

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

13. Vorlesung

## PageRank und Power-Methode

Text siehe

<https://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/RalucaRemus/Lecture3/lecture3.html>

# Internet-Suche



Google Search

I'm Feeling Lucky

# Internet-Suche



Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

Images

Maps

Videos

News

Shopping

Books

More

[java.com: Java + You](#)

[www.java.com/](#)

Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)

This page is your source to download or update your ...

[Which Java download should I ...](#)

Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[How do I test whether Java is ...](#)

See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[What is Java?](#)

What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

[More results from java.com »](#)

Würzburg

Change location

Show search tools

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(programming\\_language\)](#)

**Java** is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java](#)

**Java** (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(software\\_platform\)](#)

**Java** is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

# Internet-Suche



Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

Images

Maps

Videos

News

Shopping

Books

More

[java.com: Java + You](#)

[www.java.com/](#)

Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)

This page is your source to download or update your ...

[Which Java download should I ...](#)

Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[How do I test whether Java is ...](#)

See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[What is Java?](#)

What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

[More results from java.com »](#)

Würzburg

Change location

Show search tools

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(programming\\_language\)](#)

**Java** is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java](#)

**Java** (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(software\\_platform\)](#)

**Java** is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

# Internet-Suche

Google

Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

Images

Maps

Videos

News

Shopping

Books

More

Würzburg

Change location

Show search tools

[java.com: Java + You](#)

[www.java.com/](#)

Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)

This page is your source to download or update your ...

[Which Java download should I ...](#)

Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[How do I test whether Java is ...](#)

See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[What is Java?](#)

What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

[More results from java.com »](#)

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(programming\\_language\)](#)

**Java** is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java](#)

**Java** (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(software\\_platform\)](#)

**Java** is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

Wie funktioniert das?

# Internet-Suche

Google

Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

Images

Maps

Videos

News

Shopping

Books

More

Würzburg

Change location

Show search tools

[java.com: Java + You](#)

[www.java.com/](#)

Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)

This page is your source to download or update your ...

[Which Java download should I ...](#)

Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[How do I test whether Java is ...](#)

See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[What is Java?](#)

What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

[More results from java.com »](#)

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(programming\\_language\)](#)

**Java** is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java](#)

**Java** (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(software\\_platform\)](#)

**Java** is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

Wie funktioniert das?  
– per Katalog?

# Internet-Suche



Press Enter to search.

---

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

Images

Maps

Videos

News

Shopping

Books

More

---

**Würzburg**

Change location

---

Show search tools

[java.com: Java + You](#)  
[www.java.com/](#)  
 Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)  
 This page is your source to download or update your ...

[Which Java download should I ...](#)  
 Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[How do I test whether Java is ...](#)  
 See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[What is Java?](#)  
 What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

[More results from java.com »](#)

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)  
[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(programming\\_language\)](#)  
**Java** is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)  
[en.wikipedia.org/wiki/Java](#)  
**Java** (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)  
[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(software\\_platform\)](#)  
**Java** is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

Wie funktioniert das?

- per Katalog?
- von Hand??

# Internet-Suche

Google

Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

Images

Maps

Videos

News

Shopping

Books

More

Würzburg

Change location

Show search tools

[java.com: Java + You](#)

[www.java.com/](#)

Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)

This page is your source to download or update your ...

[Which Java download should I ...](#)

Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[How do I test whether Java is ...](#)

See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[What is Java?](#)

What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

[More results from java.com »](#)

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(programming\\_language\)](#)

**Java** is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java](#)

**Java** (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

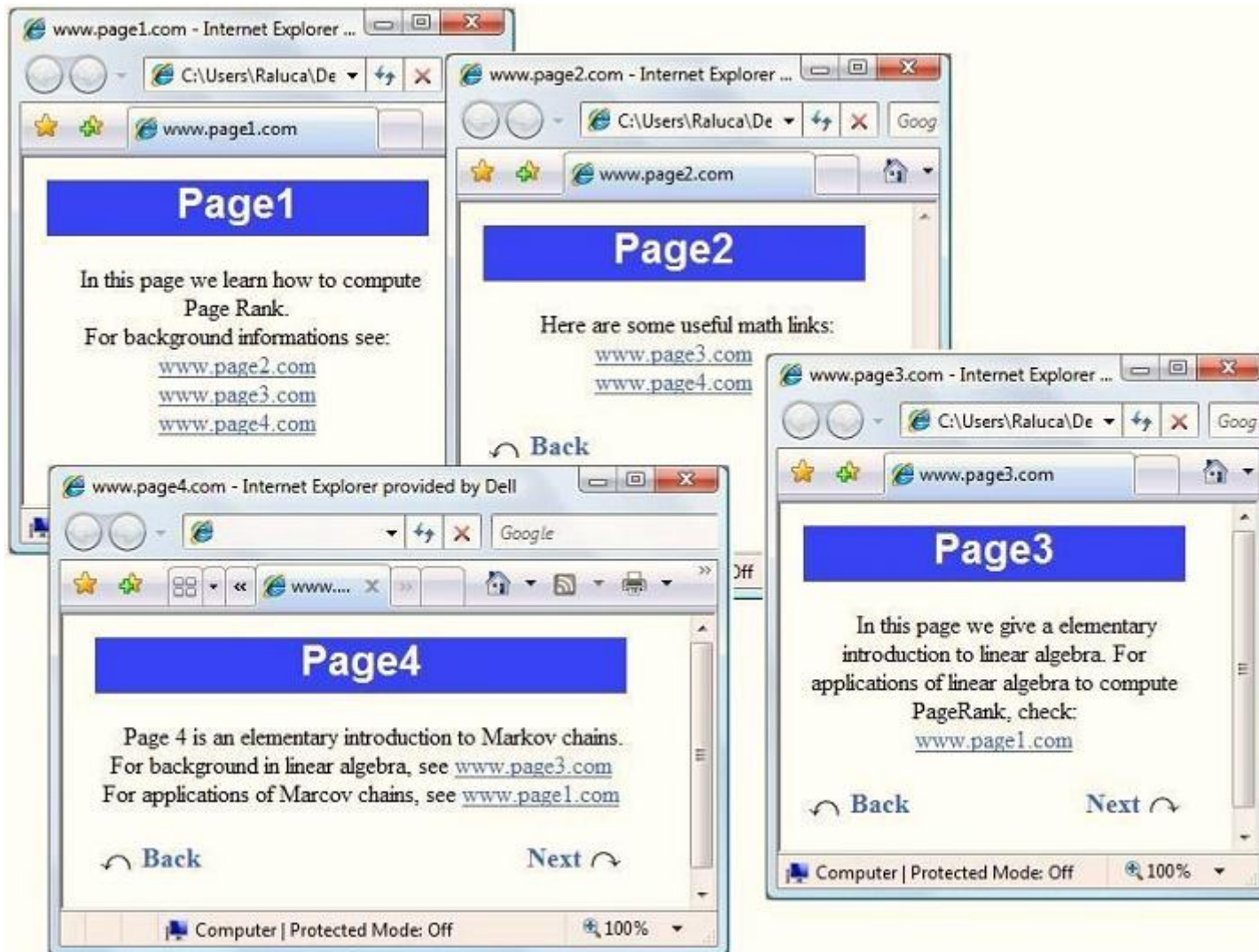
[en.wikipedia.org/wiki/Java\\_\(software\\_platform\)](#)

**Java** is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

Wie funktioniert das?

- per Katalog?
- von Hand??
- Graphentheorie???

# Ein Graphen-Modell



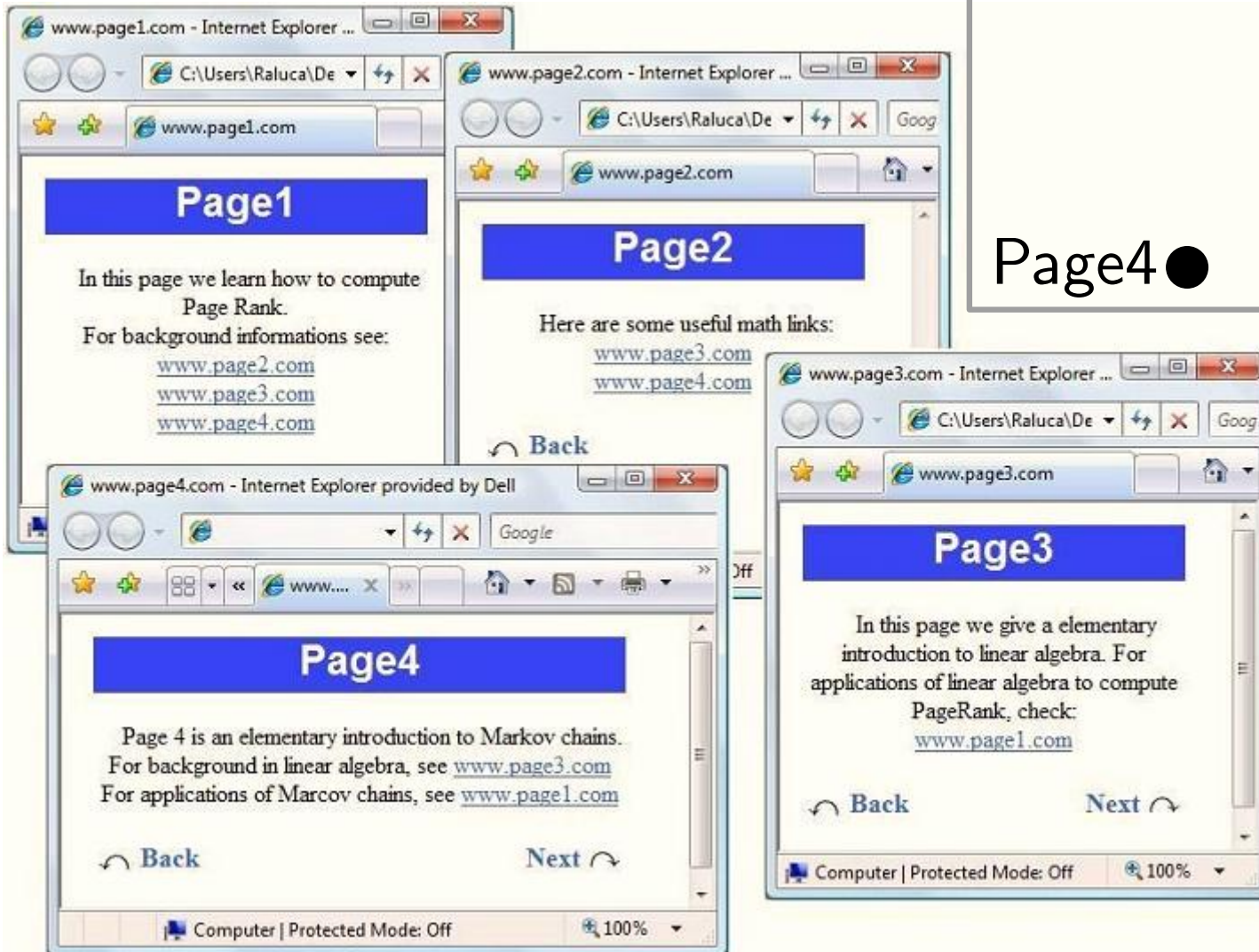
# Ein Graphen-Modell

Page1 ●

● Page2

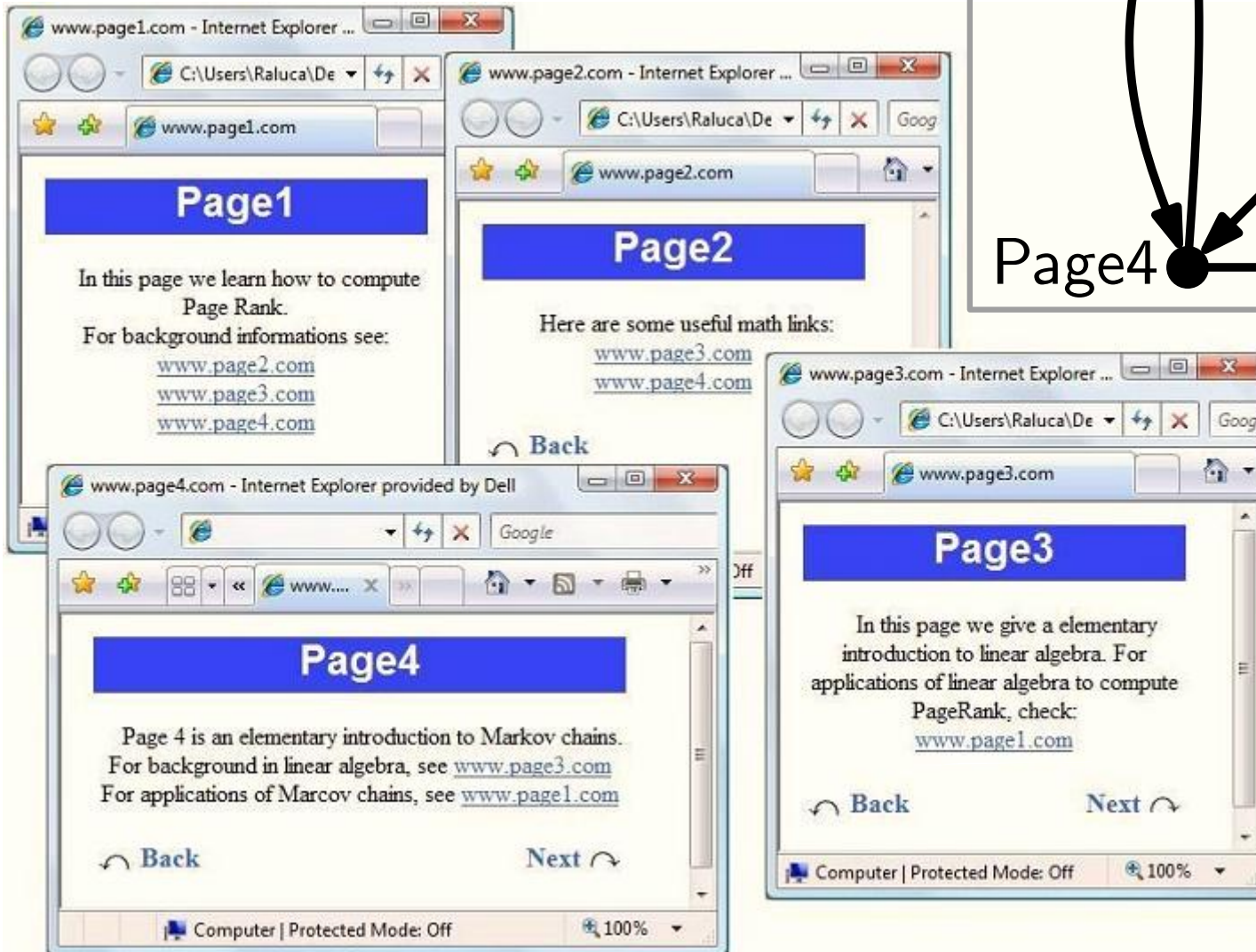
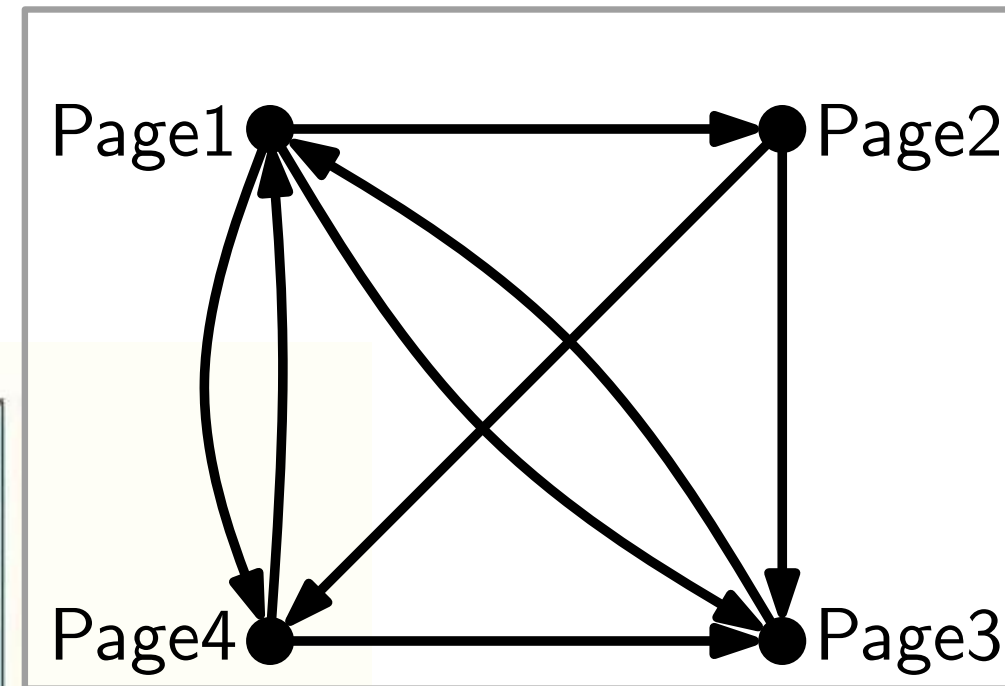
Page4 ●

