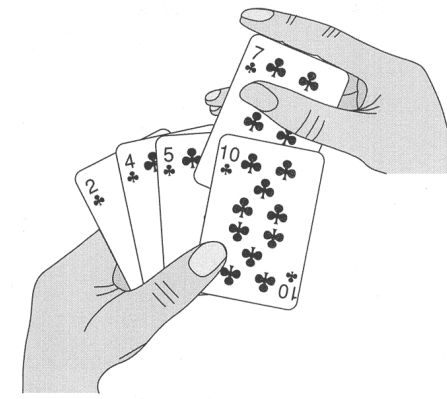
Mögliche Lösungen

INSERTION SORT



Mögliche Lösungen

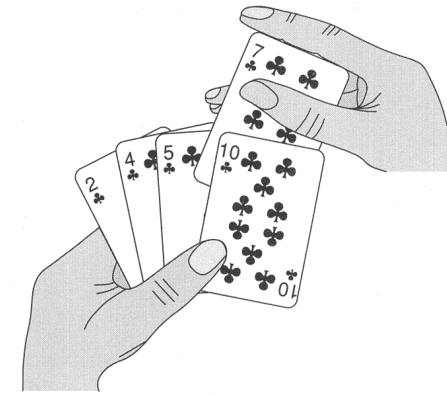
INSERTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.

Mögliche Lösungen

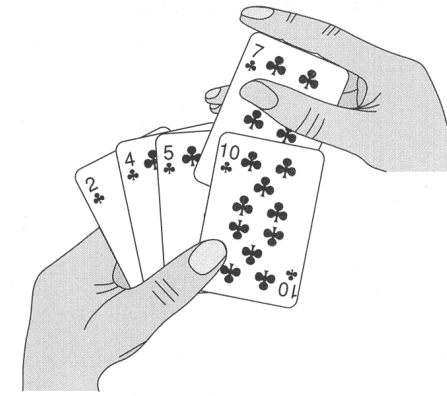
INSERTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten nacheinander auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige Position zwischen die Karten in der linken Hand.

Mögliche Lösungen

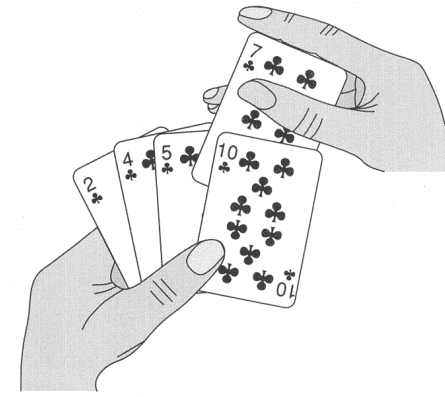
INSERTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten nacheinander auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige Position zwischen die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

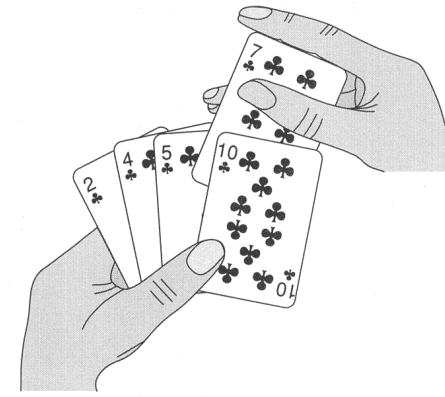
Mögliche Lösungen

SELECTIONSORT



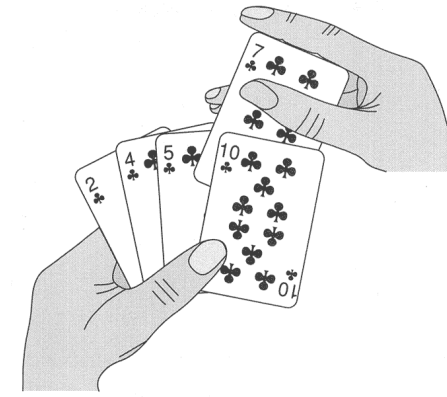
Mögliche Lösungen

SELECTIONSORT



Mögliche Lösungen

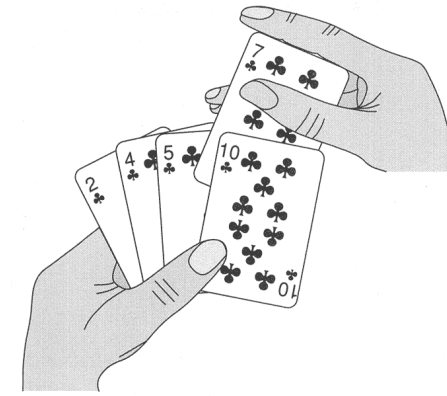
SELECTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.

Mögliche Lösungen

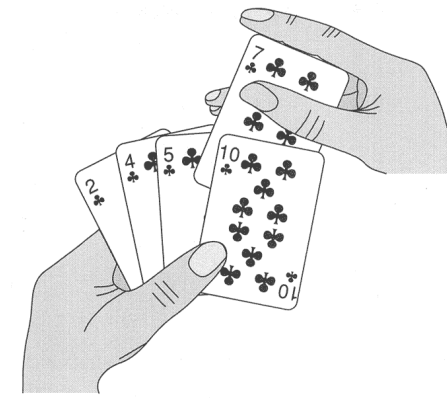
SELECTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand sucht kleinste Karte und nimmt sie in die linke Hand.

Mögliche Lösungen

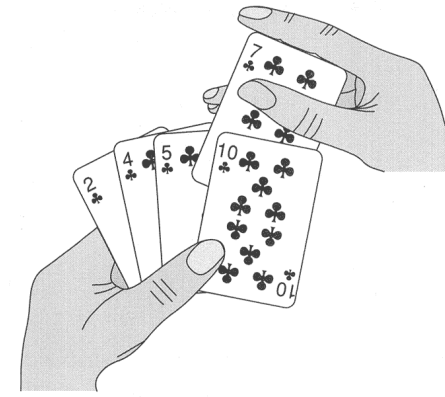
SELECTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand sucht kleinste Karte und nimmt sie in die linke Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

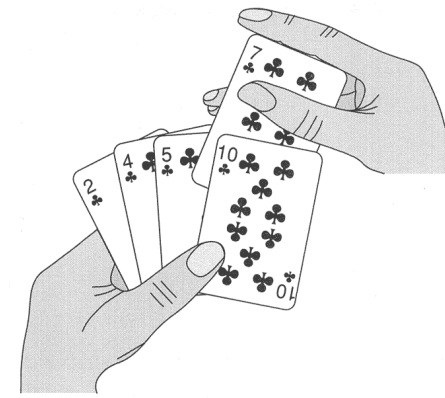
Mögliche Lösungen

BUBBLESORT



Mögliche Lösungen

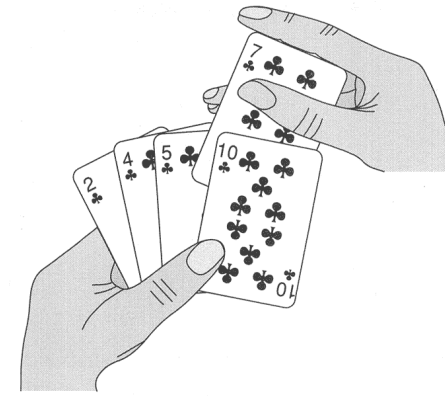
BUBBLESORT



Mögliche Lösungen

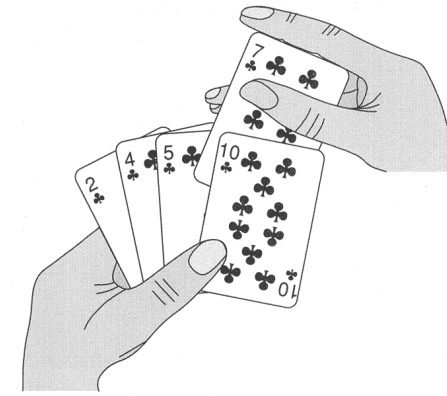
BUBBLESORT

- Linke Hand hält **alle Karten**.



Mögliche Lösungen

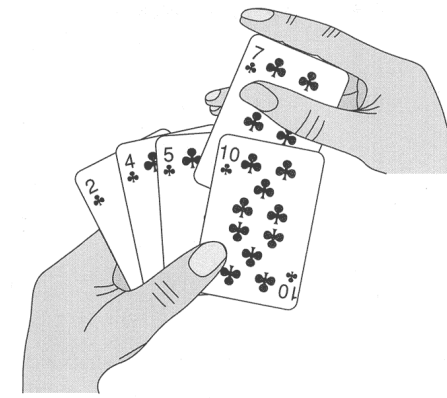
BUBBLESORT



- Linke Hand hält **alle Karten**.
- Vergleiche erste mit zweiter Karte. Wenn erste Karte größer, tausche die Karten.

Mögliche Lösungen

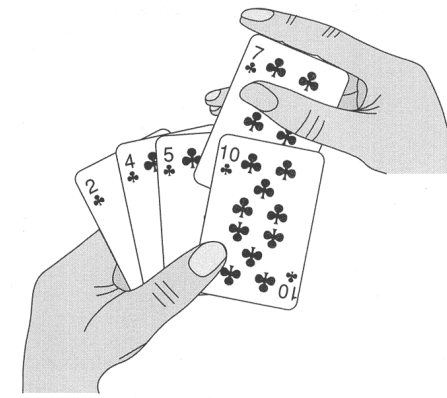
BUBBLESORT



- Linke Hand hält **alle Karten**.
- Vergleiche erste mit zweiter Karte. Wenn erste Karte größer, tausche die Karten.
- Vergleiche nun zweite mit dritter Karte, usw...

Mögliche Lösungen

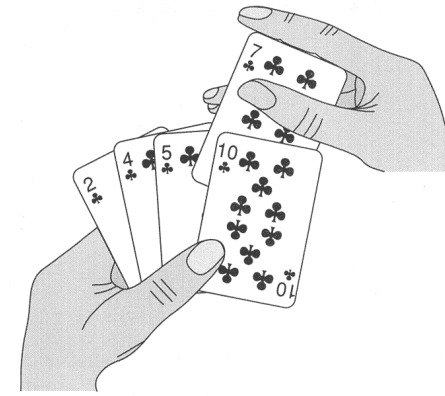
BUBBLESORT



- Linke Hand hält **alle Karten**.
- Vergleiche erste mit zweiter Karte. Wenn erste Karte größer, tausche die Karten.
- Vergleiche nun zweite mit dritter Karte, usw...
- Beginne wieder von vorne und wiederhole, **bis Karten in linker Hand sortiert**.

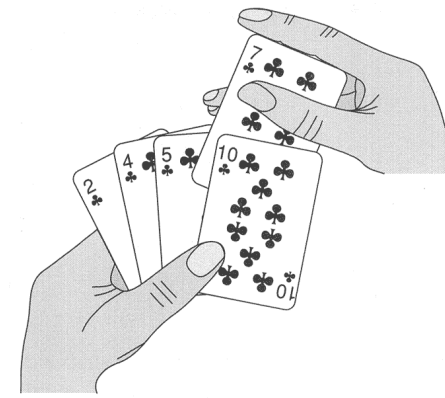
Mögliche Lösungen

BOGOSORT



Mögliche Lösungen

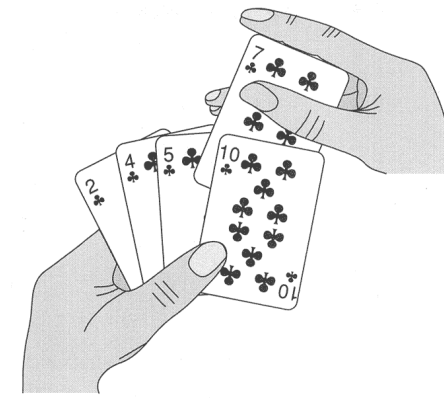
BOGOSORT



Mögliche Lösungen

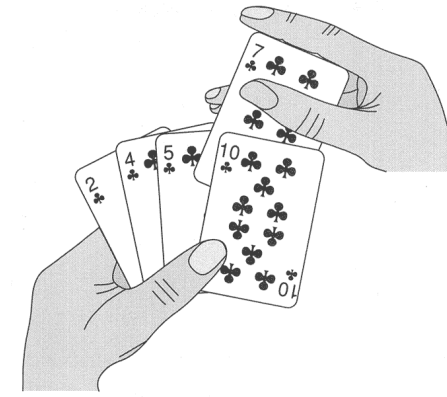
BOGOSORT

- Linke Hand hält **alle Karten**.



Mögliche Lösungen

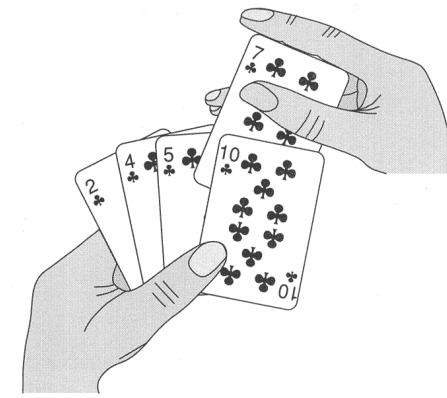
BOGOSORT



- Linke Hand hält **alle Karten**.
- Wirf Karten in die Luft und sammle sie in zufälliger Reihenfolge auf.

Mögliche Lösungen

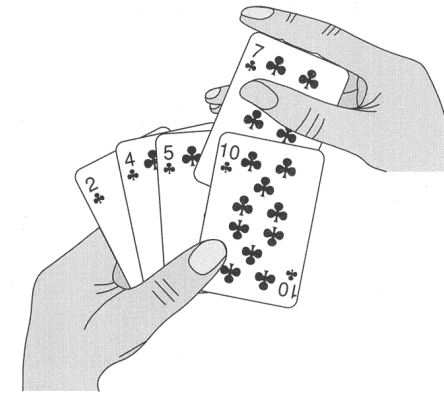
BOGOSORT



- Linke Hand hält **alle Karten**.
- Wirf Karten in die Luft und sammle sie in zufälliger Reihenfolge auf.
- Wenn Karten nicht sortiert, beginne wieder von vorne.

Mögliche Lösungen

BOGOSORT



- Linke Hand hält **alle Karten**.
- Wirf Karten in die Luft und sammle sie in zufälliger Reihenfolge auf.
- Wenn Karten nicht sortiert, beginne wieder von vorne.
- Beginne wieder von vorne und wiederhole, **bis Karten in linker Hand sortiert**.

Mögliche Lösungen

INSERTIONSORT

- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten nacheinander auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige Position zwischen die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.



SELECTIONSORT

- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand sucht kleinste Karte und nimmt sie in die linke Hand
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

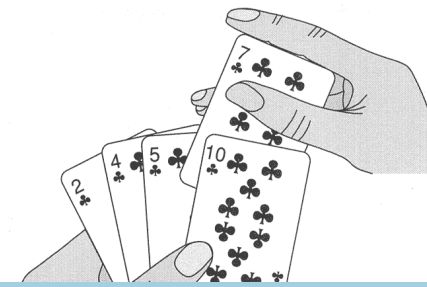
BUBBLESORT

- Linke Hand hält **alle Karten**
- Vergleiche erste mit zweiter Karte. Wenn erste Karte größer, tausche die Karten.
- Vergleiche nun zweite mit dritter Karte, usw...
- Beginne wieder von vorne und wiederhole, **bis Karten in linker Hand sortiert**.

BOGOSORT

- Linke Hand hält **alle Karten**
- Wirf Karten in die Luft und sammle sie in zufälliger Reihenfolge auf.
- Wenn Karten nicht sortiert, beginne wieder von vorne.
- Beginne wieder von vorne und wiederhole, **bis Karten in linker Hand sortiert**.

Mögliche Lösungen



INSERTIONSORT

- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten nacheinander auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige Position zwischen die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

SELECTIONSORT

- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand such kleinste Karte und nimmt sie in die linke Hand
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

BUBBLESORT

- Linke Hand hält **alle Karten**
- Vergleiche erste mit zweiter Karte. Wenn erste Karte größer, tausche die Karten.
- Vergleiche nun zweite mit dritter Karte, usw...
- Beginne wieder von vorne und wiederhole, **bis Karten in linker Hand sortiert**.

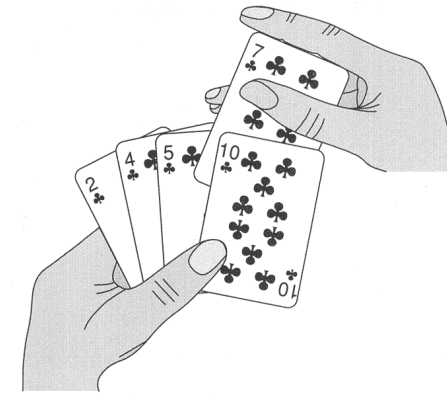
BOGOSORT

- Linke Hand hält **alle Karten**
- Wirf Karten in die Luft und sammle sie in zufälliger Reihenfolge auf.
- Wenn Karten nicht sortiert, beginne wieder von vorne.
- Beginne wieder von vorne und wiederhole, **bis Karten in linker Hand sortiert**.