● Page3



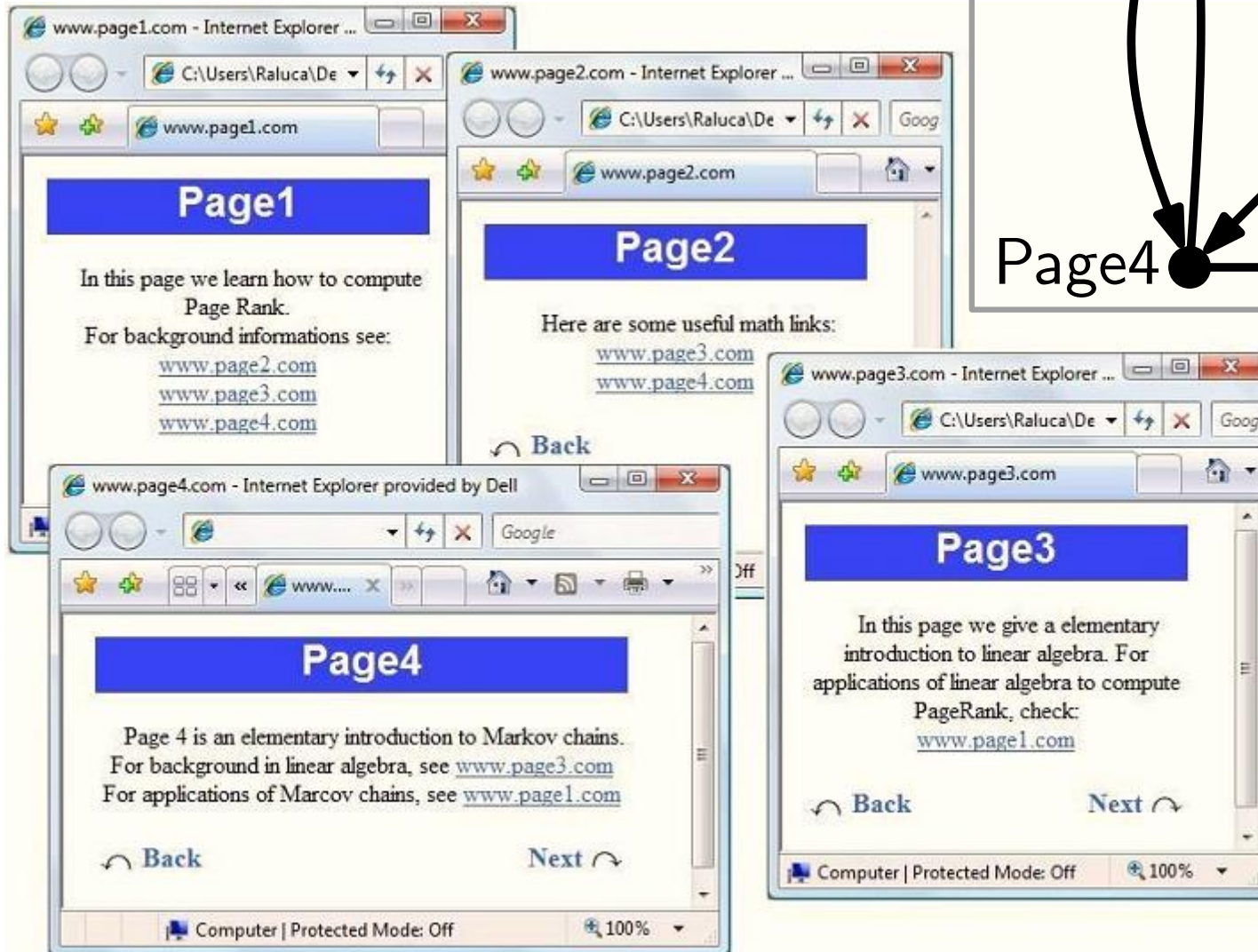
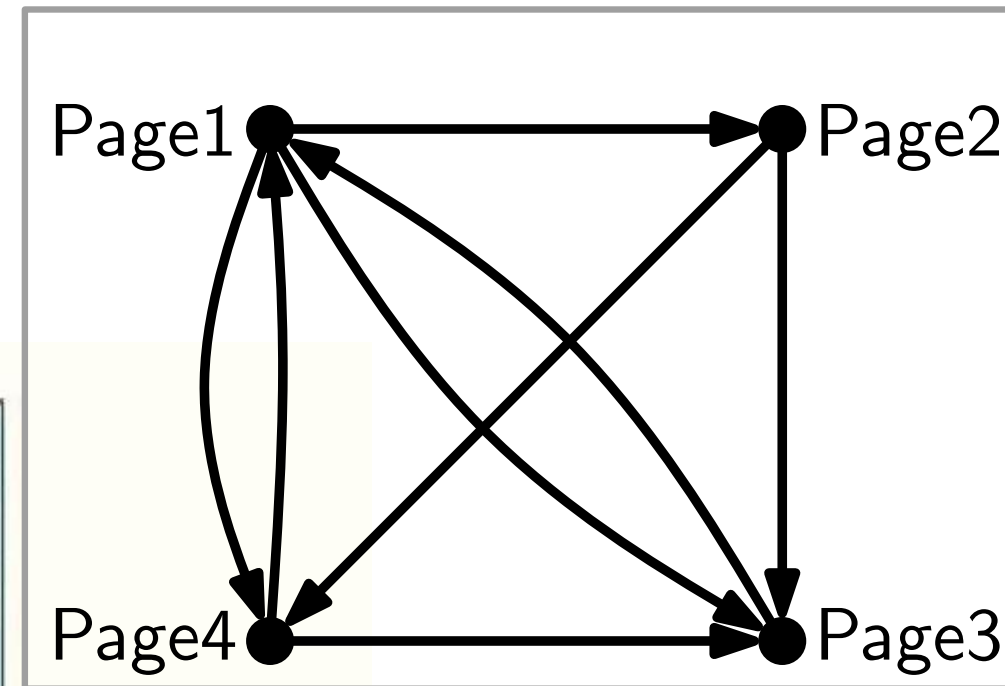
- Ein Knoten für jede Webseite.

# Ein Graphen-Modell



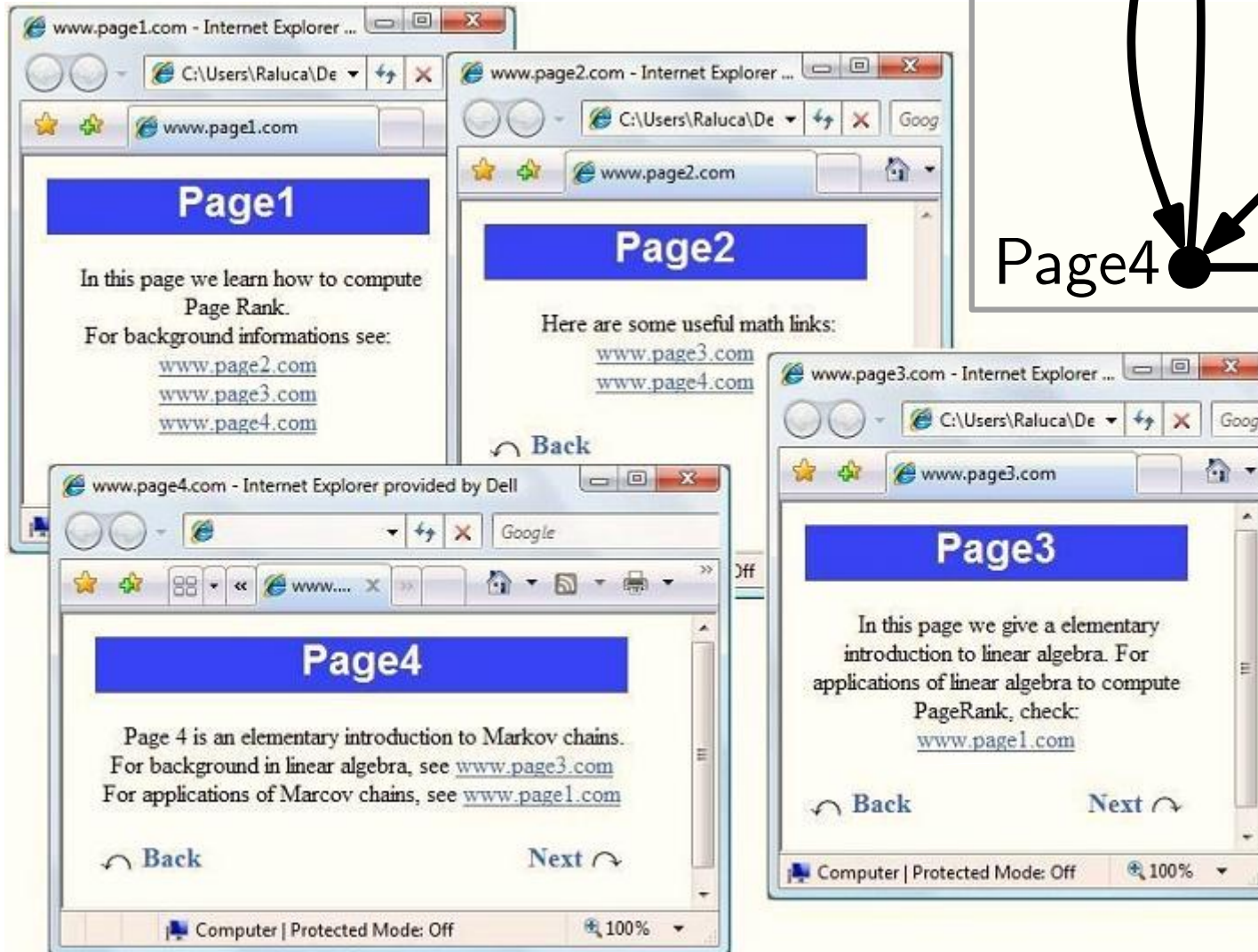
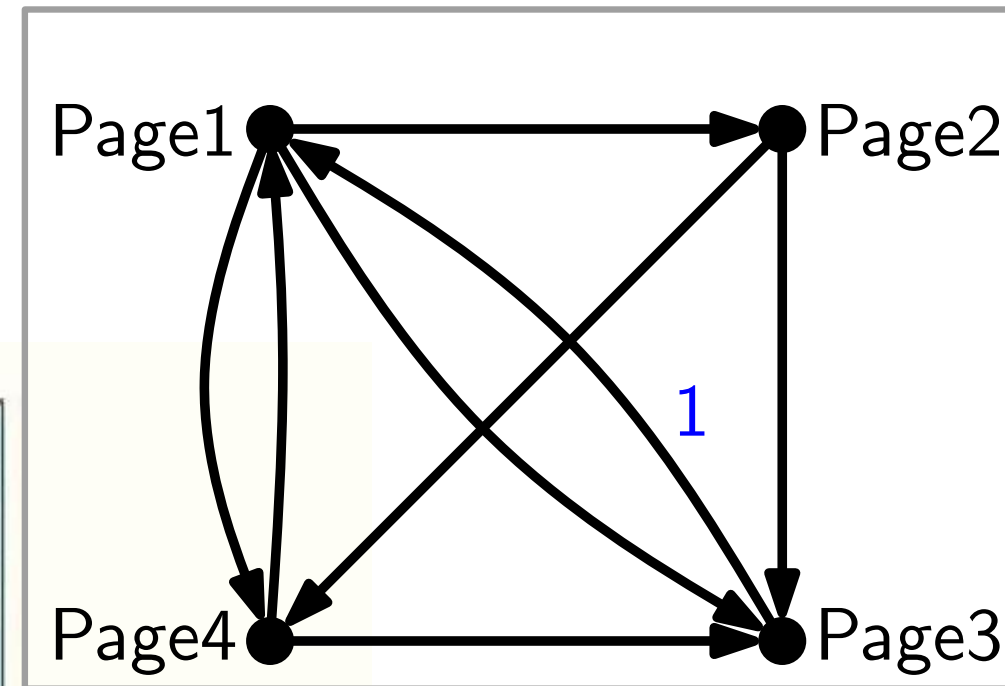
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante  $uv$ , falls Seite  $u$  per Link auf Seite  $v$  verweist.

# Ein Graphen-Modell



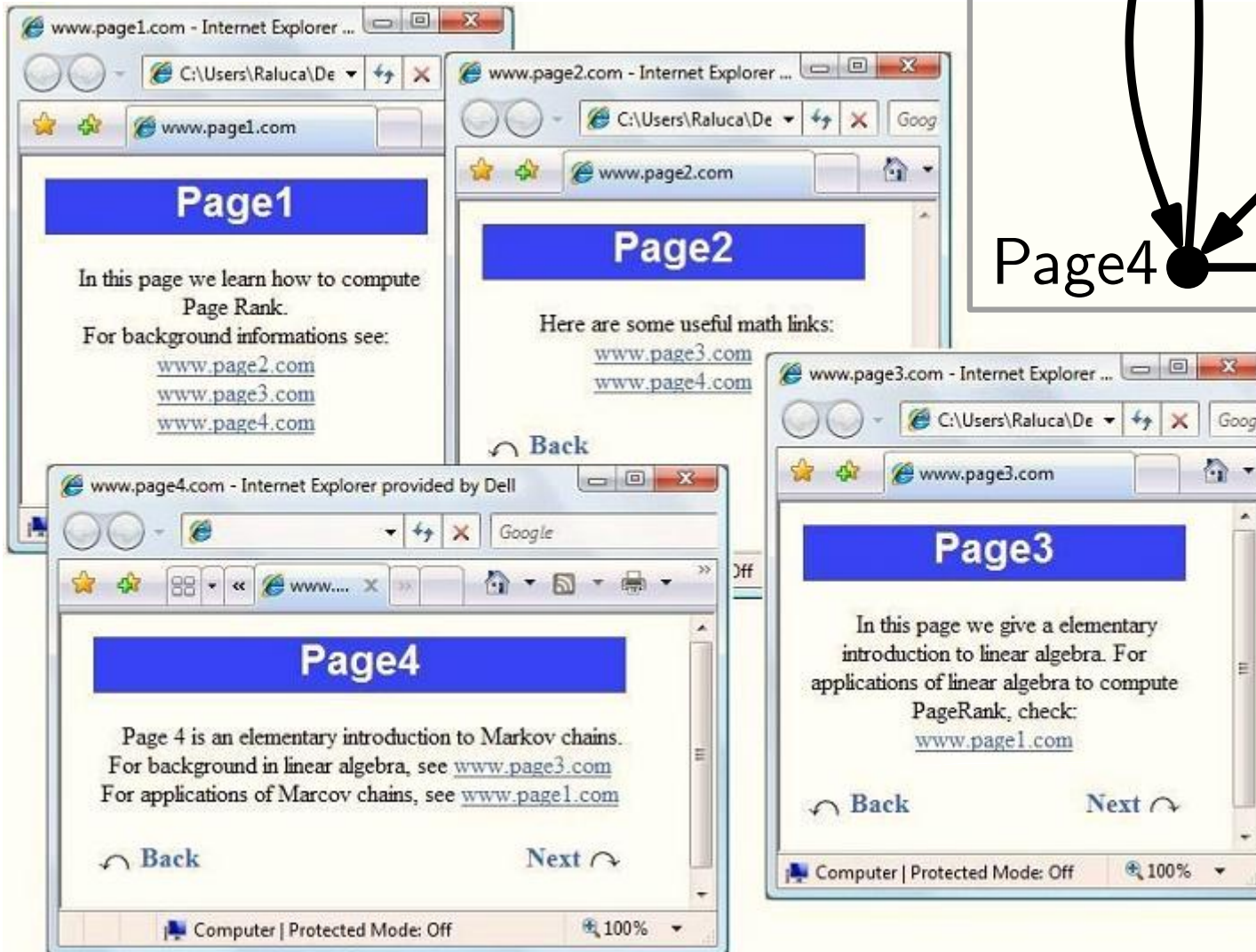
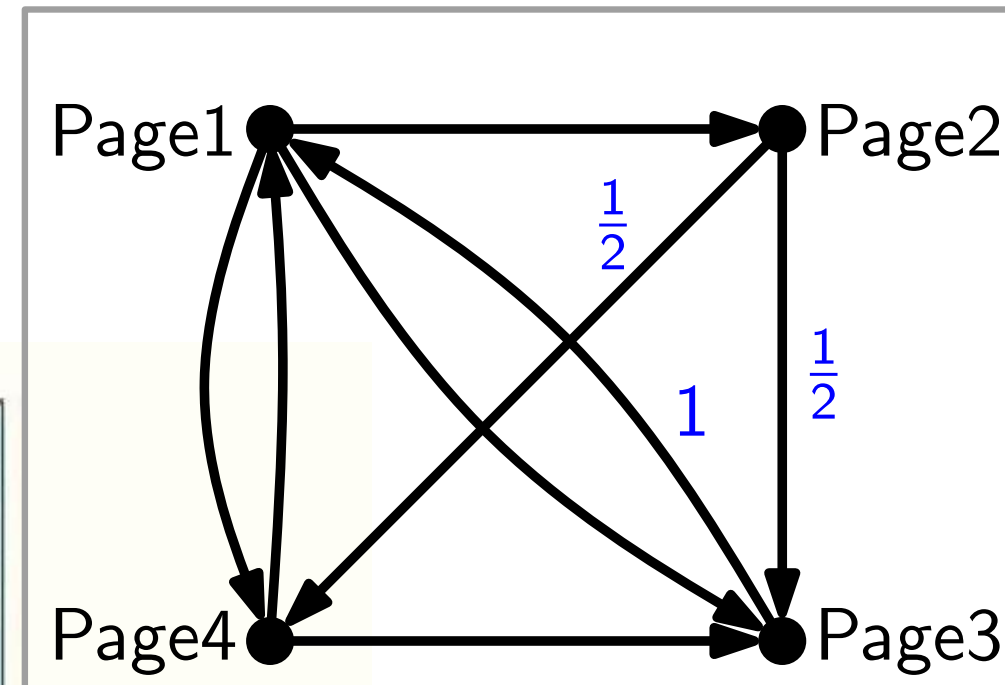
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante  $uv$ , falls Seite  $u$  per Link auf Seite  $v$  verweist.
- Kantengewichte  $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

# Ein Graphen-Modell



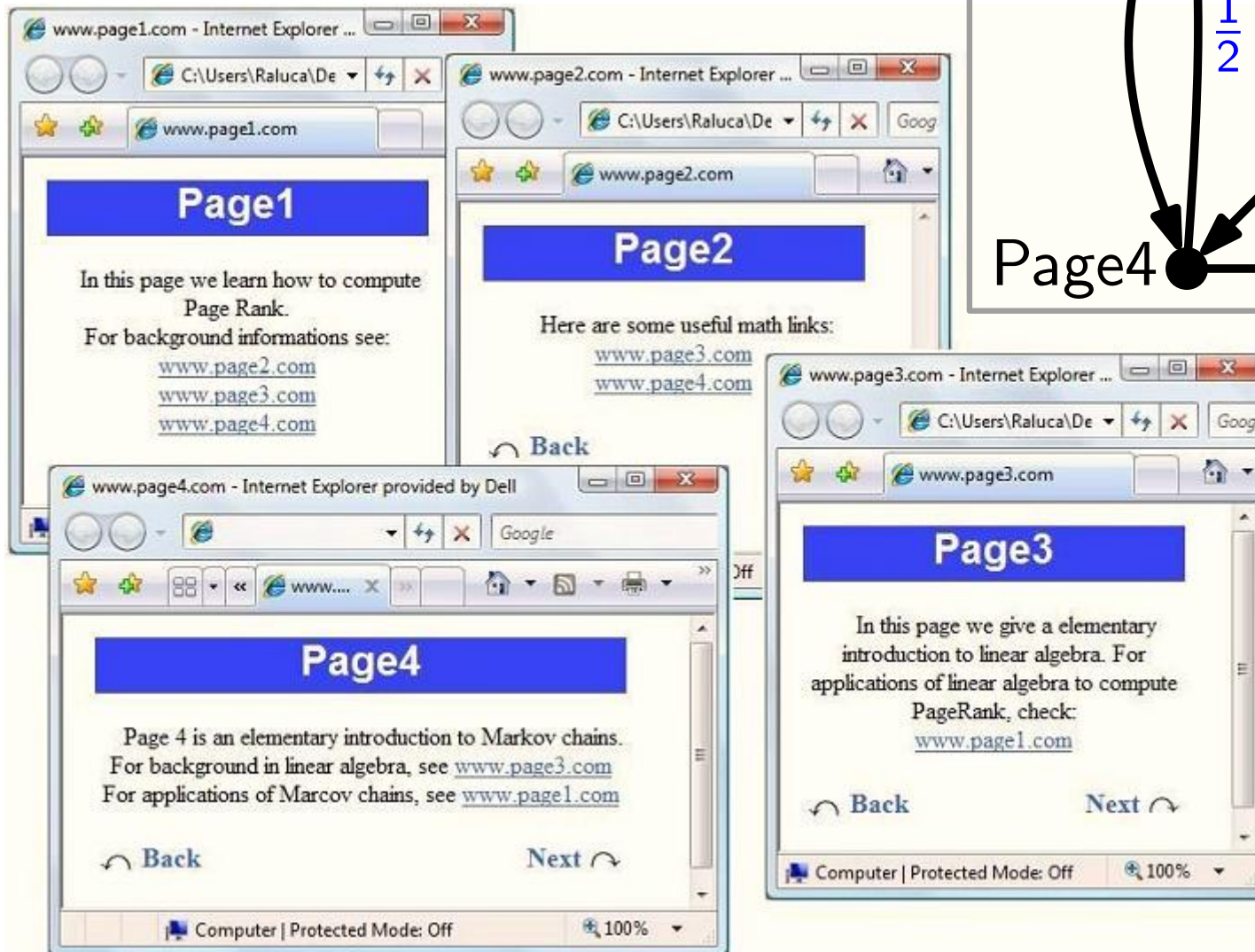
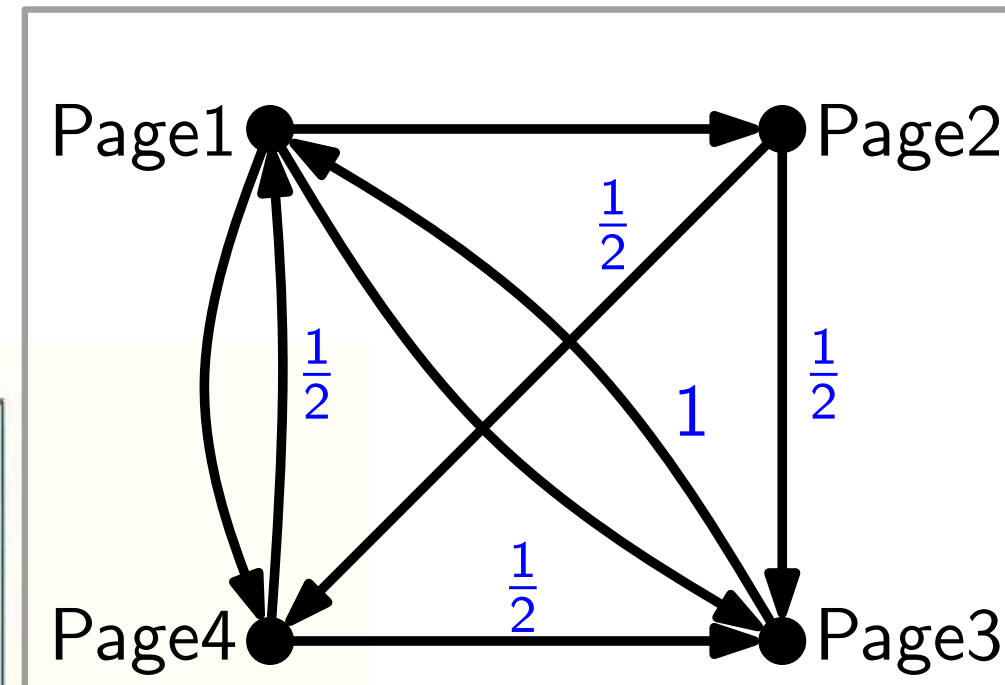
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante  $uv$ , falls Seite  $u$  per Link auf Seite  $v$  verweist.
- Kantengewichte  $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

# Ein Graphen-Modell



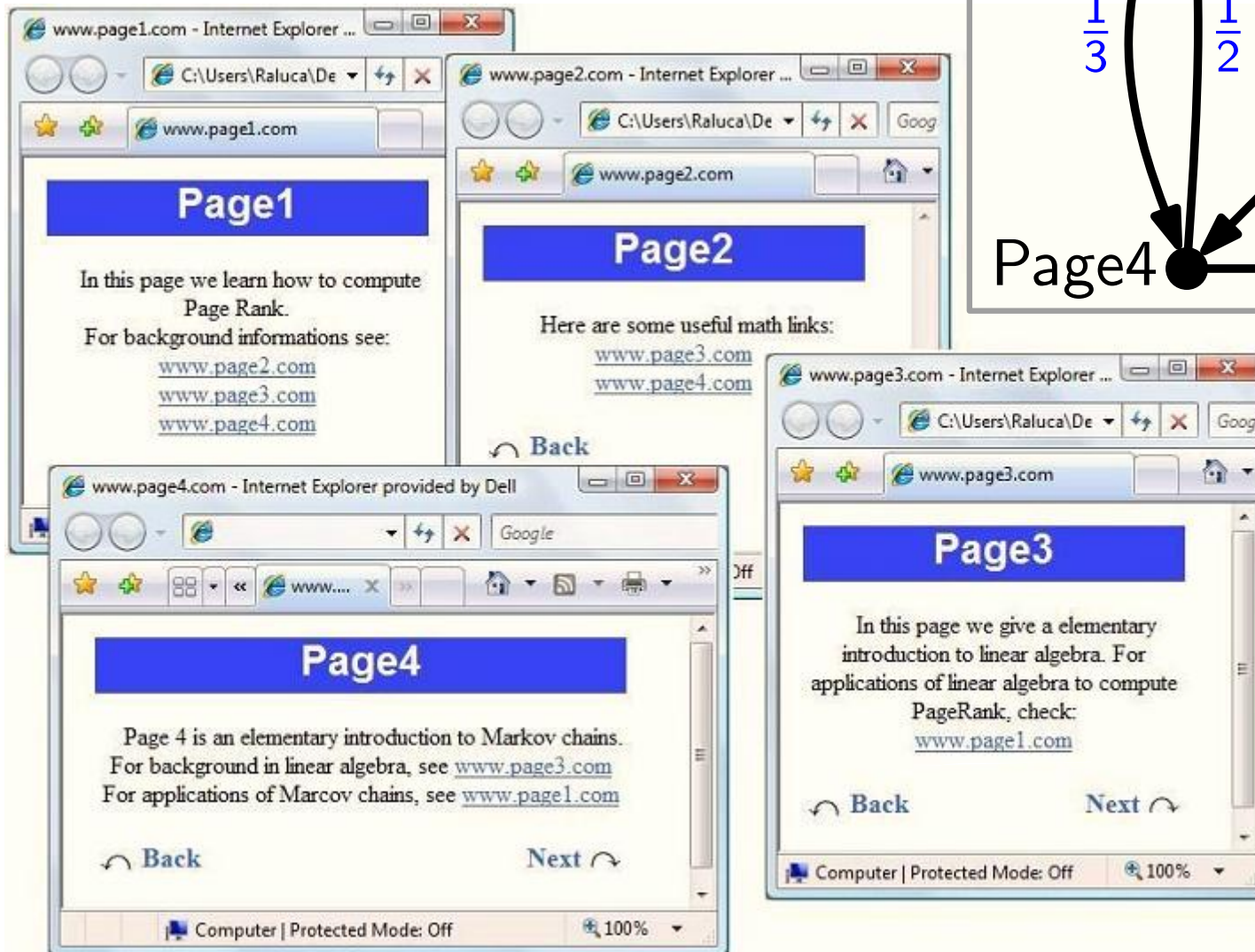
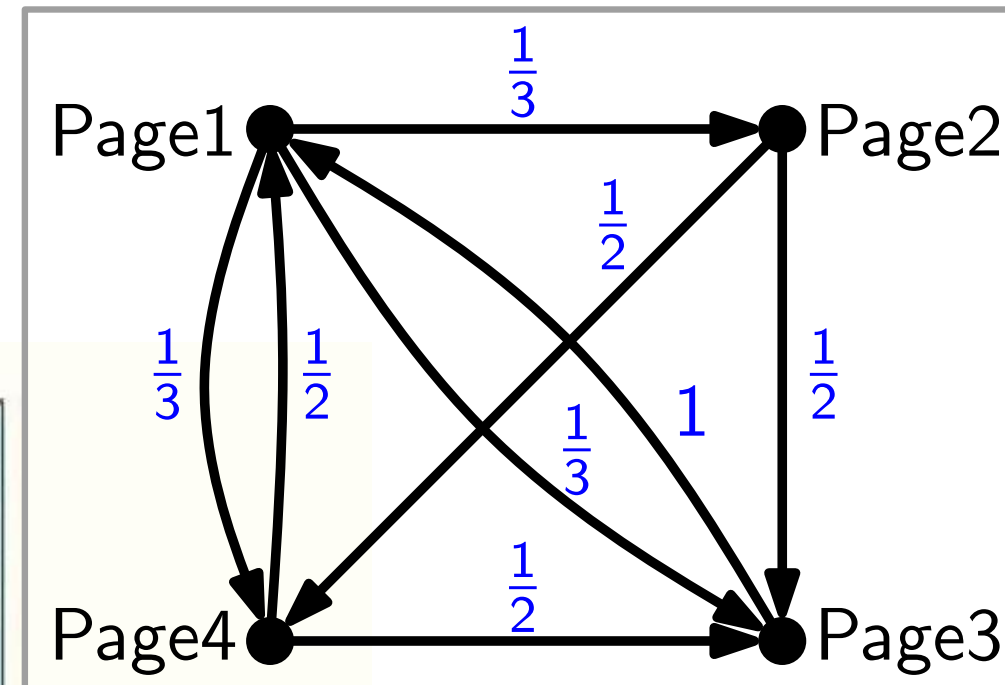
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante  $uv$ , falls Seite  $u$  per Link auf Seite  $v$  verweist.
- Kantengewichte  $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

# Ein Graphen-Modell



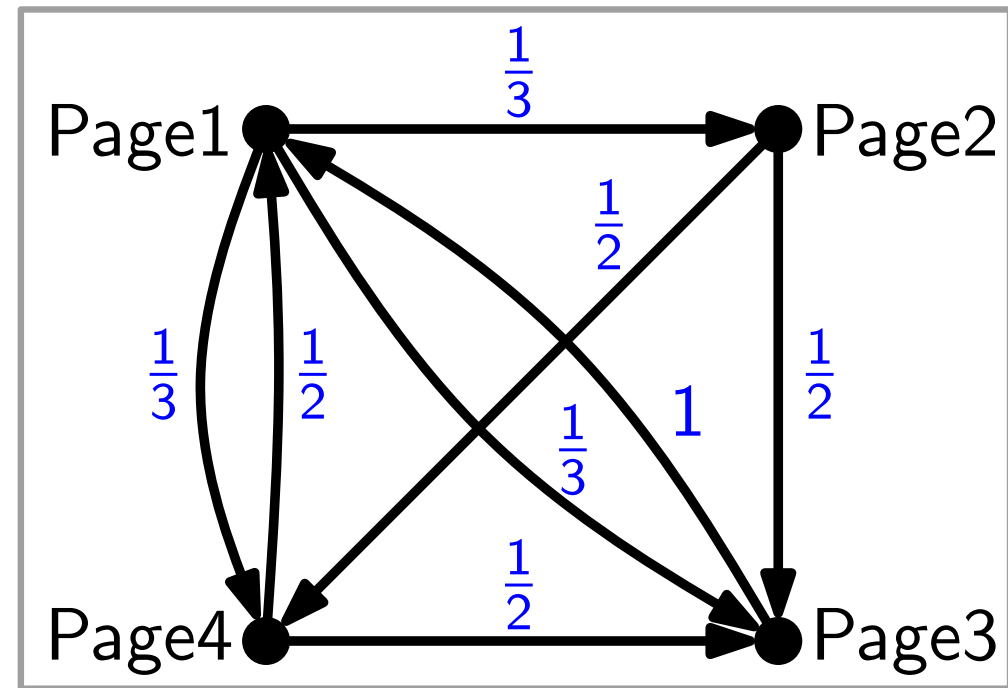
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante  $uv$ , falls Seite  $u$  per Link auf Seite  $v$  verweist.
- Kantengewichte  $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

# Ein Graphen-Modell



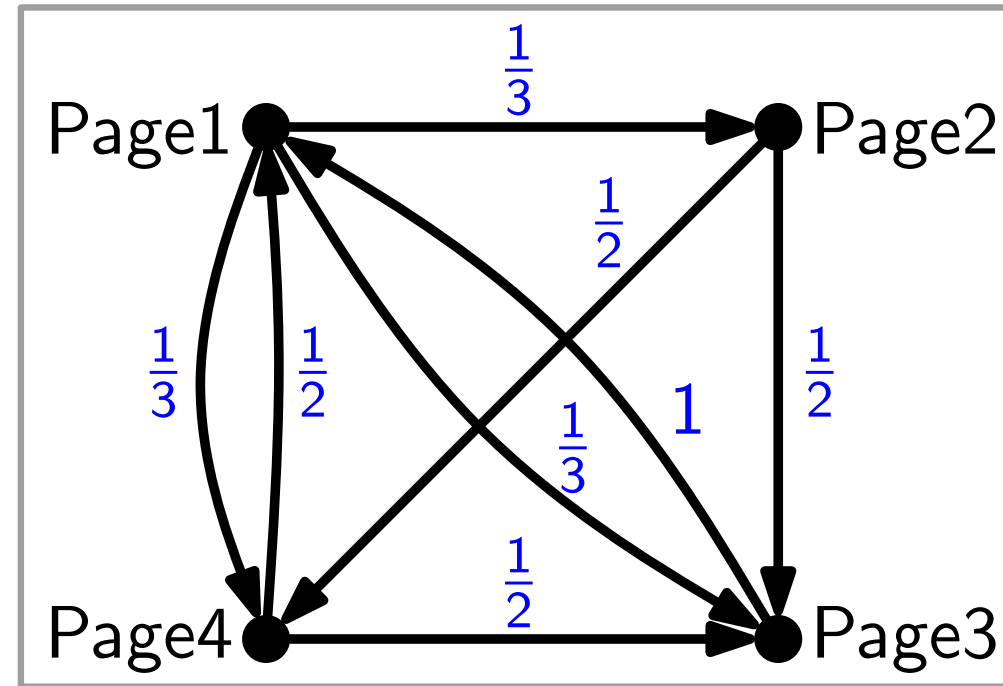
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante  $uv$ , falls Seite  $u$  per Link auf Seite  $v$  verweist.
- Kantengewichte  $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

# Some Math...



# Some Math...

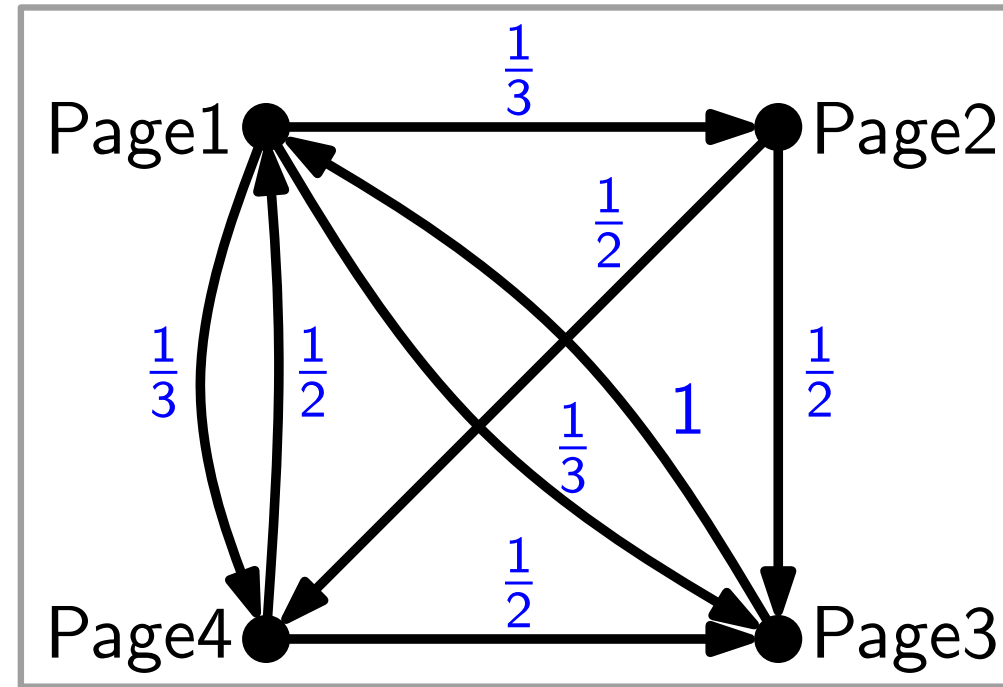
**Def.** *Übergangsmatrix*  
 $A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$



# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*  
 $A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$

hier:

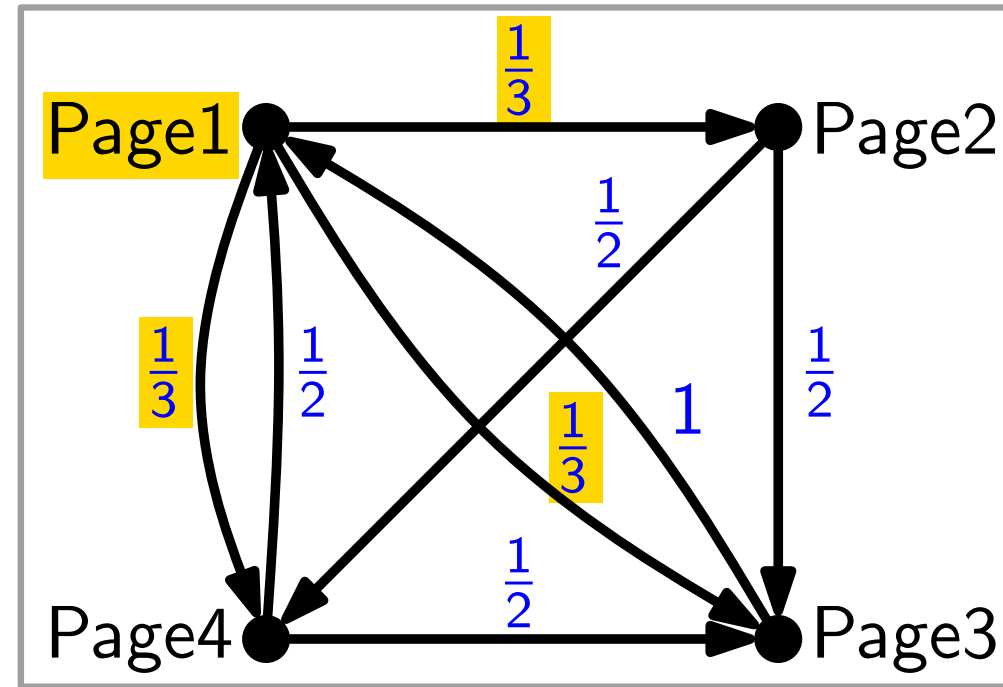
$$A = \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$$