Inkrementelle Algorithmen

Inkrementeller Algorithmus

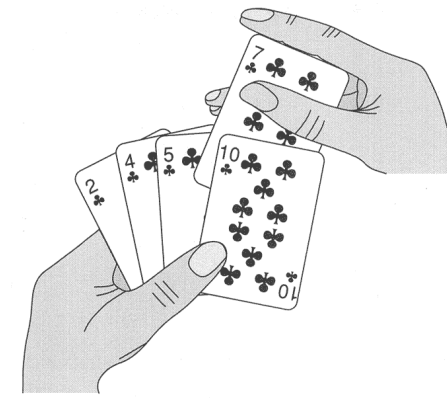
INSERTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten nacheinander auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige Position zwischen die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

Inkrementeller Algorithmus

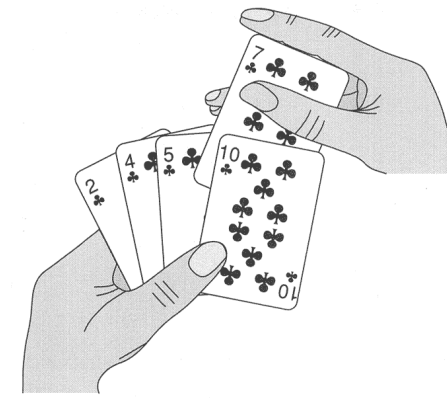
INSERTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten **nacheinander** auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige Position zwischen die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

Inkrementeller Algorithmus

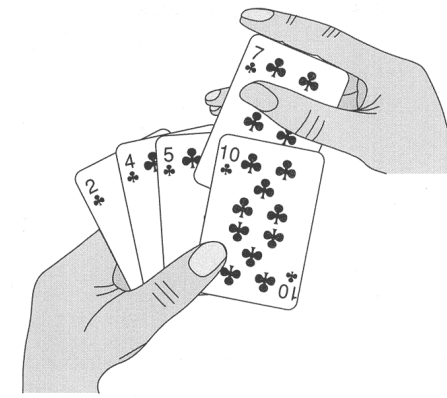
INSERTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten **nacheinander** auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige **Position zwischen** die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

Inkrementeller Algorithmus

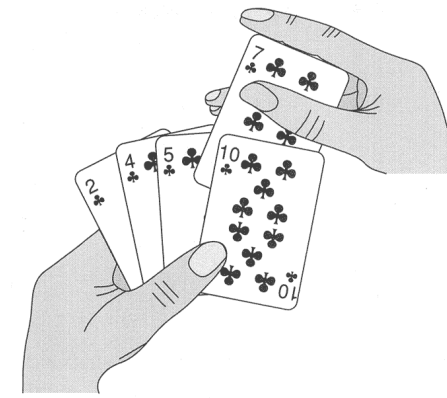
INSERTIONSORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten **nacheinander** auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige **Position zwischen** die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

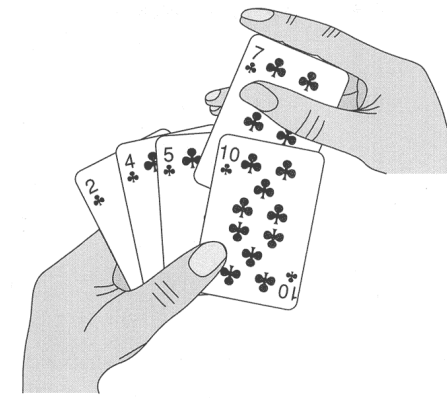


- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten **nacheinander** auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige **Position zwischen** die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

Invariante

Inkrementeller Algorithmus

INSERTION SORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten **nacheinander** auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige **Position zwischen** die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

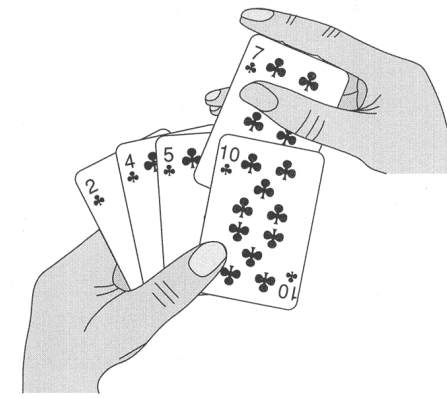
Invariante



Korrektheit

Inkrementeller Algorithmus

INSERTION SORT



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten **nacheinander** auf und steckt sie (von rechts kommend) an die richtige **Position zwischen** die Karten in der linken Hand.
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

Invariante



Korrektheit: am Ende sind alle Karten in der linken Hand – und zwar **sortiert!**

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

```
INCREMENTALALG( array of ...  $A$  )
```

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

Name des Alg.

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

Name des Alg.

Eingabe

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

Typ der Eingabe (hier ein Feld von ...)

INCREMENTALALG(array of ... A)

Name des Alg.

Eingabe

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

Name des Alg.

Eingabe

Variable

Typ der Eingabe (hier ein Feld von ...)

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

```
INCREMENTALALG( array of ...  $A$  )
```

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

```
INCREMENTALALG( array of ...  $A$  )
```

```
    berechne Lösung für  $A[1]$ 
```

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

```
INCREMENTALALG( array of ...  $A$  )
```

```
    berechne Lösung für  $A[1]$            // Initialisierung
```

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

```
INCREMENTALALG( array of ...  $A$  )
```

```
    berechne Lösung für  $A[1]$            // Initialisierung
```

```
    for  $j = 2$  to  $A.length$  do
```

```
        |
```

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

```
INCREMENTALALG( array of ...  $A$  )
```

```
    berechne Lösung für  $A[1]$            // Initialisierung
```

```
    for  $j = 2$  to  $A.length$  do       // Schleifenkopf
```

```
        |
```

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$

// Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// Schleifenkopf

Zuweisungsoperator

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf

Zuweisungsoperator

■ in manchen Sprachen $j := 2$

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf

Zuweisungsoperator

■ in manchen Sprachen $j := 2$

■ in manchen Büchern $j \leftarrow 2$

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$

// Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// Schleifenkopf

Zuweisungsoperator

- in manchen Sprachen $j := 2$
- in manchen Büchern $j \leftarrow 2$
- in Java $j = 2$

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für Anzahl der Elemente des Feldes A

for $j = 2$ to $A.length$ do // Schleifenkopf

Zuweisungsoperator

- in manchen Sprachen $j := 2$
- in manchen Büchern $j \leftarrow 2$
- in Java $j = 2$

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf

 // Schleifenkörper; wird $(A.length - 1)$ -mal durchlaufen

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf

 // Schleifenkörper; wird $(A.length - 1)$ -mal durchlaufen

 berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf

 // Schleifenkörper; wird $(A.length - 1)$ -mal durchlaufen

 berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

Teilarray von A mit den Elementen $A[1], A[2], \dots, A[j]$

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf

 // Schleifenkörper; wird $(A.length - 1)$ -mal durchlaufen

 berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

Teilarray von A mit den Elementen $A[1], A[2], \dots, A[j]$

return Lösung

Inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

INCREMENTALALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$ // Initialisierung

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do** // Schleifenkopf

 // Schleifenkörper; wird $(A.length - 1)$ -mal durchlaufen

 berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

Teilarray von A mit den Elementen $A[1], A[2], \dots, A[j]$

return Lösung // Ergebnissrückgabe

Inkrementeller Algorithmus

```
INCREMENTALALG( array of ...  $A$  )
```

```
    berechne Lösung für  $A[1]$ 
```

```
    for  $j = 2$  to  $A.length$  do
```

```
        |  
        berechne Lösung für  $A[1 \dots j]$  mithilfe der für  $A[1 \dots j - 1]$ 
```

```
    return Lösung
```

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTAL~~ALG(array of ... A)

berechne Lösung für $A[1]$

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

 |
 | berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

return Lösung

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTAL~~ALG(array of **int** A)

berechne Lösung für $A[1]$

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

 |
 |
 | berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

return Lösung

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTAL~~ALG(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

berechne Lösung für $A[1]$

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

 |
 | berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

return Lösung

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

 berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

return Lösung

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

```
INCREMENTALALG( array of int A ) // Schreiben wir künftig so: int[] A  
    berechne Lösung für A[1] // nix zu tun: A[1 ... 1] ist sortiert  
    for j = 2 to A.length do  
        // berechne Lösung für A[1 ... j] mithilfe der für A[1 ... j - 1]  
        ... kommt noch ...  
  
    return Lösung
```