# Some Math...

**Def.** Übergangsmatrix  
 $A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$

hier:

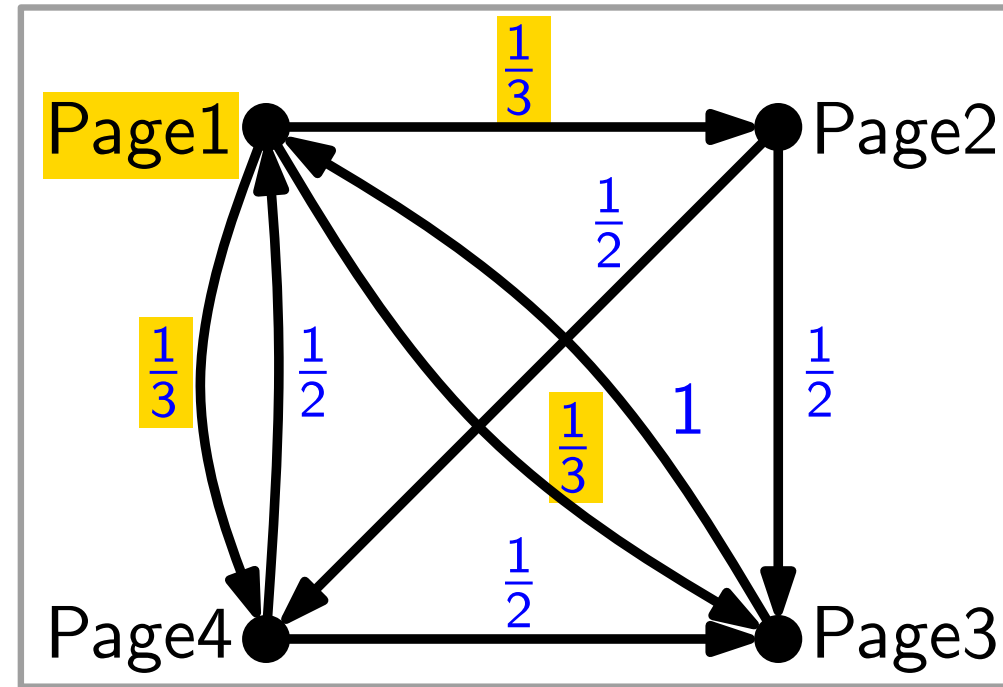
$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$



# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*  
 $A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$

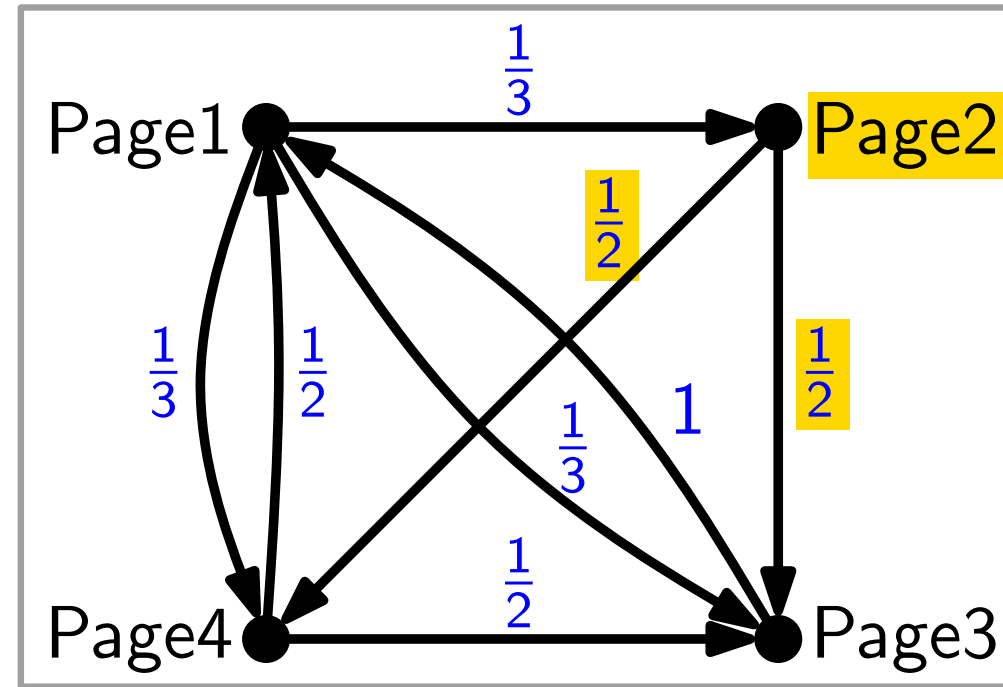
hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1/3 & & & \\ 1/3 & & & \\ 1/3 & & & \end{pmatrix}$$


# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*  
 $A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$

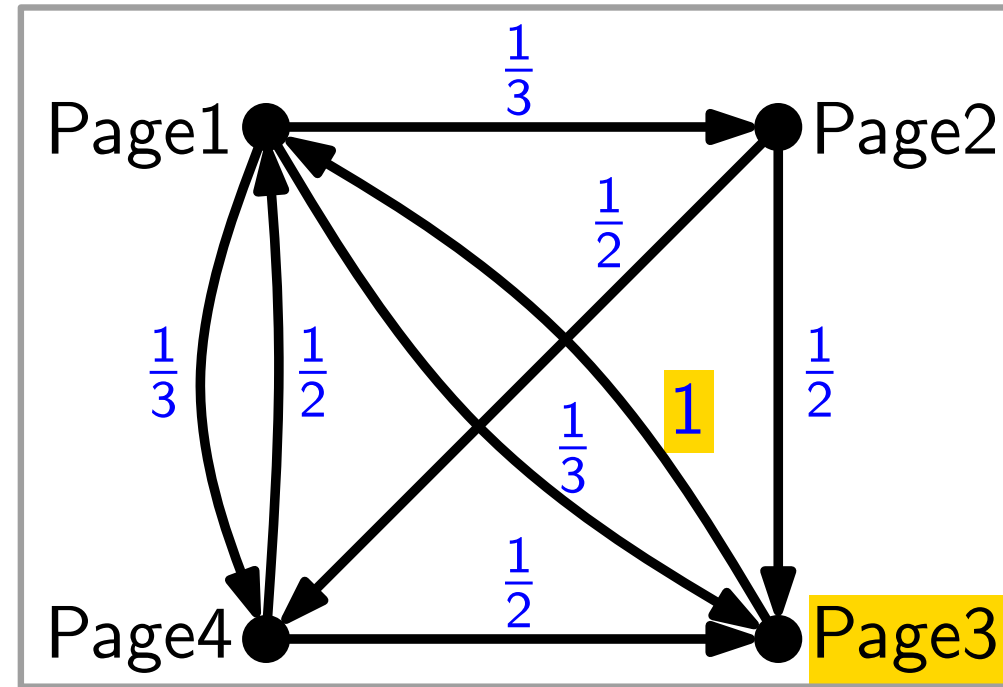
hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$


# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*  
 $A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$

hier:

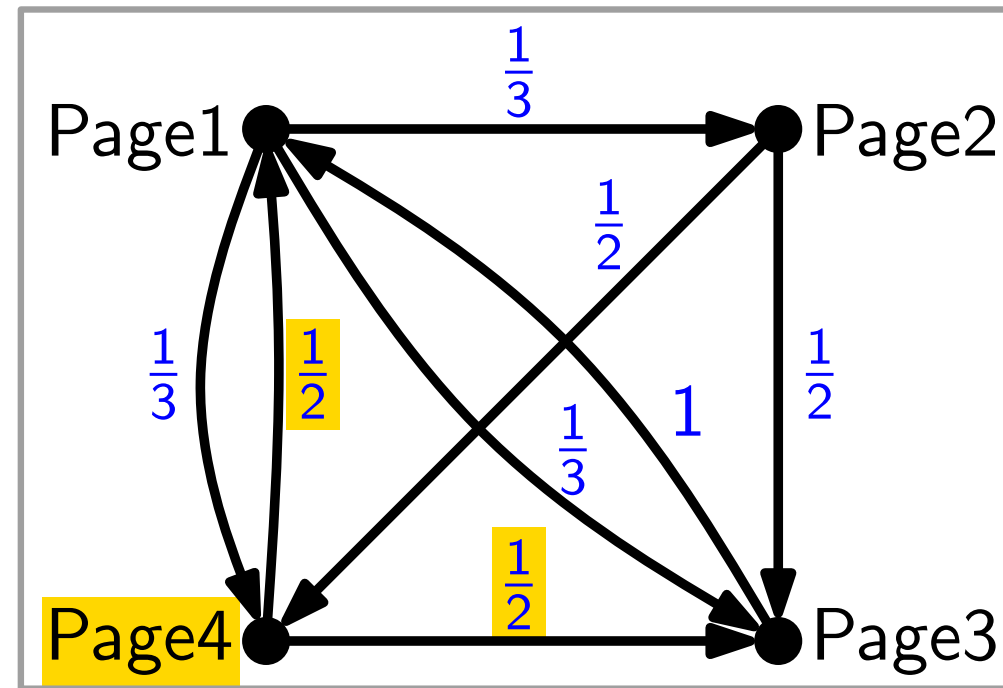
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$


# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*  
 $A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



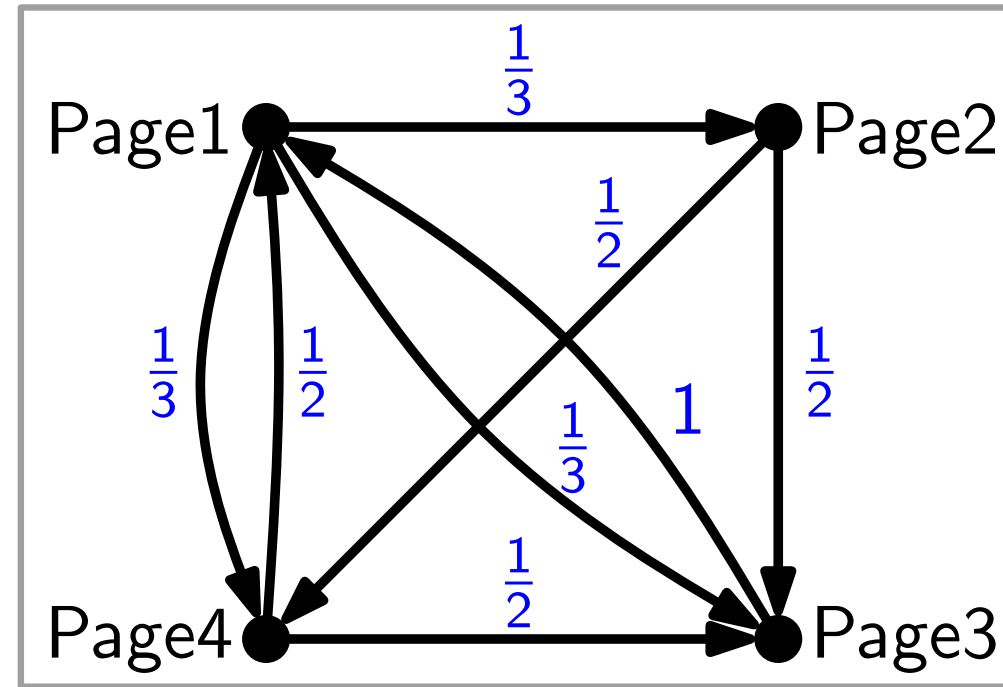
# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**Intuition:**

Jede der  $n = |V(G)|$  Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

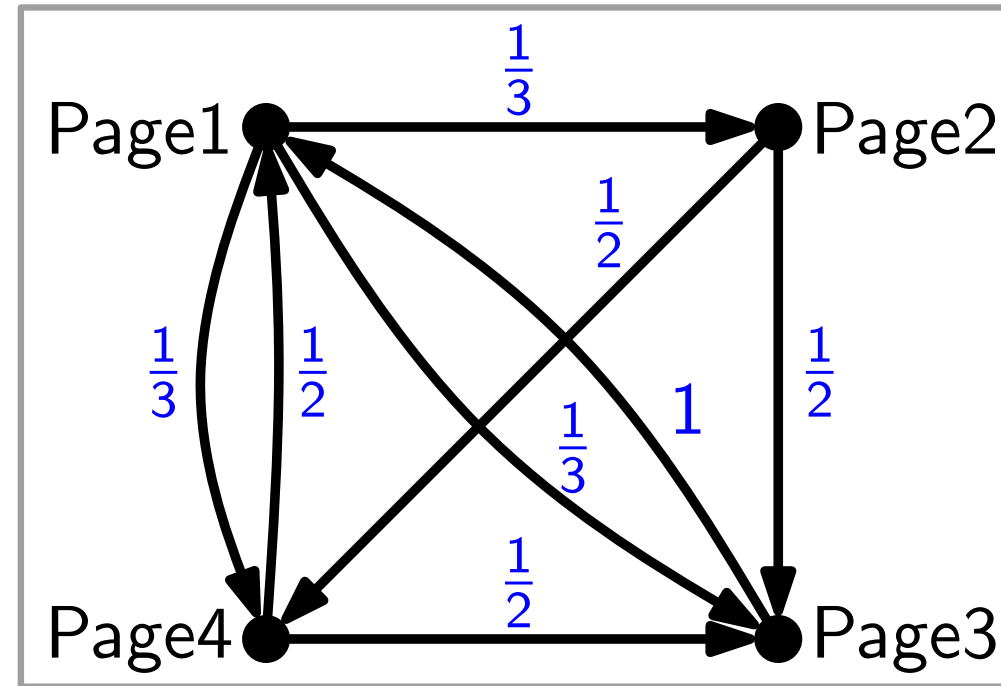
# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**Intuition:**

Jede der  $n = |V(G)|$  Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

Seite desto (ge-)wichtiger, je öfter sie von wichtigen Seiten verlinkt wird.

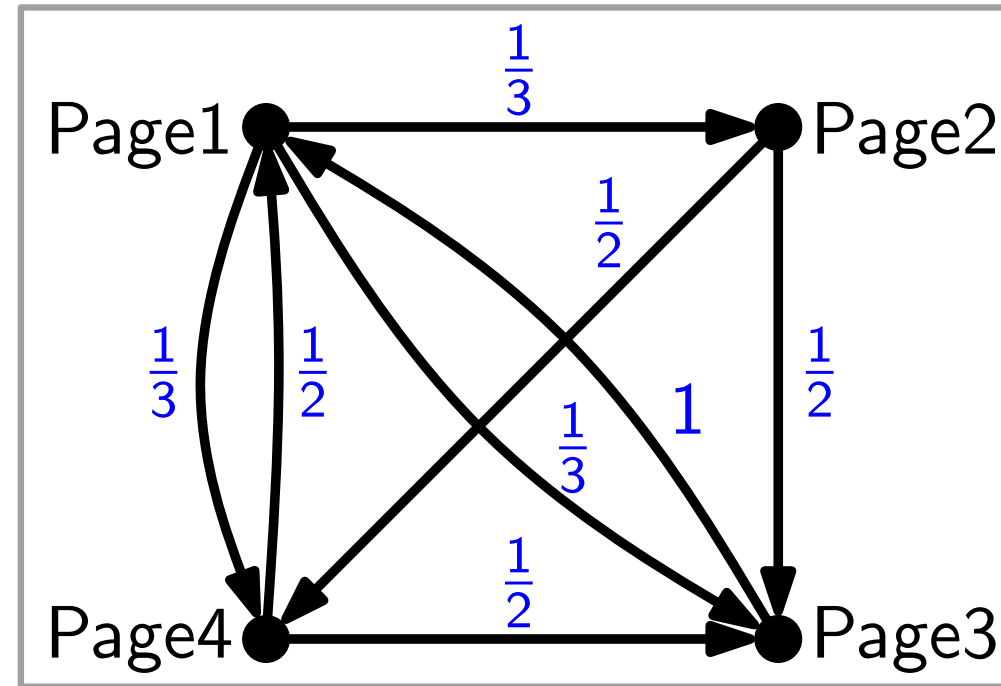
# Some Math...

**Def.** *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{u,v \in V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**Intuition:**

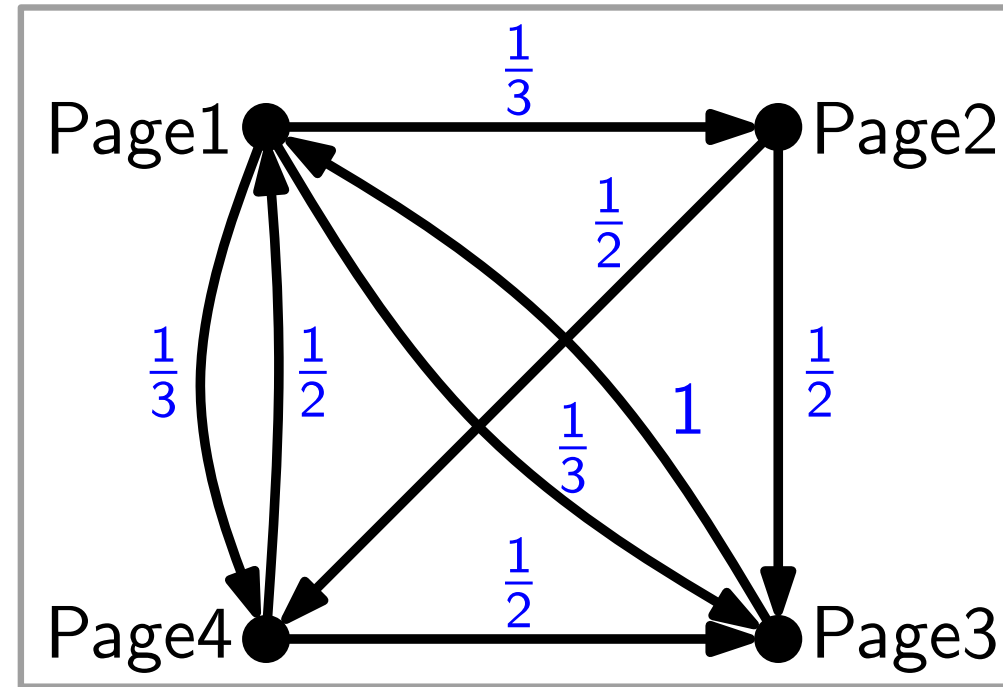
Jede der  $n = |V(G)|$  Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

Seite desto (ge-)wichtiger, je öfter sie von wichtigen Seiten verlinkt wird.