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

```
INCREMENTALALG( array of int A ) // Schreiben wir künftig so: int[] A  
  
  berechne Lösung für A[1] // nix zu tun: A[1...1] ist sortiert  
  
  for j = 2 to A.length do  
    // berechne Lösung für A[1...j] mithilfe der für A[1...j - 1]  
    ... kommt noch ...  
  
  return Lösung // nicht nötig – das aufrufende Programm  
                    hat Zugriff auf das sortierte Feld A
```

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

 // berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

 // hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTAL~~ALG(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

2	4	4	7	3	1	8	6
---	---	---	---	---	---	---	---

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTAL~~ALG(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

2	4	4	7	3	1	8	6
---	---	---	---	---	---	---	---

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

2	4	4	7	3	1	8	6
---	---	---	---	---	---	---	---

1

j

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

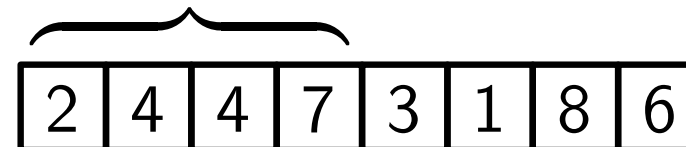
~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$A[1 \dots j - 1]$



1

j

Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

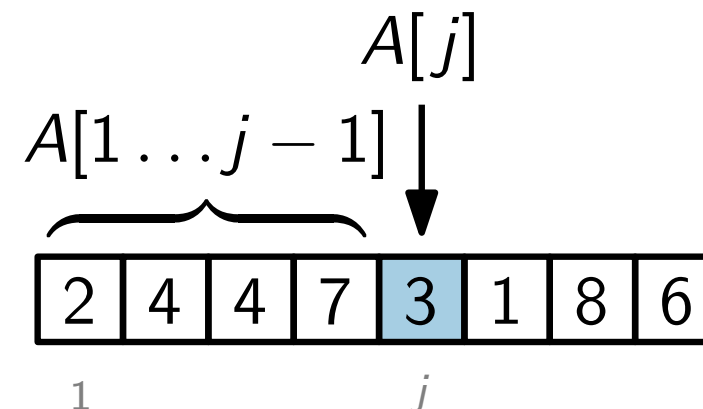
~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

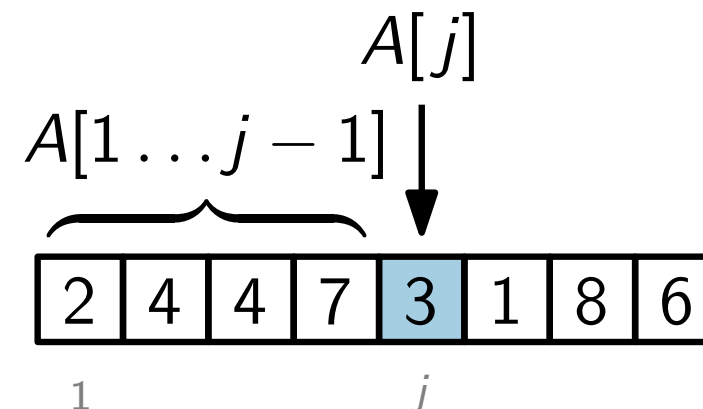
~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

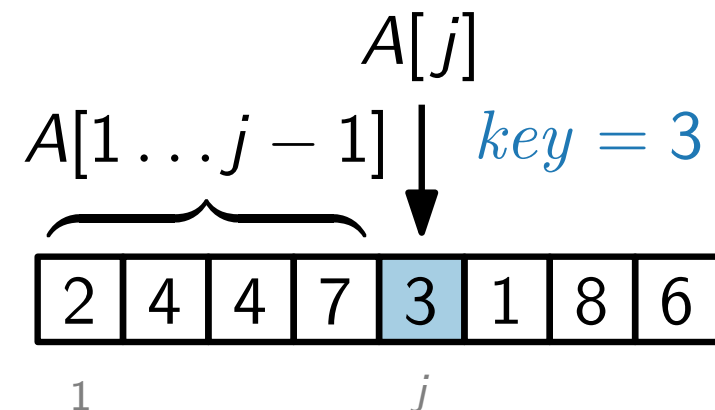
~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

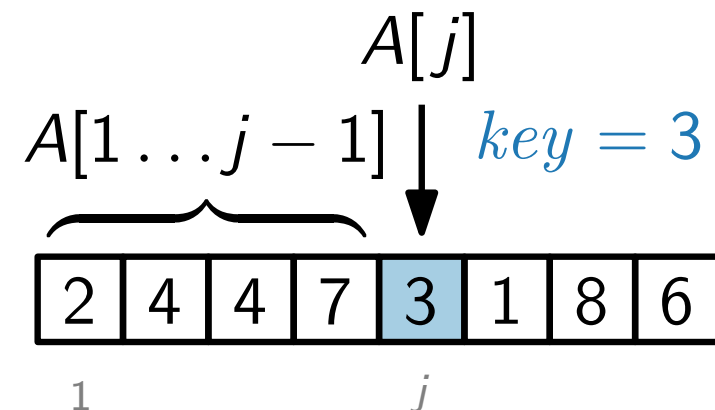
for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

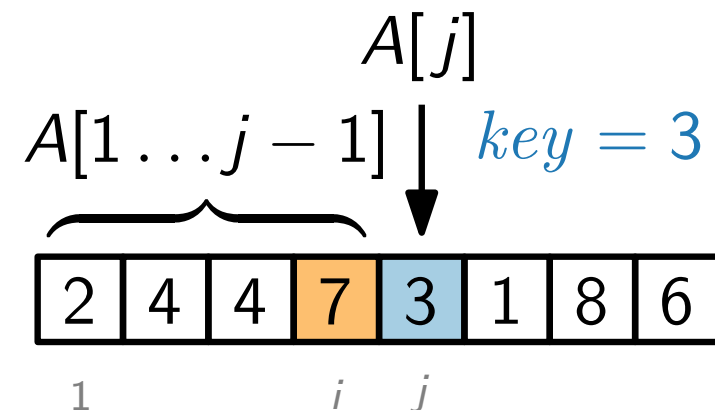
for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

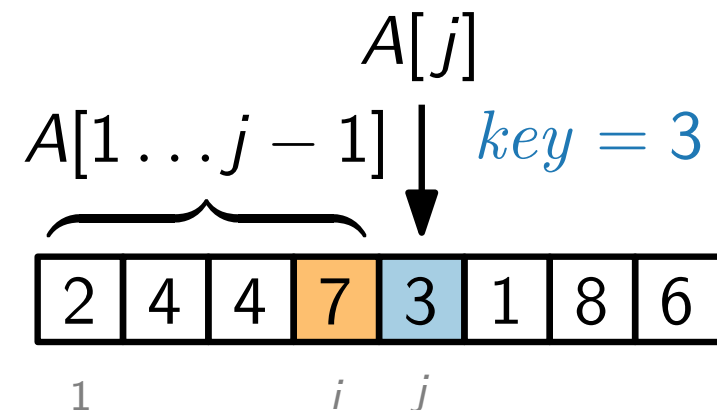
// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

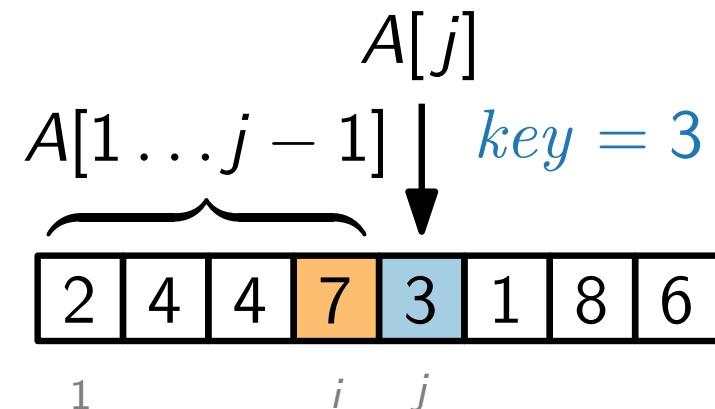
// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

Wie verschieben wir die Einträge größer key nach rechts?