Jede Seite verteilt ihr Gewicht über ihre ausgehenden Kanten gleichmäßig unter ihren Nachbarn.

# Dynamisches System

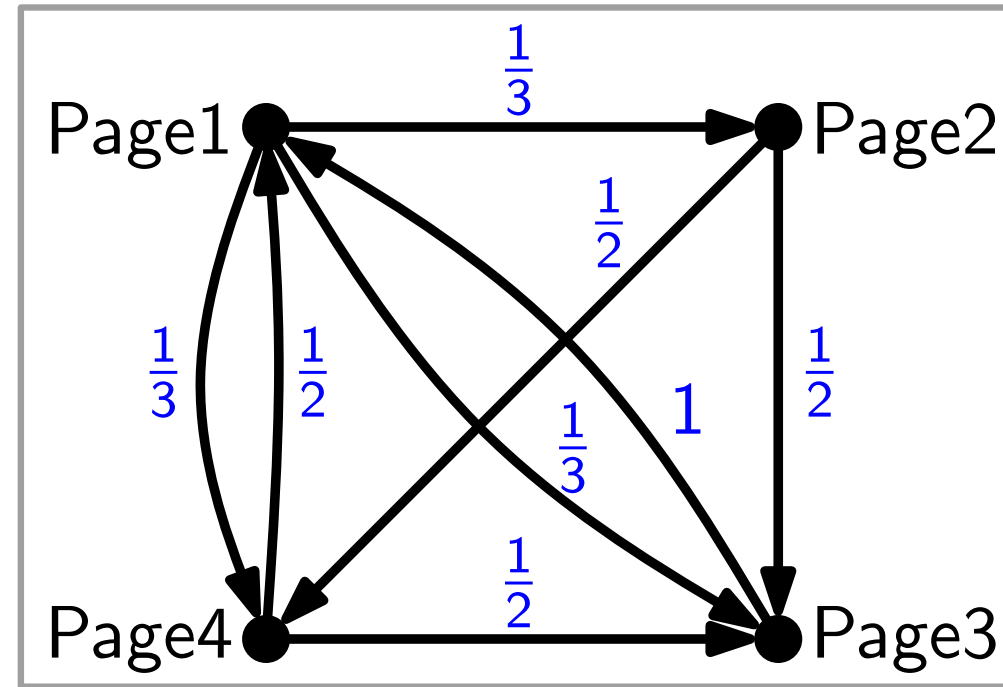
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht:  $1/n$ .

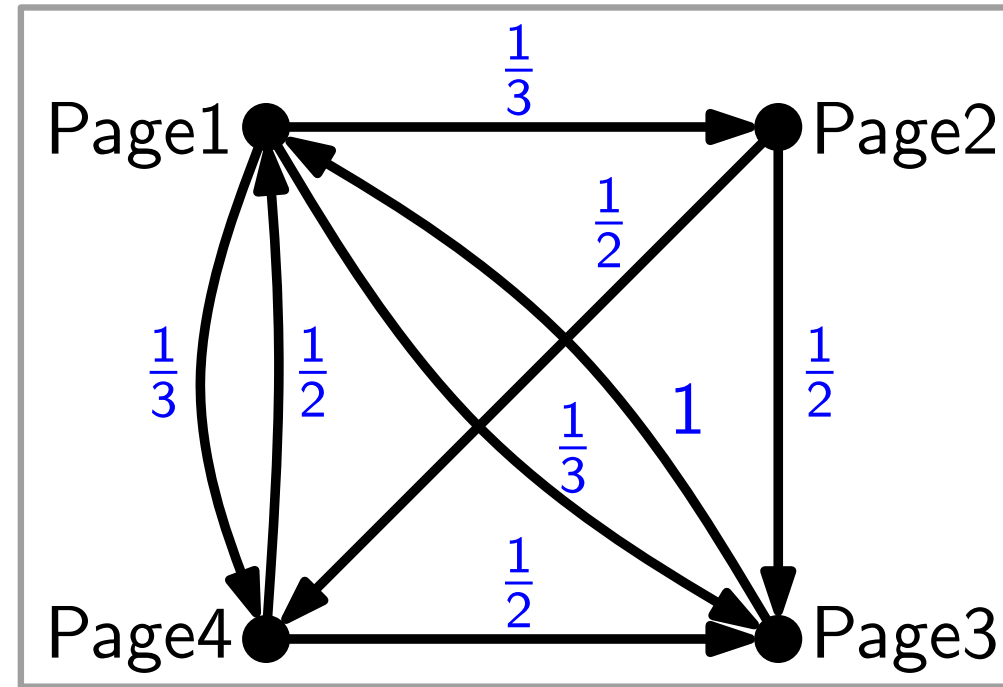


# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht:  $1/n$ .

Im Beispiel: Vektor  $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$



# Dynamisches System

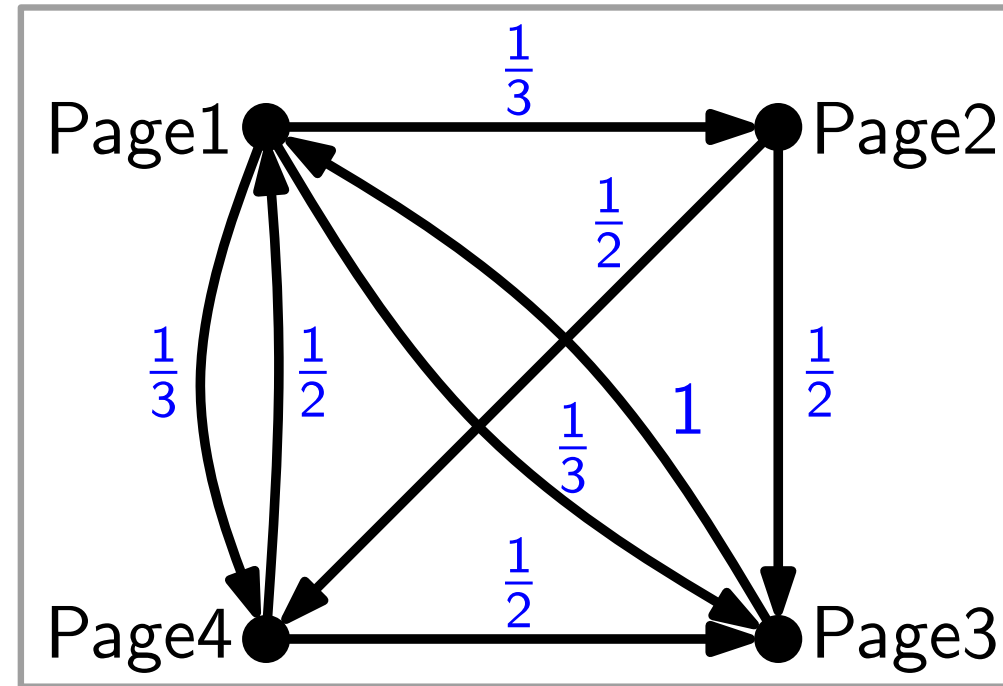
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht:  $1/n$ .

Im Beispiel: Vektor  $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

$r_1 :=$



# Dynamisches System

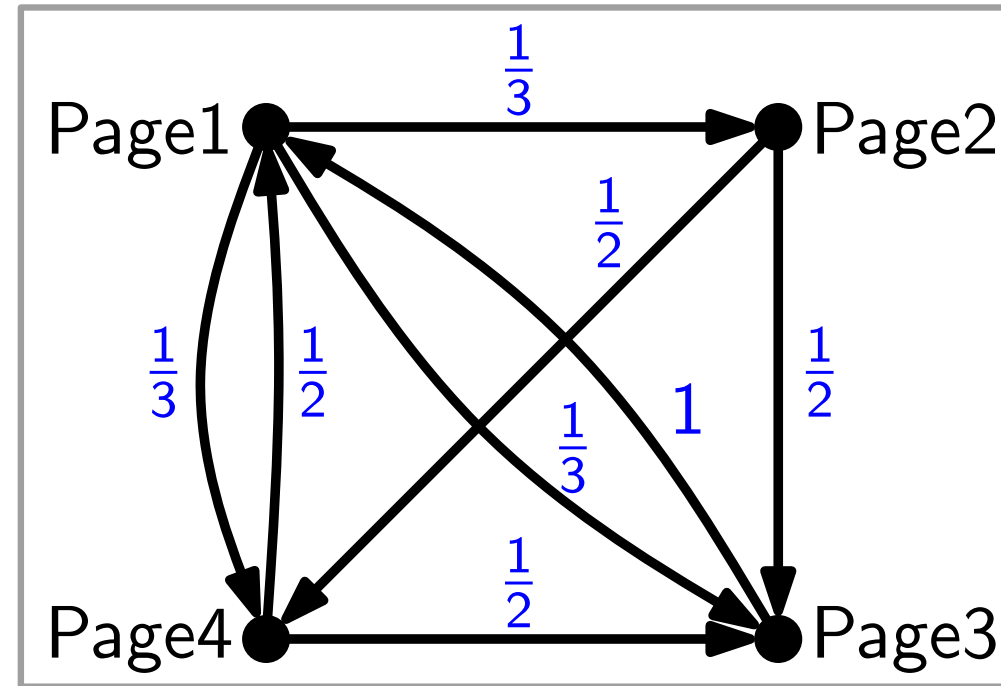
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht:  $1/n$ .

Im Beispiel: Vektor  $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

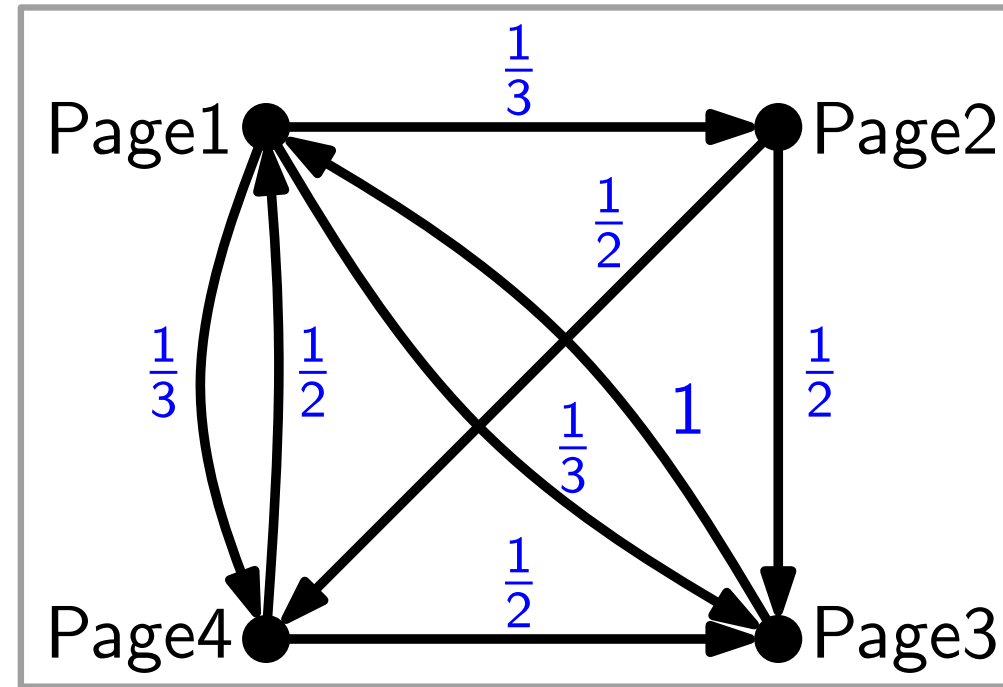
$$r_1 := A \cdot r_0 =$$



# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht:  $1/n$ .



Im Beispiel: Vektor  $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

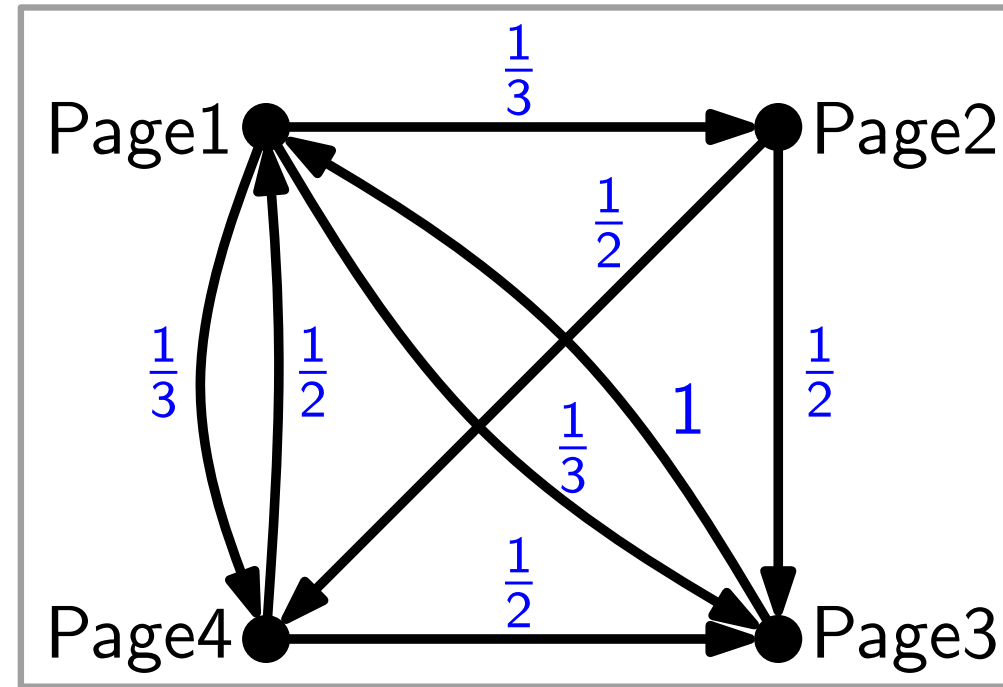
Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

$$r_1 := A \cdot r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} =$$

# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht:  $1/n$ .



Im Beispiel: Vektor  $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

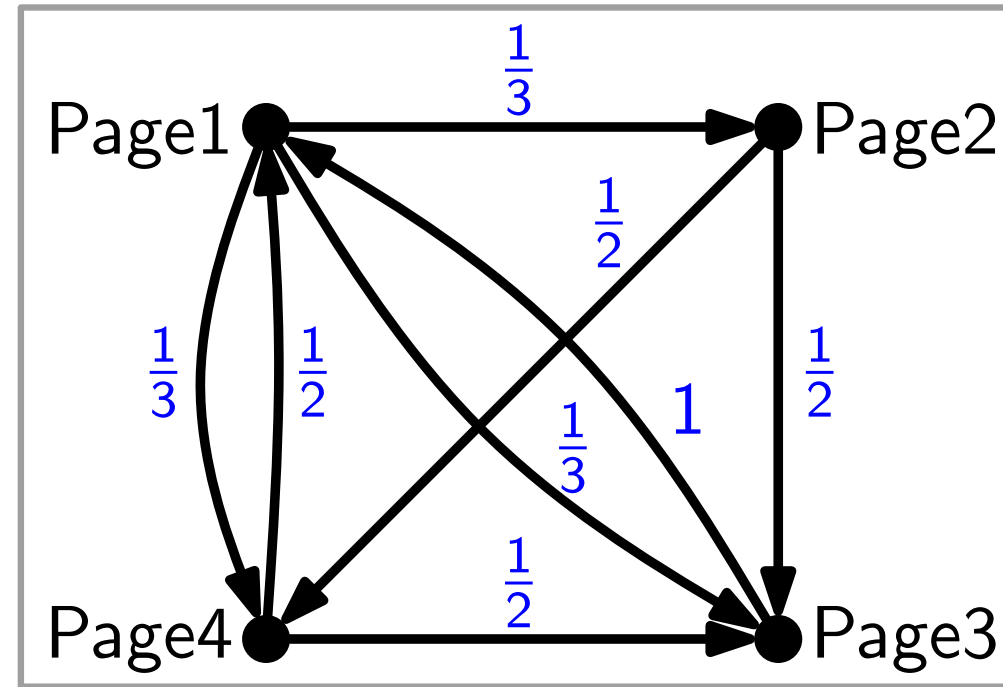
$$r_1 := A \cdot r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/12 \\ 1/3 \\ 5/24 \end{pmatrix}$$

# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$r_2 :=$

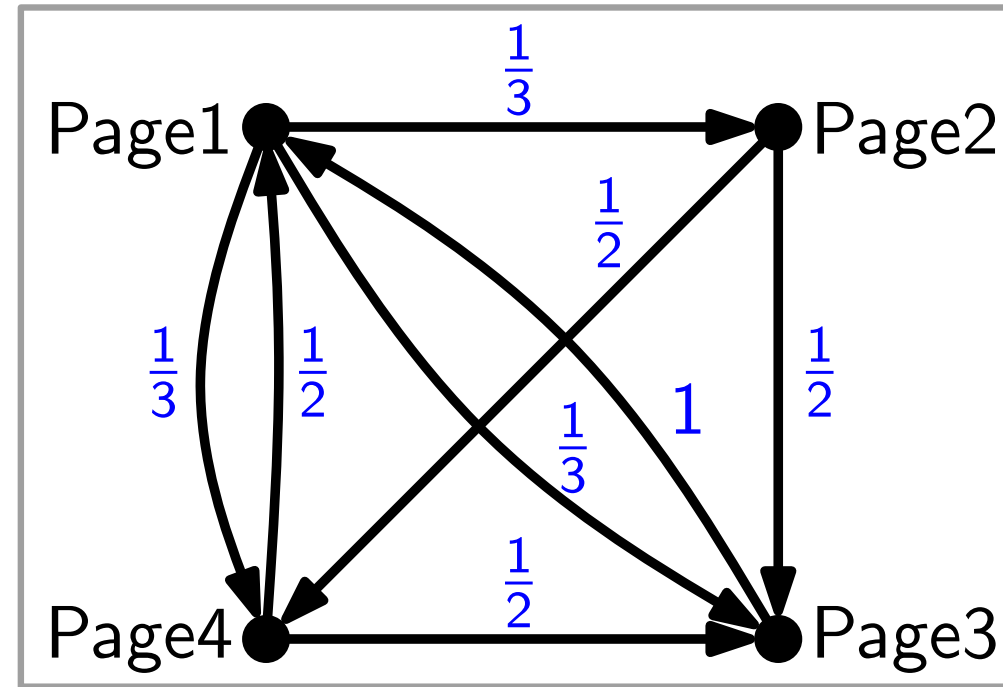


# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 =$$

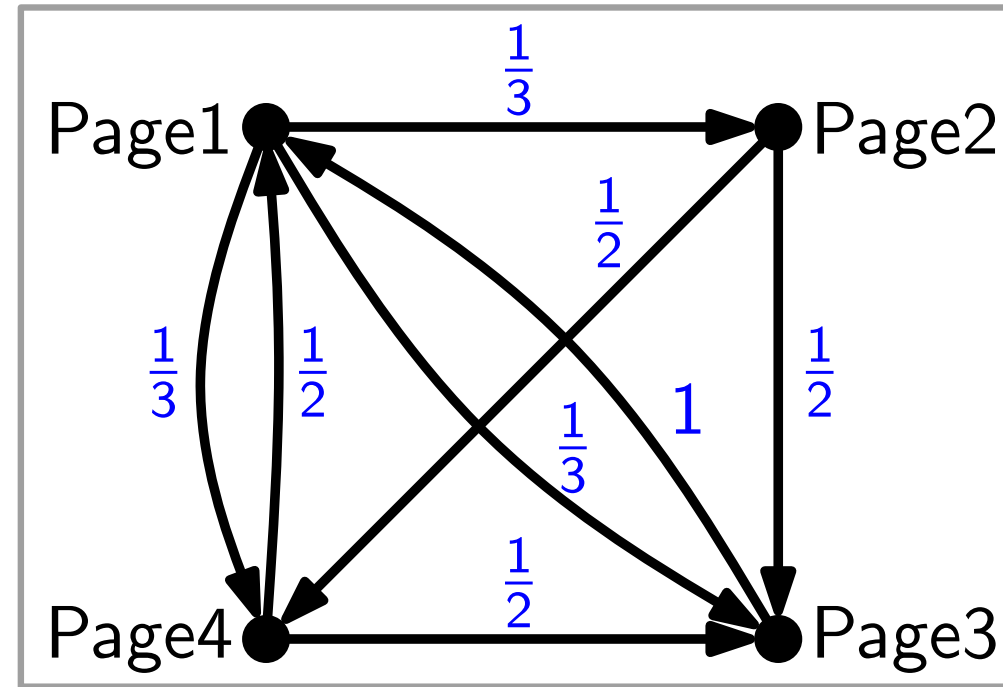


# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) =$$

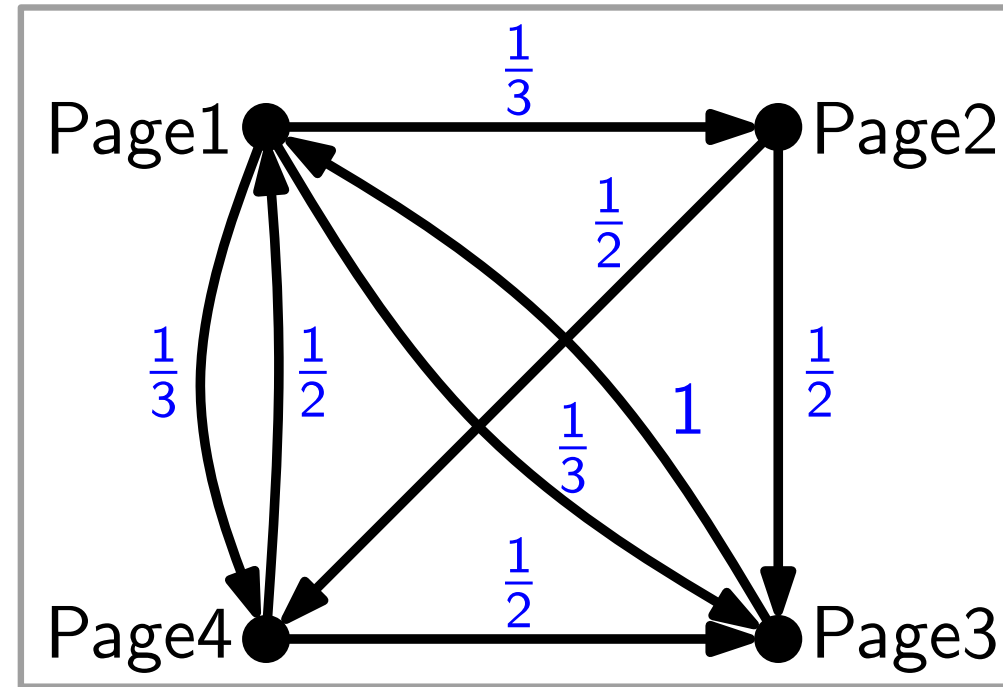


# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx$$

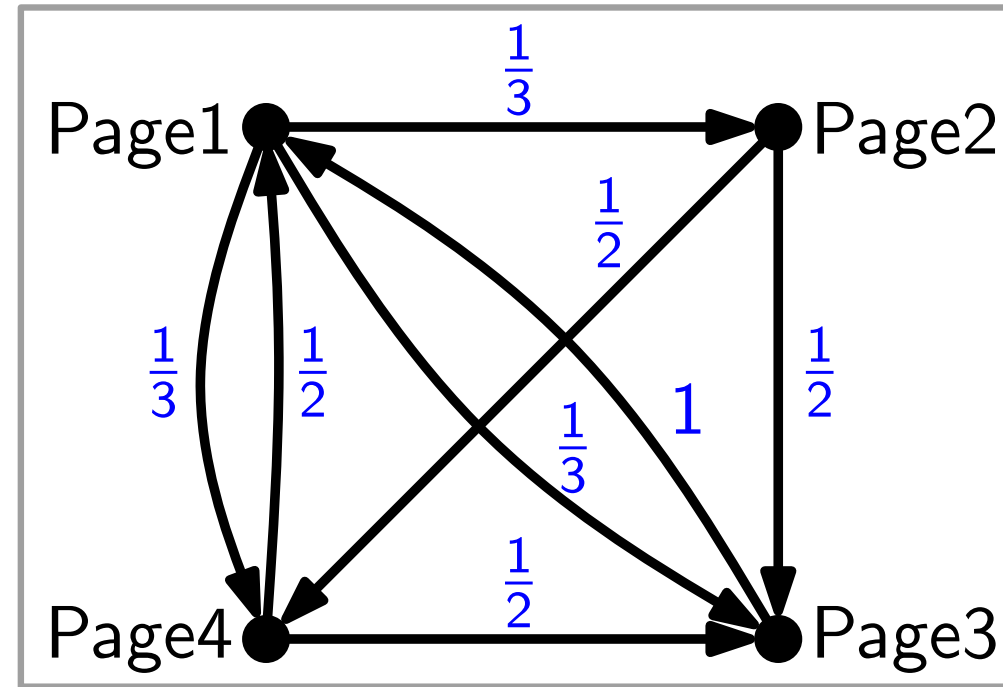


# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$



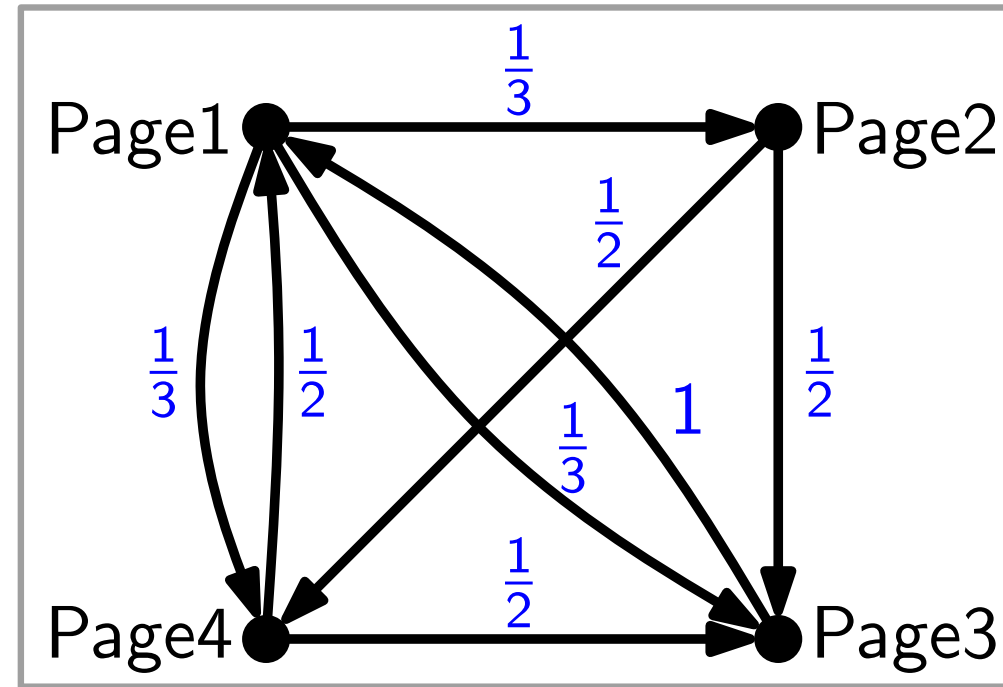
# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$



# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

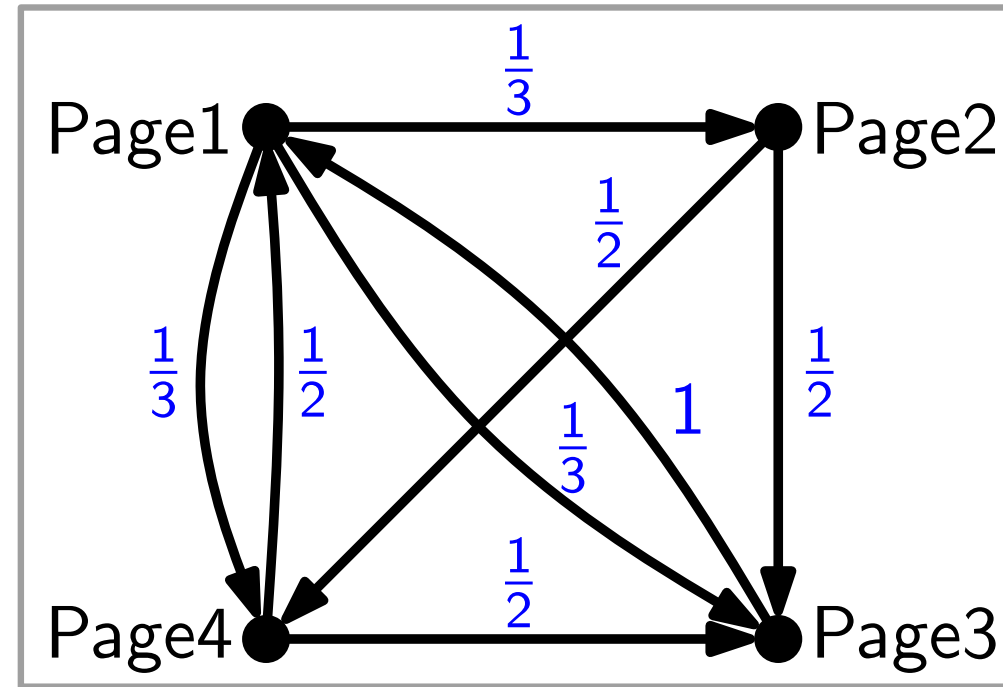
Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

⋮

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$



# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

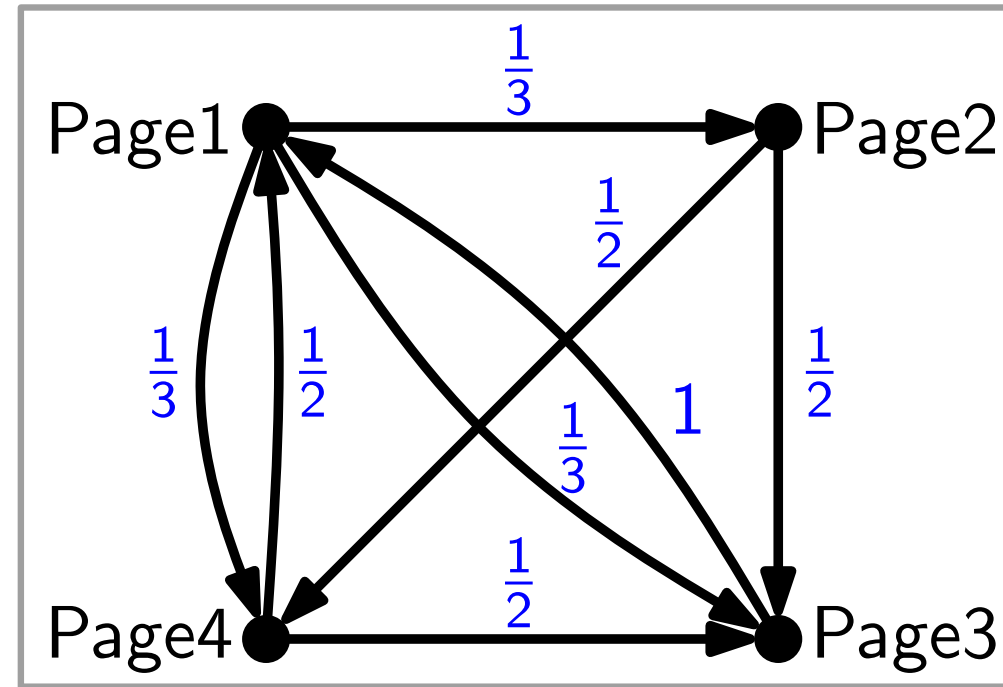
$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

⋮

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$

$$r_7 := A^7 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,12; 0,29; 0,19)^\top \approx A^8 \cdot r_0 =: r_8$$



# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

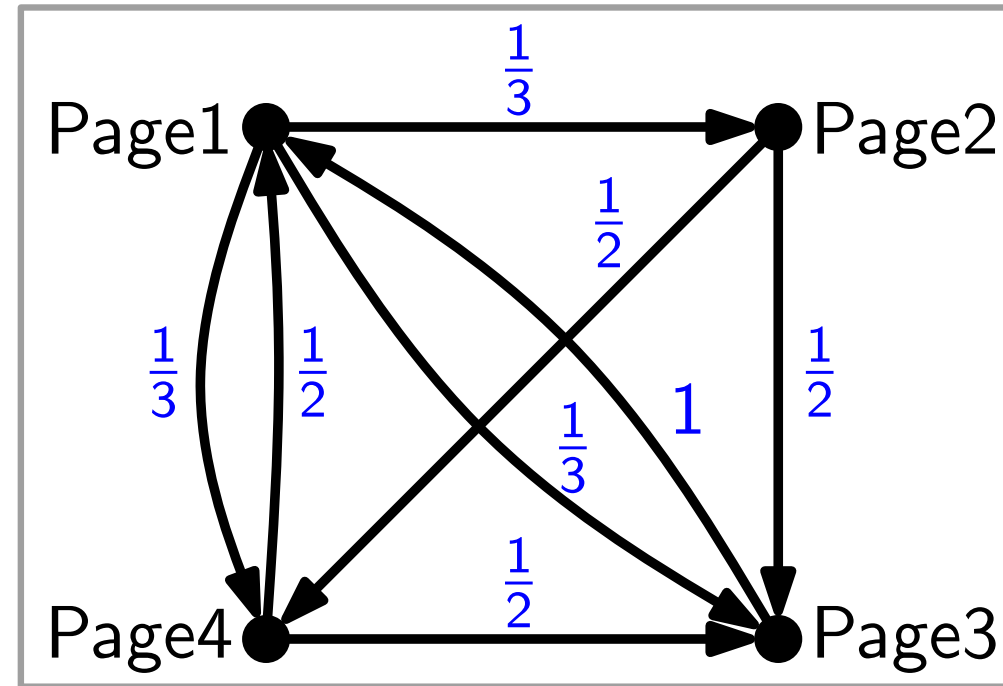
$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

$\vdots$

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$

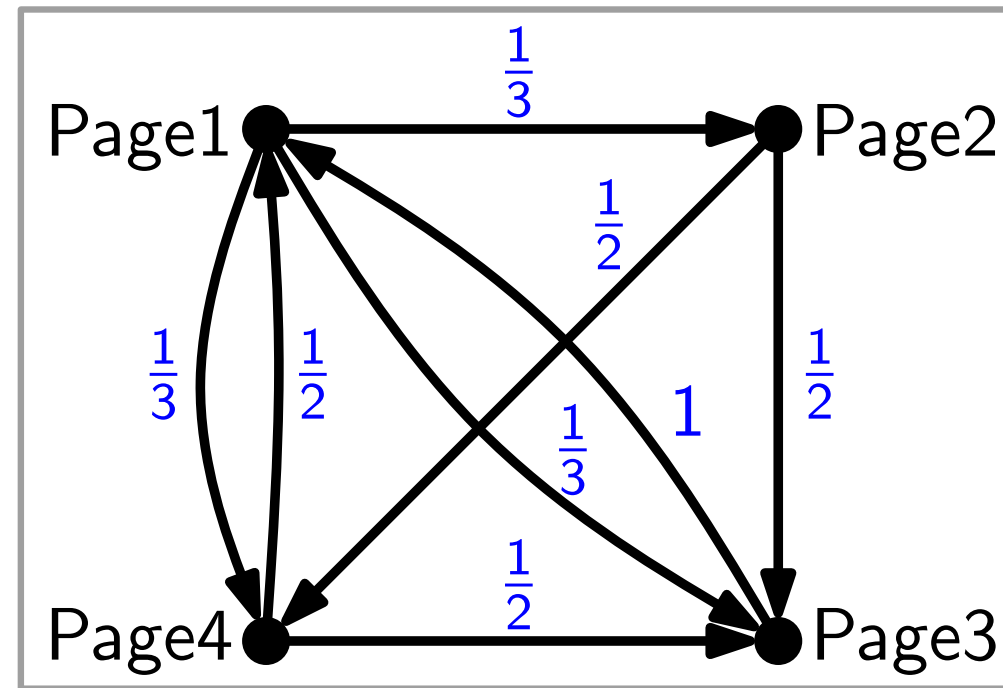
$$r_7 := A^7 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,12; 0,29; 0,19)^\top \approx A^8 \cdot r_0 =: r_8$$



*System strebt gegen Gleichgewichtszustand!*

# Eigenvektoren

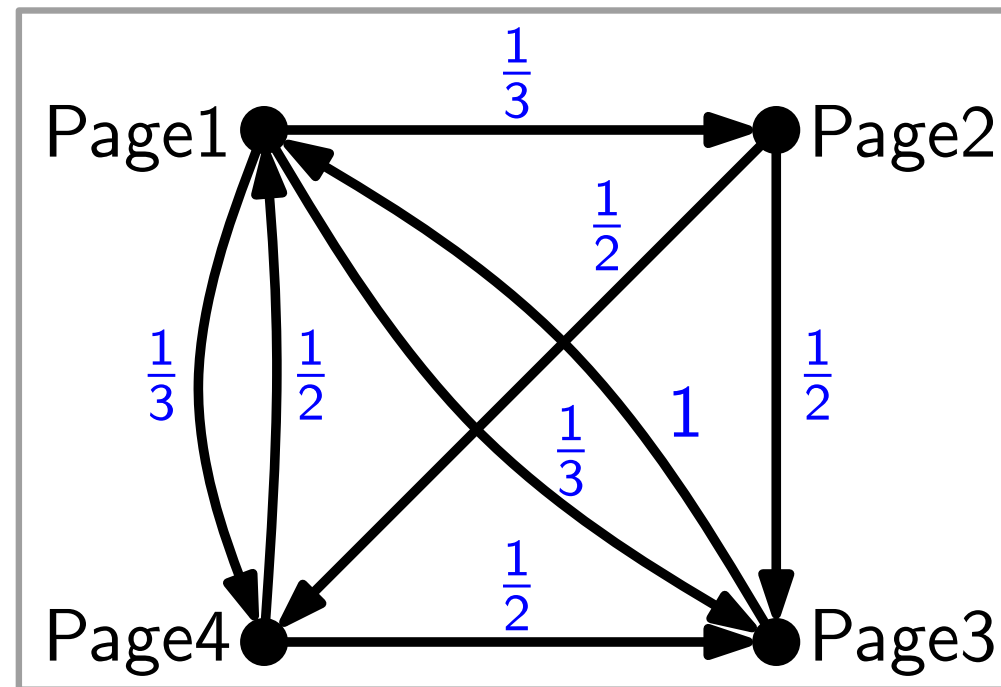
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt  $A \cdot r = r$ .

# Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

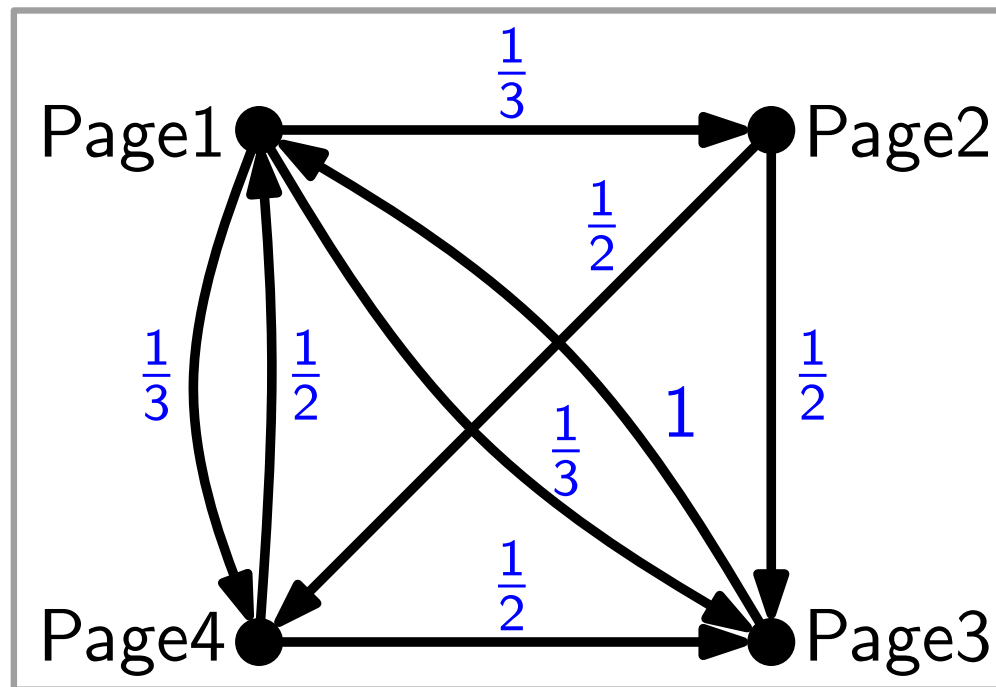


Im Gleichgewicht gilt  $A \cdot r = r$ .

D.h.  $r$  ist Eigenvektor von  $A$  für den Eigenwert 1.

# Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt  $A \cdot r = r$ .

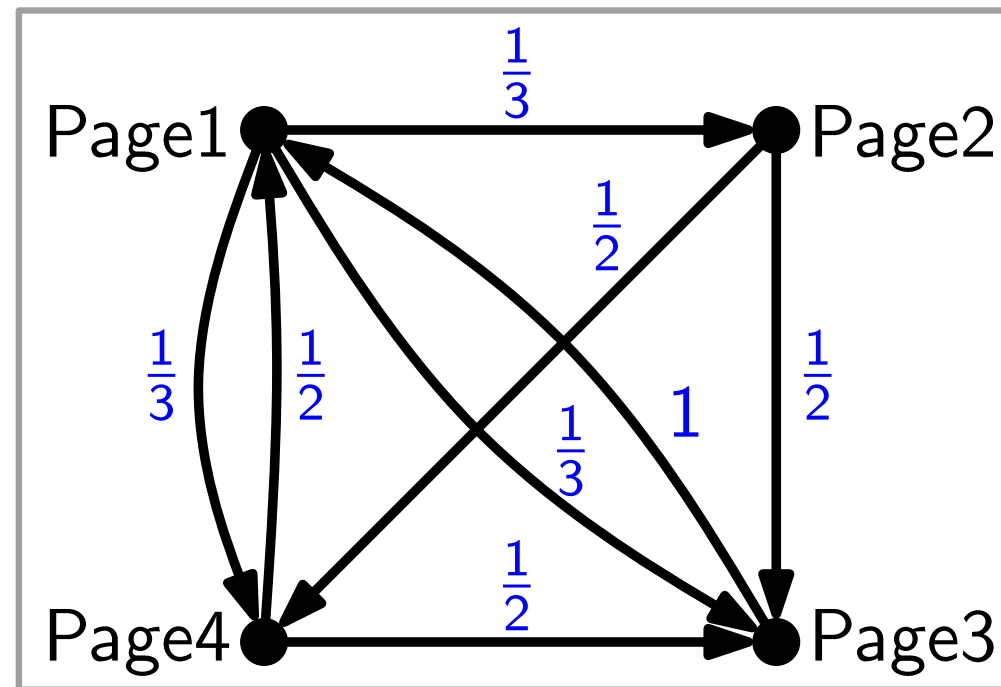
D.h.  $r$  ist Eigenvektor von  $A$  für den Eigenwert 1.

Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form  $c \cdot (12, 4, 9, 6)^\top$ .

# Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt  $A \cdot r = r$ .

D.h.  $r$  ist Eigenvektor von  $A$  für den Eigenwert 1.

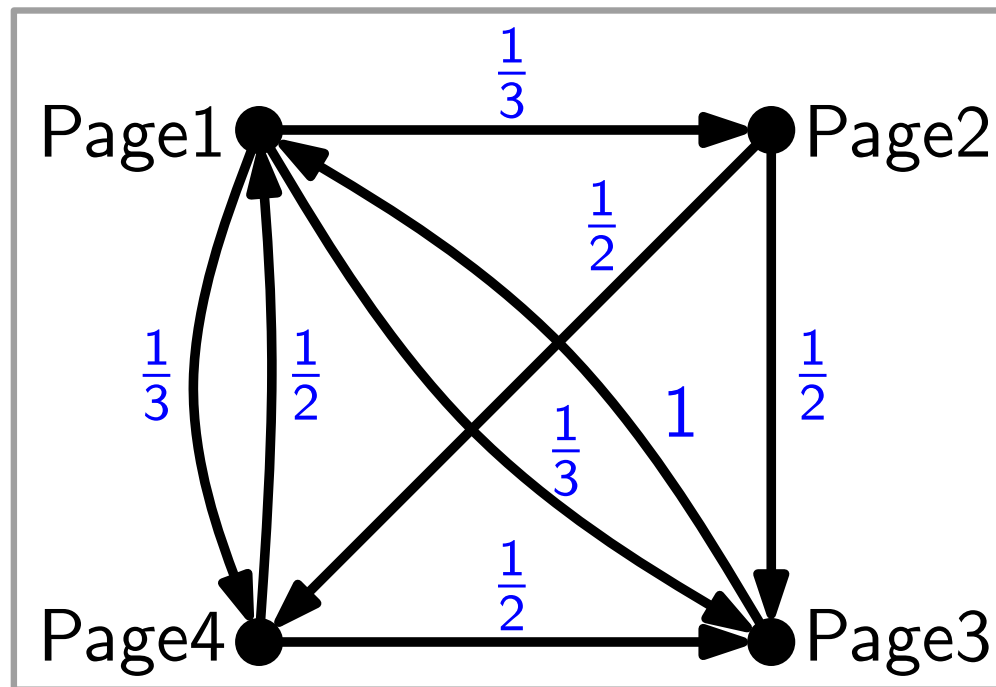
Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form  $c \cdot (12, 4, 9, 6)^\top$ .

Normiere: Einträge von  $r$  summieren sich zu 1.  
(probabilistischer Eigenvektor).

# Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt  $A \cdot r = r$ .

*Seitenrangvektor*

D.h.  $r$  ist Eigenvektor von  $A$  für den Eigenwert 1.

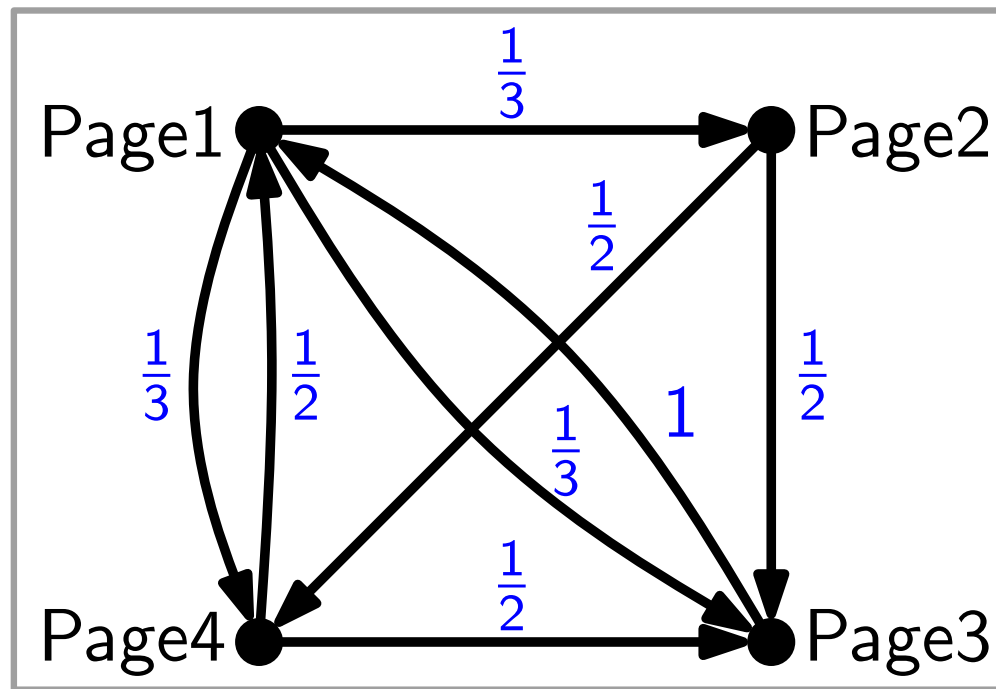
Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form  $c \cdot (12, 4, 9, 6)^\top$ .

Normiere: Einträge von  $r$  summieren sich zu 1.  
(probabilistischer Eigenvektor).

# Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt  $A \cdot r = r$ .

*Seitenrangvektor*

D.h.  $r$  ist Eigenvektor von  $A$  für den Eigenwert 1.

Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

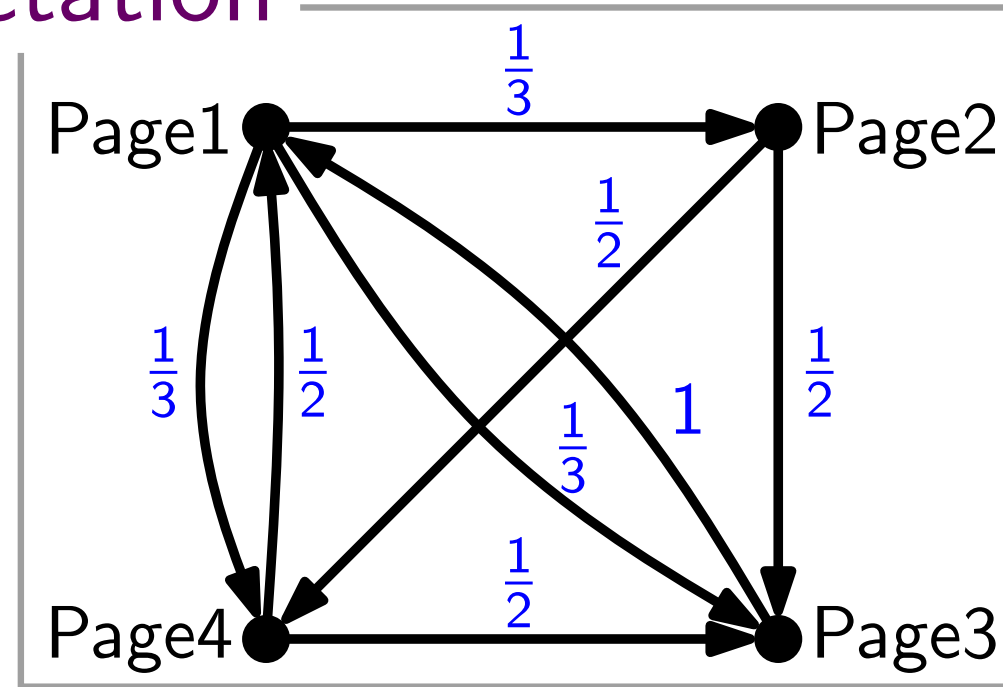
Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form  $c \cdot (12, 4, 9, 6)^\top$ .

Normiere: Einträge von  $r$  summieren sich zu 1.  $\Rightarrow r = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$   
(probabilistischer Eigenvektor).

# Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

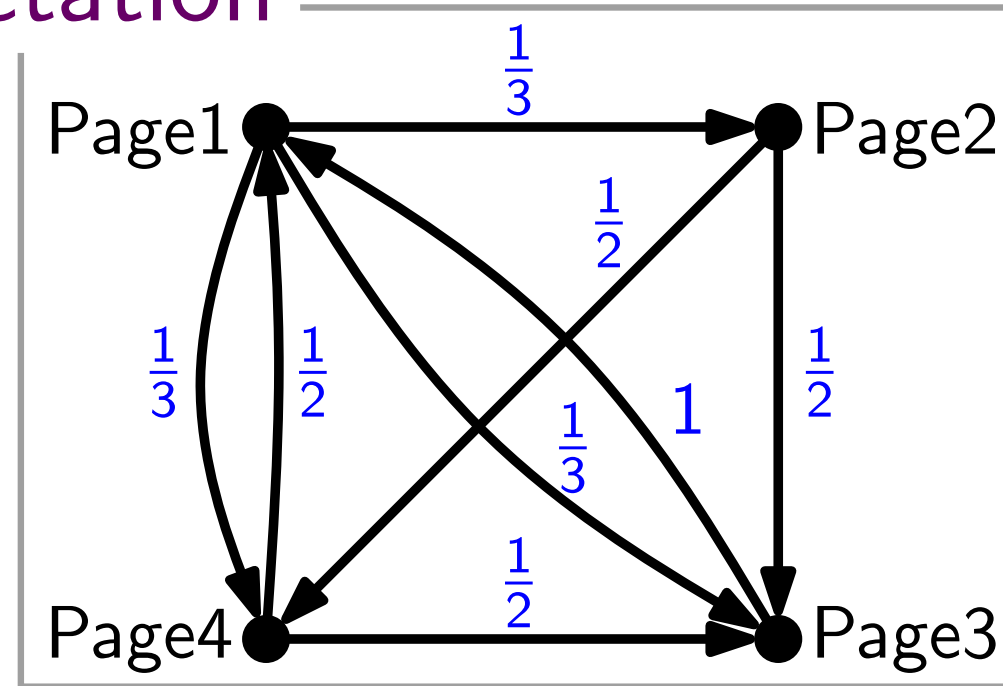


# Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung  $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$ .



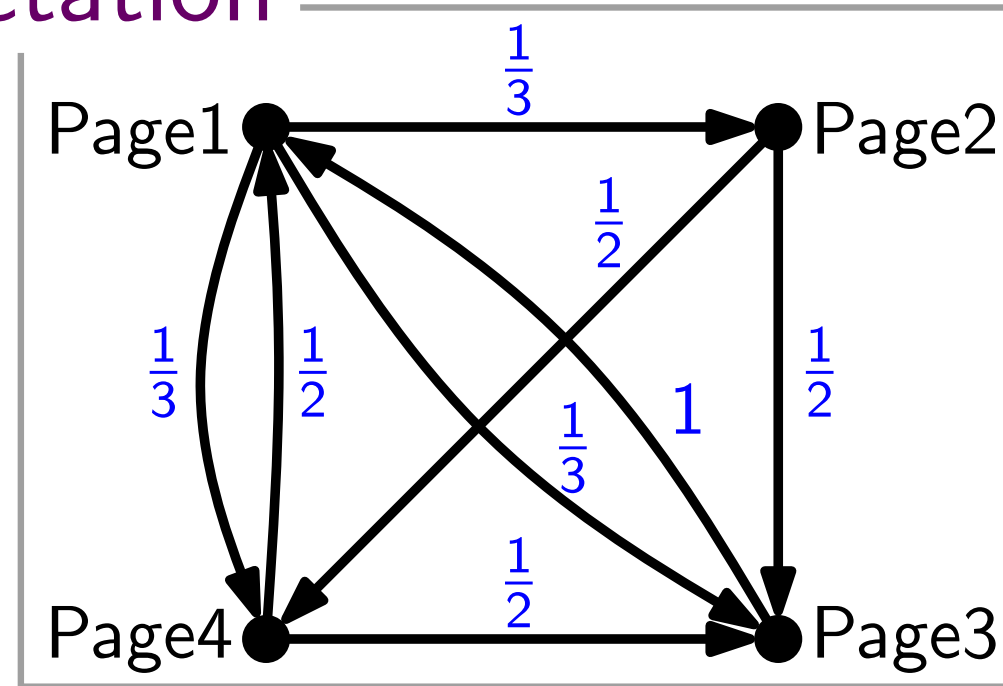
# Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung  $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$ .