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

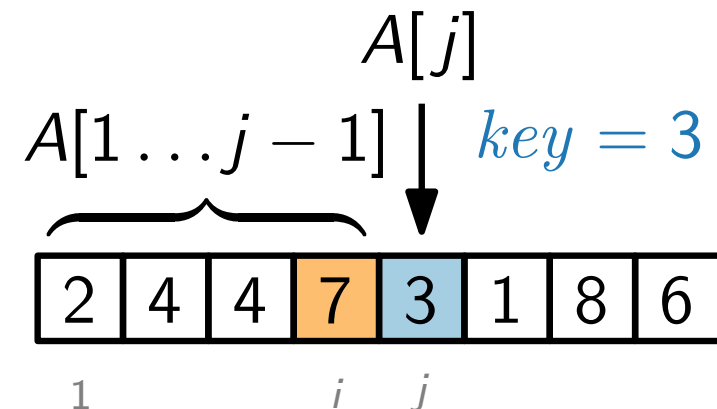
// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

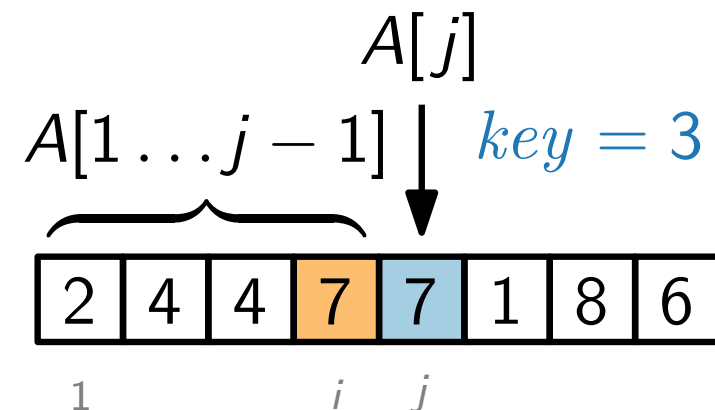
// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

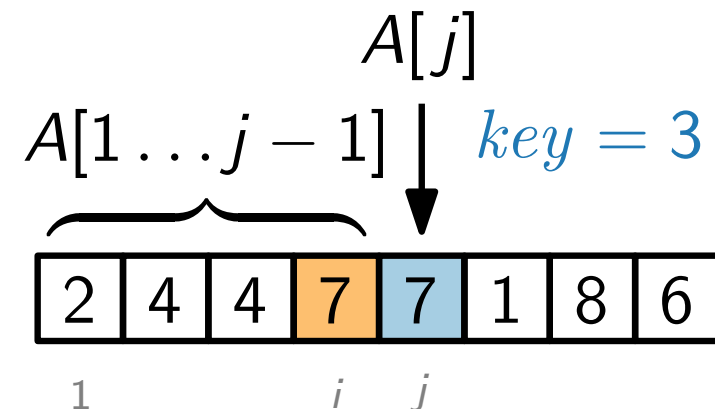
$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

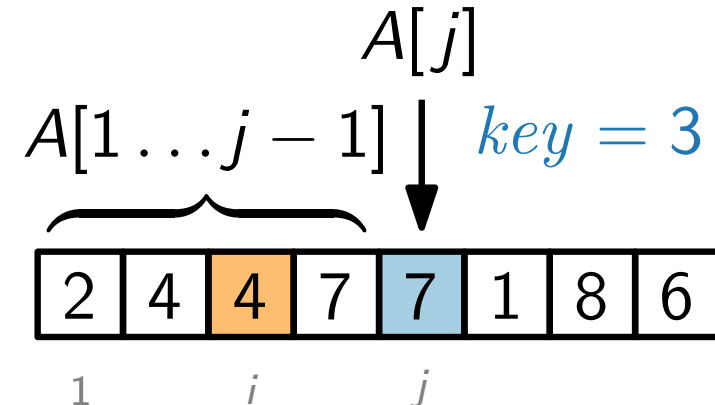
$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

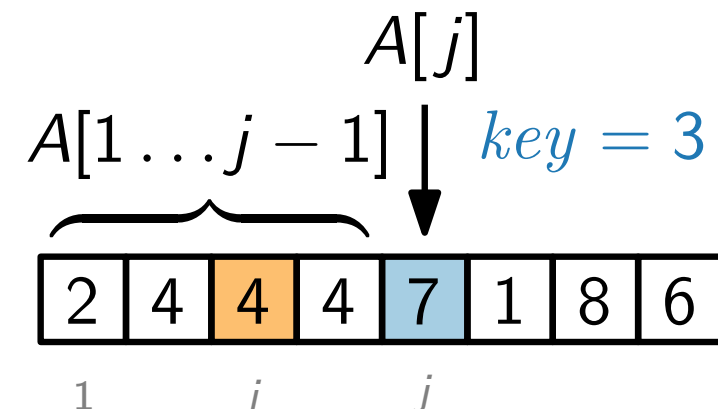
$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

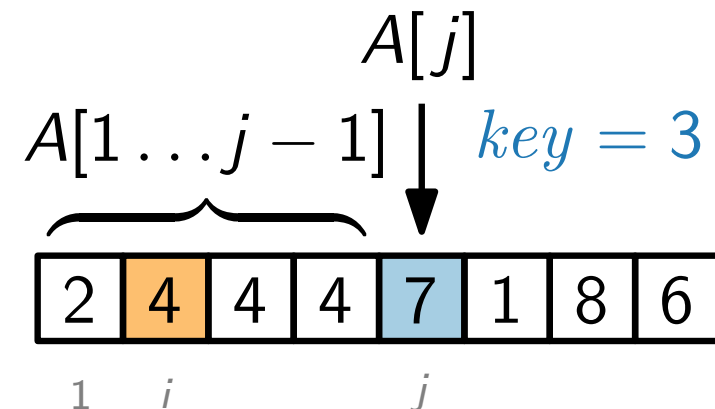
$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

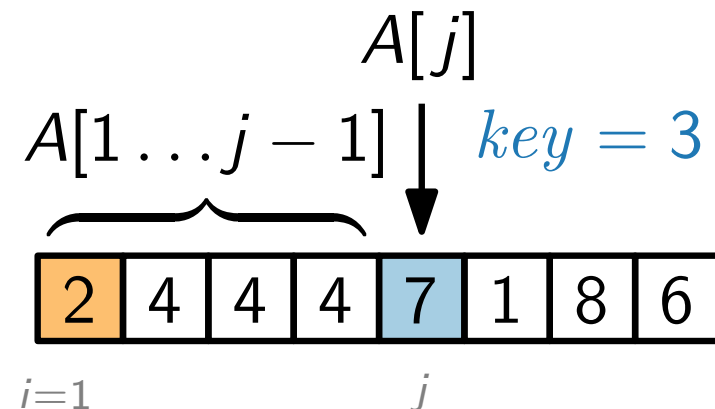
$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

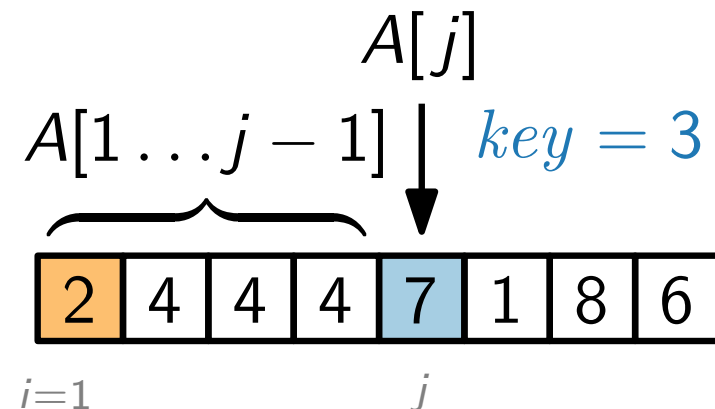
$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$

$A[i + 1] = key$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

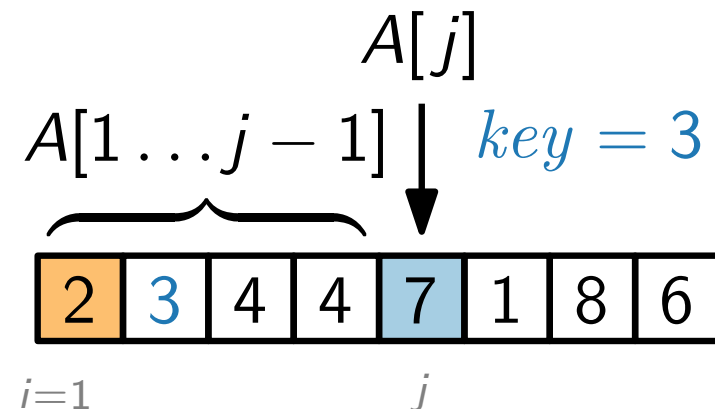
$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$

$A[i + 1] = key$



Inkrementeller Algorithmus

INSERTIONSORT

~~INCREMENTALALG~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int**[] A

~~berechne Lösung für $A[1]$~~ // nix zu tun: $A[1 \dots 1]$ ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für $A[1 \dots j]$ mithilfe der für $A[1 \dots j - 1]$

// hier: füge $A[j]$ in die sortierte Folge $A[1 \dots j - 1]$ ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

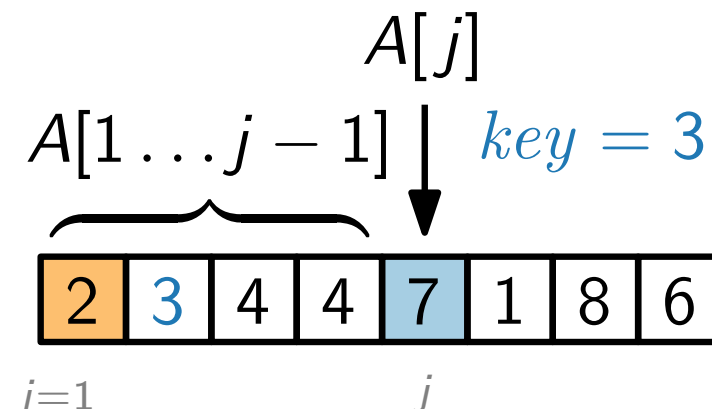
$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$

$A[i + 1] = key$

Demo.

<https://algo.uni-trier.de/demos/sort.html>



Fertig?

Fertig?

Nicht ganz...

Wir interessieren uns heute (und im Rest dieser Vorlesung) für folgende zentrale Fragen:

Fertig?

Nicht ganz...

Wir interessieren uns heute (und im Rest dieser Vorlesung) für folgende zentrale Fragen:

- Ist der Algorithmus korrekt?

Fertig?

Nicht ganz...

Wir interessieren uns heute (und im Rest dieser Vorlesung) für folgende zentrale Fragen:

- Ist der Algorithmus korrekt?
- Welche Laufzeit hat der Algorithmus?

Fertig?

Nicht ganz...

Wir interessieren uns heute (und im Rest dieser Vorlesung) für folgende zentrale Fragen:

- Ist der Algorithmus korrekt?
- Welche Laufzeit hat der Algorithmus?
- Wie viel Speicherplatz benötigt der Algorithmus?

Fertig?

Nicht ganz...

Wir interessieren uns heute (und im Rest dieser Vorlesung) für folgende zentrale Fragen:

- Ist der Algorithmus korrekt?
- Welche Laufzeit hat der Algorithmus?
- Wie viel Speicherplatz benötigt der Algorithmus?

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Idee der **Schleifeninvariante**:

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Idee der **Schleifeninvariante**:

Wo?

Was?

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

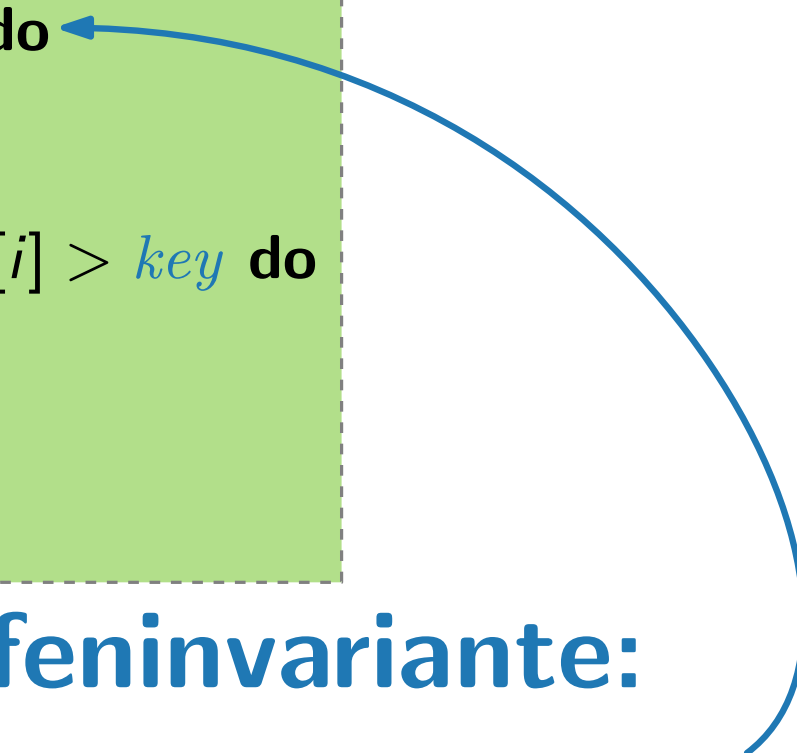
Idee der **Schleifeninvariante**:

Wo? am Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife...

Was?

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```



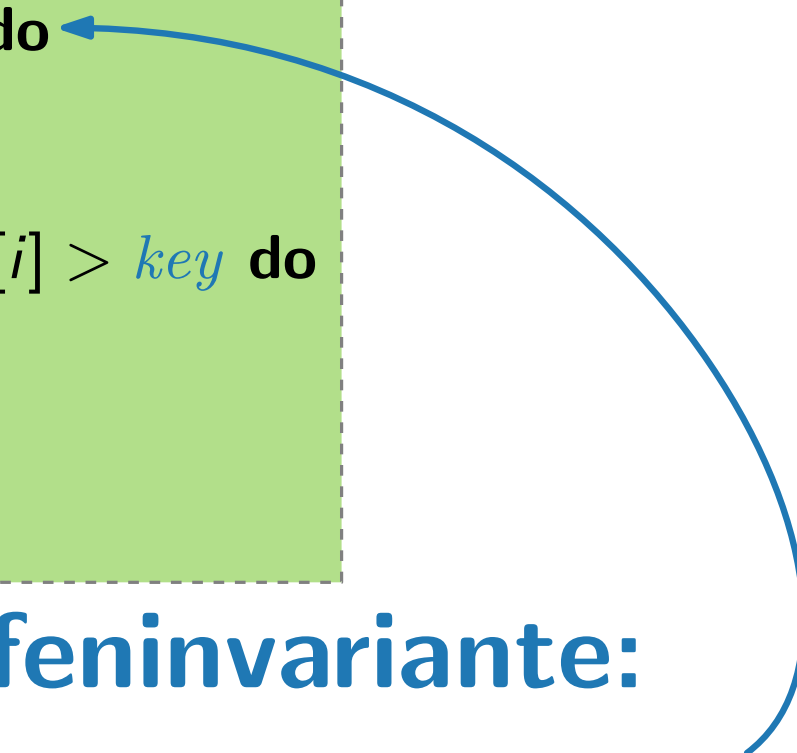
Idee der **Schleifeninvariante:**

Wo? am Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife...

Was?

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```



Idee der **Schleifeninvariante:**

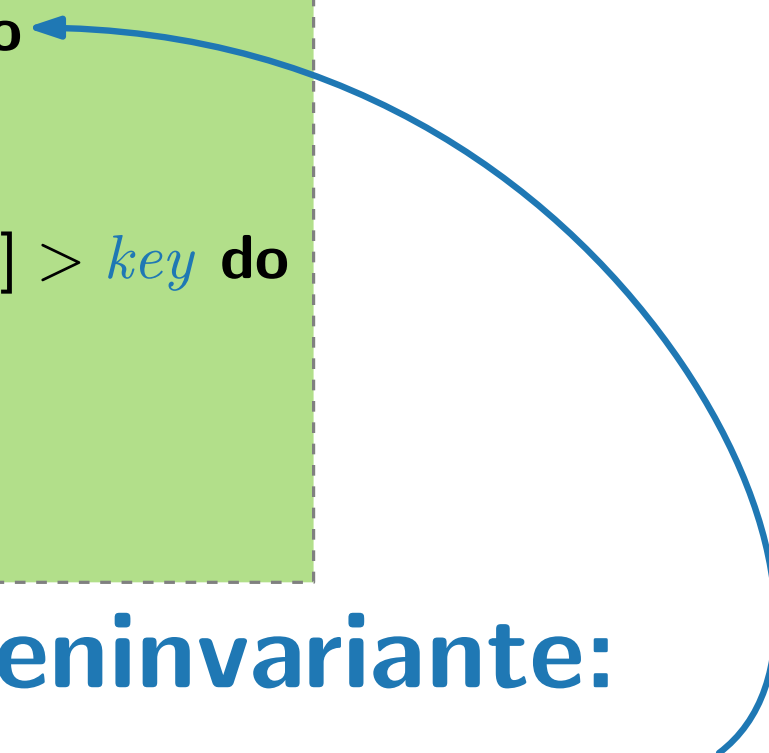
Wo? am Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife...

Was?



Korrektheit *beweisen*

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```



Idee der **Schleifeninvariante**:

Wo? am Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife...

Was? **WANTED:** Bedingung, die
a) an dieser Stelle immer erfüllt ist und
b) bei Abbruch der Schleife Korrektheit liefert

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$



Idee der **Schleifeninvariante**:

Wo? am Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife...

Was? **WANTED:** Bedingung, die
a) an dieser Stelle immer erfüllt ist und
b) bei Abbruch der Schleife Korrektheit liefert

Korrektheit *beweisen*

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Idee der **Schleifeninvariante**:

Wo? am Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife...

Was?

WANTED: Bedingung, die
a) an dieser Stelle immer erfüllt ist und
b) bei Abbruch der Schleife Korrektheit liefert

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Idee der Schleifeninvariante:

Wo? am Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife...

Was? **WANTED:** Bedingung, die
a) an dieser Stelle immer erfüllt ist und
b) bei Abbruch der Schleife Korrektheit liefert

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do ←
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do ←
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do ←
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier:

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do ←
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:
 $A[1 \dots j - 1] = A[1 \dots 1]$ ist unverändert und sortiert.

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do ←
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier:

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Eigentlich: Invariante für **while**-Schleife aufstellen und beweisen!

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```

INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: **Beob.** Elemente werden so lange nach rechts geschoben wie nötig. key wird korrekt eingefügt.

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```

INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: **Beob.** Elemente werden so lange nach rechts geschoben wie nötig. key wird korrekt eingefügt.

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Korrektheit *beweisen*

```

INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Schleifeninvariante

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Zusammengekommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier:

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```

INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 

```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung ist $j > A.length$.

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```

INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung ist $j > A.length$.
D.h. $j = A.length + 1$.

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```

INSERTSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Zusammengekommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung ist $j > A.length$.
D.h. $j = A.length + 1$. Einsetzen in Invariante

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```

INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung ist $j > A.length$.
D.h. $j = A.length + 1$. Einsetzen in Invariante $\Rightarrow$ Algorithmus korrekt!

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```

INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung ✓

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung ist $j > A.length$.
D.h. $j = A.length + 1$. Einsetzen in Invariante $\Rightarrow$ Algorithmus korrekt!

Korrektheit *beweisen*

Schleifeninvariante

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Hier enthält $A[1 \dots j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) Initialisierung

2.) Aufrechterhaltung

3.) Terminierung

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

Zur Erinnerung: k Fakultät = $k! =$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    |
  return f
```

Was fehlt hier?
Füllen Sie die Lücke!

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int  $k$ )  
  if  $k < 0$  then error(...)  
   $f = 1$   
   $j = 2$   
  while  $j \leq k$  do  
     $f = f \cdot j$   
     $j = j + 1$   
  return  $f$ 
```

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ...

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if  $k < 0$  then error(...)
   $f = 1$ 
   $j = 2$ 
  while  $j \leq k$  do
     $f = f \cdot j$ 
     $j = j + 1$ 
  return  $f$ 
```

Korrekt?

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Dann ist $j > k$.

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Dann ist $j > k$. Da $j = 2 \Rightarrow$

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Dann ist $j > k$. Da $j = 2 \Rightarrow$
 $k = 0$ oder $k = 1$. Also $k! =$

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ...

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Dann ist $j > k$. Da $j = 2 \Rightarrow$
 $k = 0$ oder $k = 1$. Also $k! = 1$.

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Dann ist $j > k$. Da $j = 2 \Rightarrow$
 $k = 0$ oder $k = 1$. Also $k! = 1$.

Rückgabewert ist $f = 1$.

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Dann ist $j > k$. Da $j = 2 \Rightarrow$

$k = 0$ oder $k = 1$. Also $k! = 1$.

Rückgabewert ist $f = 1$. $\Rightarrow$ Korrekt.

Zur Erinnerung: k Fakultät $= k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\dots$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int  $k$ )
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

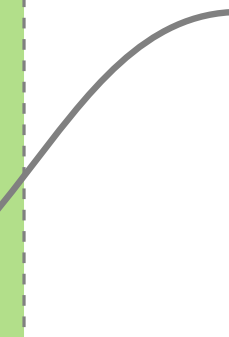
```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

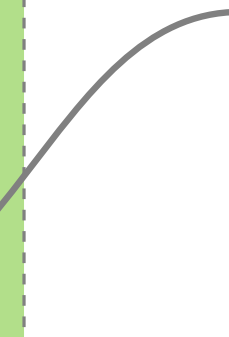
Schleifeninvariante:



Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if  $k < 0$  then error(...)
   $f = 1$ 
   $j = 2$ 
  while  $j \leq k$  do
     $f = f \cdot j$ 
     $j = j + 1$ 
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$


Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if  $k < 0$  then error(...)
   $f = 1$ 
   $j = 2$ 
  while  $j \leq k$  do
     $f = f \cdot j$ 
     $j = j + 1$ 
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier:

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int  $k$ )
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:
 $f =$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:

$$f = (2 - 1)! = 1! = 1$$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:
 $f = (2 - 1)! = 1! = 1$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier:

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **Invariante**, d.h. $f = (j - 1)!$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **Invariante**, d.h. $f = (j - 1)!$
Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **Invariante**, d.h. $f = (j - 1)!$
Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow f = j!$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **Invariante**, d.h. $f = (j - 1)!$

Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow f = j!$

Dann wird j um 1 erhöht $\Rightarrow$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **Invariante**, d.h. $f = (j - 1)!$

Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow f = j!$

Dann wird j um 1 erhöht $\Rightarrow f = (j - 1)!$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **Invariante**, d.h. $f = (j - 1)!$
Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow f = j!$
Dann wird j um 1 erhöht $\Rightarrow f = (j - 1)! \Rightarrow$ **Invariante**

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **Invariante**, d.h. $f = (j - 1)!$
Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow f = j!$
Dann wird j um 1 erhöht $\Rightarrow f = (j - 1)! \Rightarrow$ **Invariante**

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Algo terminiert.

Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier:

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Algo terminiert.

Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Algo terminiert, da j in jedem Durchlauf erhöht wird.

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Algo terminiert.

Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Algo terminiert, da j in jedem Durchlauf erhöht wird.

Verletzte Schleifenbedingung: $j > k$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Algo terminiert.

Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Algo terminiert, da j in jedem Durchlauf erhöht wird.

Verletzte Schleifenbedingung: $j > k$, also $j = k + 1$.

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Algo terminiert.

Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Algo terminiert, da j in jedem Durchlauf erhöht wird.

Verletzte Schleifenbedingung: $j > k$, also $j = k + 1$.

Einsetzen von „ $j = k + 1$ “ in **Invariante** liefert

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Algo terminiert.

Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Algo terminiert, da j in jedem Durchlauf erhöht wird.

Verletzte Schleifenbedingung: $j > k$, also $j = k + 1$.

Einsetzen von „ $j = k + 1$ “ in **Invariante** liefert $f = k!$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung

Zeige: Algo terminiert.

Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Algo terminiert, da j in jedem Durchlauf erhöht wird.

Verletzte Schleifenbedingung: $j > k$, also $j = k + 1$.

Einsetzen von „ $j = k + 1$ “ in **Invariante** liefert $f = k! \Rightarrow$ Algorithmus korrekt!

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung ✓

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
FACTORIAL(int k)
```

```
  if  $k < 0$  then error(...)
```

```
   $f = 1$ 
```

```
   $j = 2$ 
```

```
  while  $j \leq k$  do
```

```
     $f = f \cdot j$ 
```

```
     $j = j + 1$ 
```

```
  return  $f$ 
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓ 2.) Aufrechterhaltung ✓ 3.) Terminierung ✓

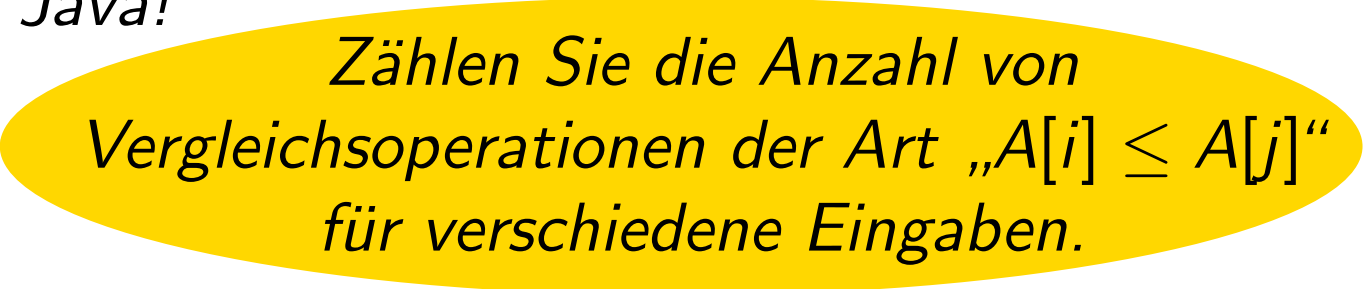
Der Algorithmus FACTORIAL(int) terminiert und liefert das korrekte Ergebnis.

Selbstkontrolle

- *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*

Selbstkontrolle

- *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*



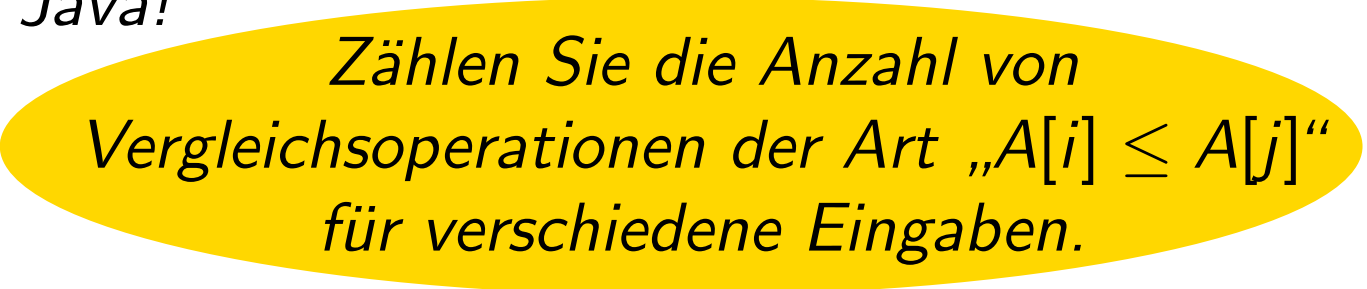
Zählen Sie die Anzahl von Vergleichsoperationen der Art „ $A[i] \leq A[j]$ “ für verschiedene Eingaben.

Selbstkontrolle

■ *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*

■ *Lesen Sie Kapitel 1 und Anhang A des Buchs von*

Cormen et al. durch und machen Sie dazu so viel Übungsaufgaben wie möglich!



Zählen Sie die Anzahl von Vergleichsoperationen der Art „ $A[i] \leq A[j]$ “ für verschiedene Eingaben.

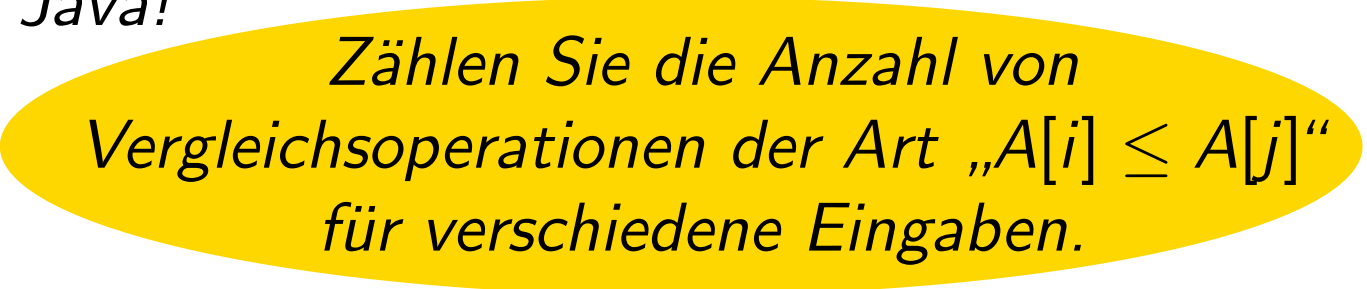
Selbstkontrolle

■ *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*

■ *Lesen Sie Kapitel 1 und Anhang A des Buchs von*

Cormen et al. durch und machen Sie dazu so viel Übungsaufgaben wie möglich!

■ *Bringen Sie Fragen in die Übung mit!*



Zählen Sie die Anzahl von Vergleichsoperationen der Art „ $A[i] \leq A[j]$ “ für verschiedene Eingaben.

Selbstkontrolle

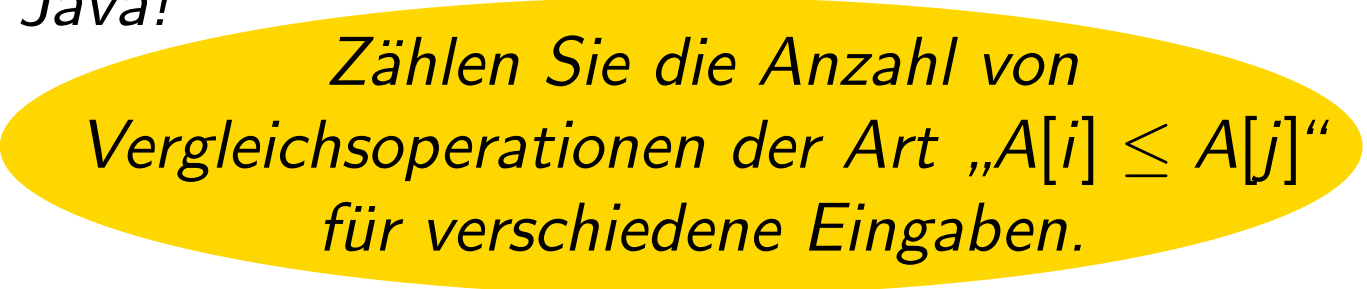
- *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*

- *Lesen Sie Kapitel 1 und Anhang A des Buchs von*

Cormen et al. durch und machen Sie dazu so viel Übungsaufgaben wie möglich!

- *Bringen Sie Fragen in die Übung mit!*

- *Bleiben Sie von Anfang an am Ball!*



Zählen Sie die Anzahl von Vergleichsoperationen der Art „ $A[i] \leq A[j]$ “ für verschiedene Eingaben.

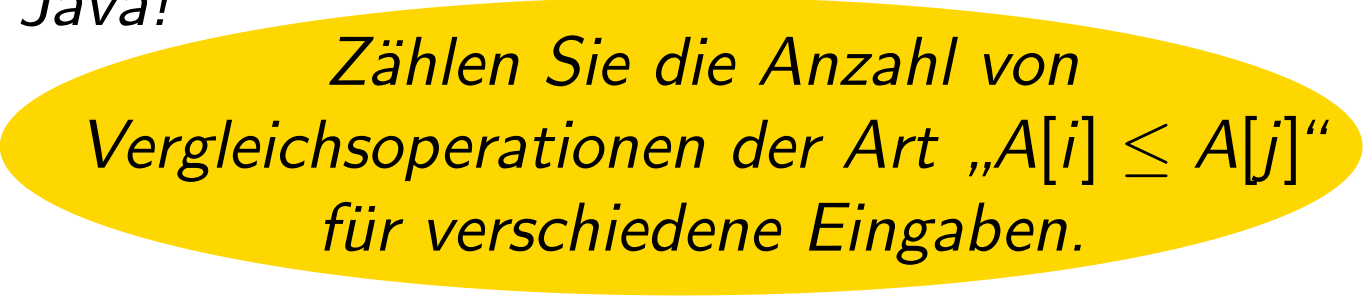
Selbstkontrolle

■ *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*

■ *Lesen Sie Kapitel 1 und Anhang A des Buchs von*

Cormen et al. durch und machen Sie dazu so viel Übungsaufgaben wie möglich!

Zählen Sie die Anzahl von Vergleichsoperationen der Art „ $A[i] \leq A[j]$ “ für verschiedene Eingaben.



■ *Bringen Sie Fragen in die Übung mit!*

■ *Bleiben Sie von Anfang an am Ball!*

■ *Schreiben Sie sich in die Vorlesung ein:*

- wuecampus2.uni-wuerzburg.de
- wuestudy.zv.uni-wuerzburg.de