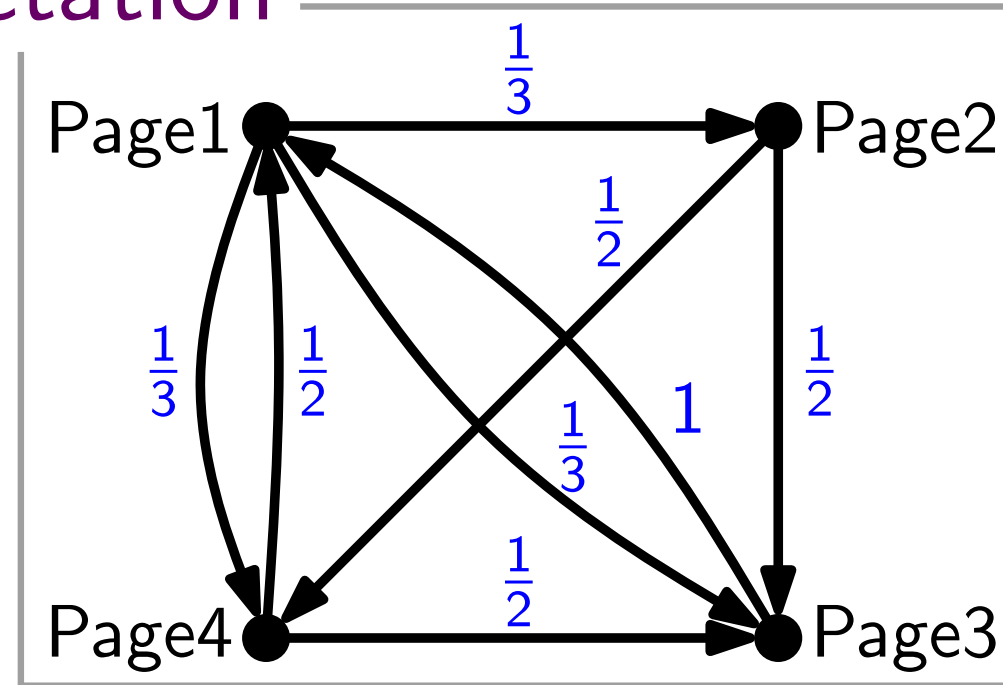
In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.



# Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.



⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung  $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$ .

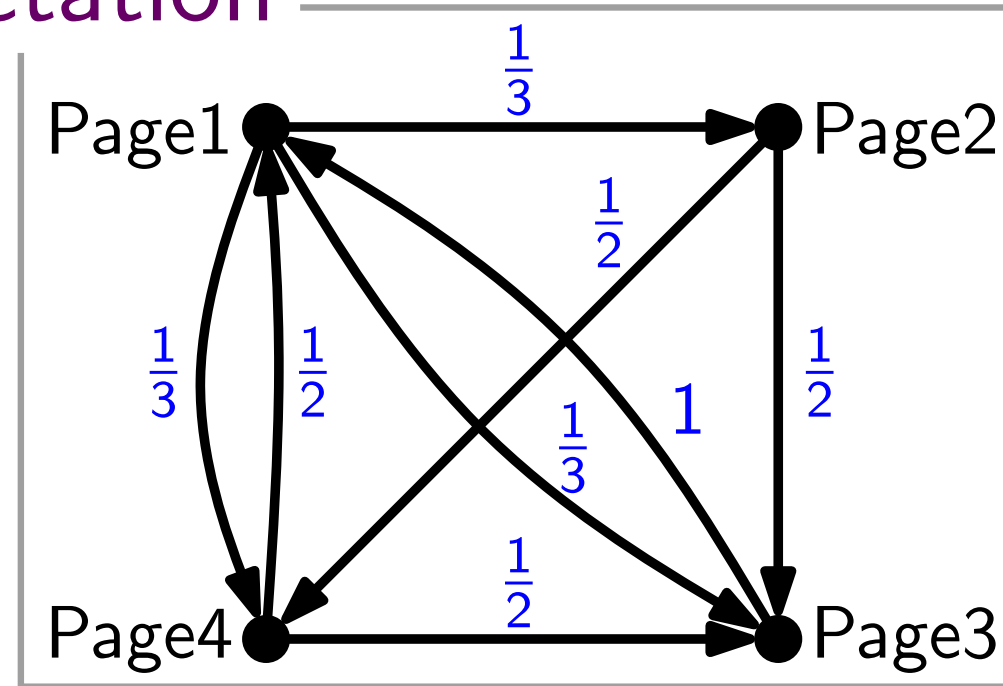
In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration  $i$  ist  $r_i = A^i \cdot r_0$ .

# Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.



⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung  $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$ .

In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

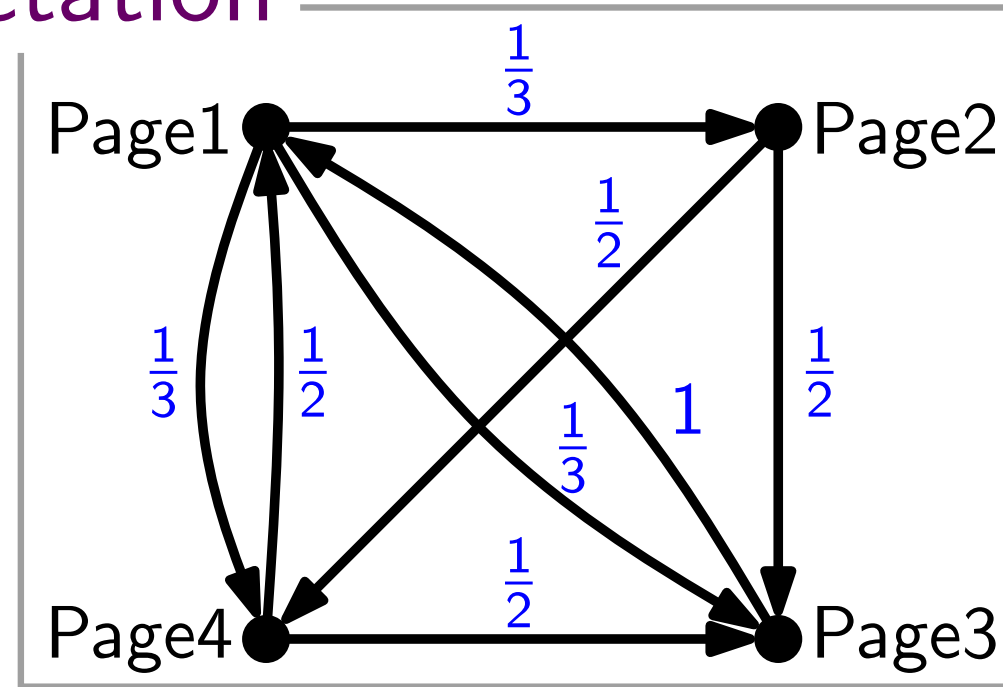
⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration  $i$  ist  $r_i = A^i \cdot r_0$ .

⇒ Stationäre Verteilung ist probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1

# Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.



⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung  $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$ .

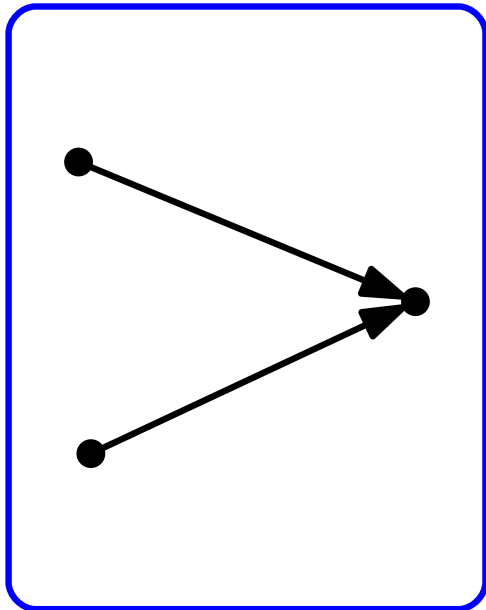
In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration  $i$  ist  $r_i = A^i \cdot r_0$ .

⇒ Stationäre Verteilung ist probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1, also hier  $r = \frac{1}{31} (12, 4, 9, 6)^\top$ .

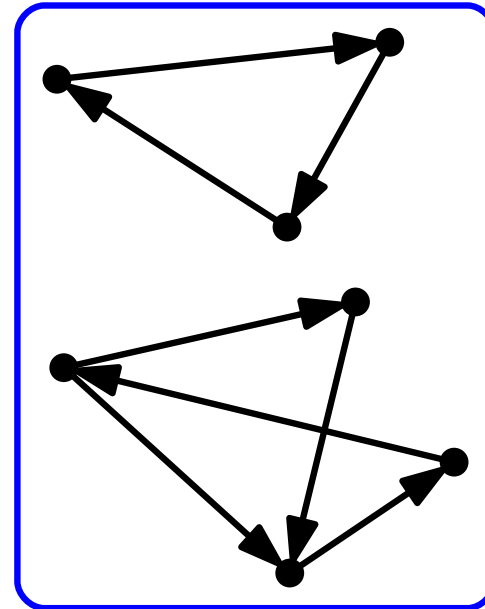
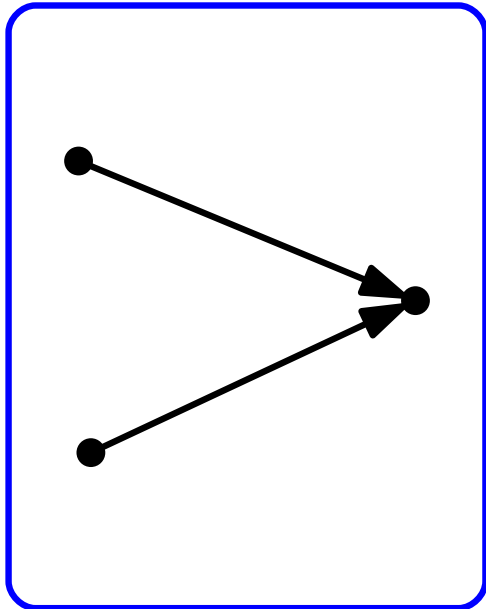
# Probleme

- Gewicht „verschwindet“ in Knoten ohne ausgehende Kanten (nur „Eigenvektor“ 0).



# Probleme

- Gewicht „verschwindet“ in Knoten ohne ausgehende Kanten (nur „Eigenvektor“ 0).
- Falls Graph nicht zusammenhängend, existieren unendlich viele probabilistische Eigenvektoren zum Eigenwert 1 (Linearkombination der Eigenvektoren der ZK).



# Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

# Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

# Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

# Lösung von Page und Brin



(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

Sei  $B = (1/n)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Die neue Übergangsmatrix  $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$  hat folgende Eigenschaften:

# Lösung von Page und Brin



(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

Sei  $B = (1/n)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Die neue Übergangsmatrix  $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$  hat folgende Eigenschaften:

- $M$  hat nur positive Einträge.

# Lösung von Page und Brin



(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

Sei  $B = (1/n)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Die neue Übergangsmatrix  $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$  hat folgende Eigenschaften:

- $M$  hat nur positive Einträge.  
(Also ist  $M$  positiv.)

# Lösung von Page und Brin



(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

Sei  $B = (1/n)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Die neue Übergangsmatrix  $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$  hat folgende Eigenschaften:

- $M$  hat nur positive Einträge.  
(Also ist  $M$  *positiv*.)
- Alle Spaltensummen von  $M$  sind 1

# Lösung von Page und Brin



(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

Sei  $B = (1/n)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Die neue Übergangsmatrix  $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$  hat folgende Eigenschaften:

- $M$  hat nur positive Einträge.  
(Also ist  $M$  *positiv*.)
- Alle Spaltensummen von  $M$  sind 1, da dies für  $A$  u.  $B$  gilt.

# Lösung von Page und Brin



(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

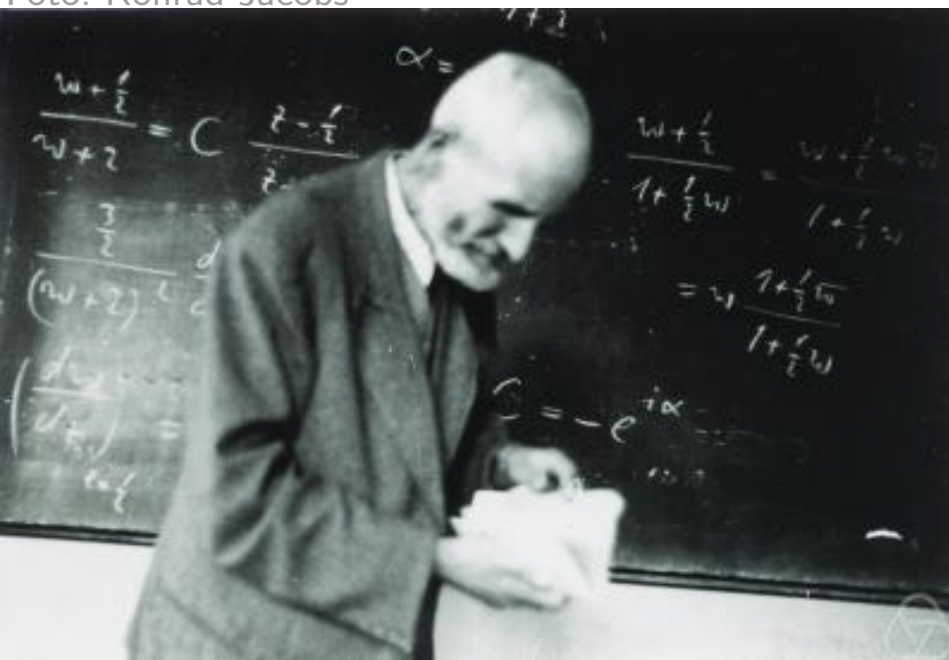
Sei  $B = (1/n)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Die neue Übergangsmatrix  $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$  hat folgende Eigenschaften:

- $M$  hat nur positive Einträge.  
(Also ist  $M$  *positiv*.)
- Alle Spaltensummen von  $M$  sind 1, da dies für  $A$  u.  $B$  gilt.  
(Also ist  $M$  *spalten-stochastisch*.)

# Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron  
(Frankenthal 1880  
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



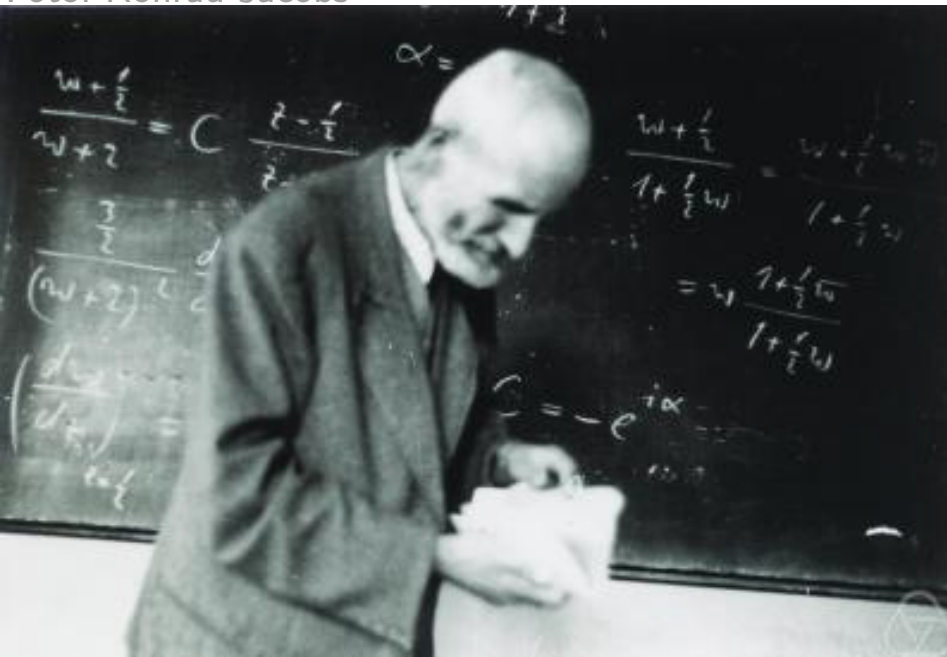
Ferdinand Georg Frobenius  
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

# Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

(i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron  
(Frankenthal 1880  
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



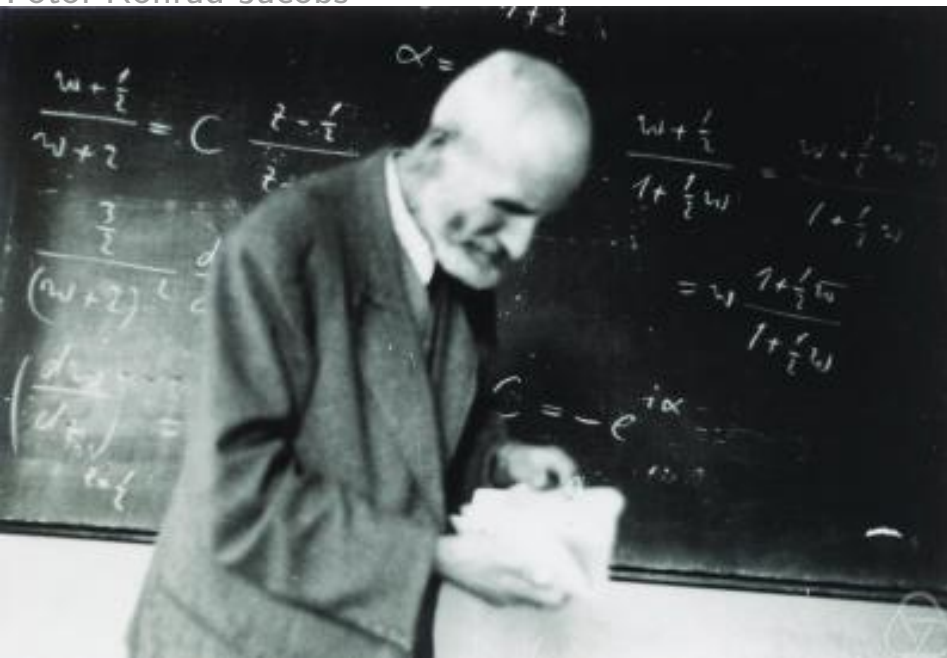
Ferdinand Georg Frobenius  
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

# Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

- (i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,
- (ii) 1 ist der größte Eigenwert,

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron  
(Frankenthal 1880  
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



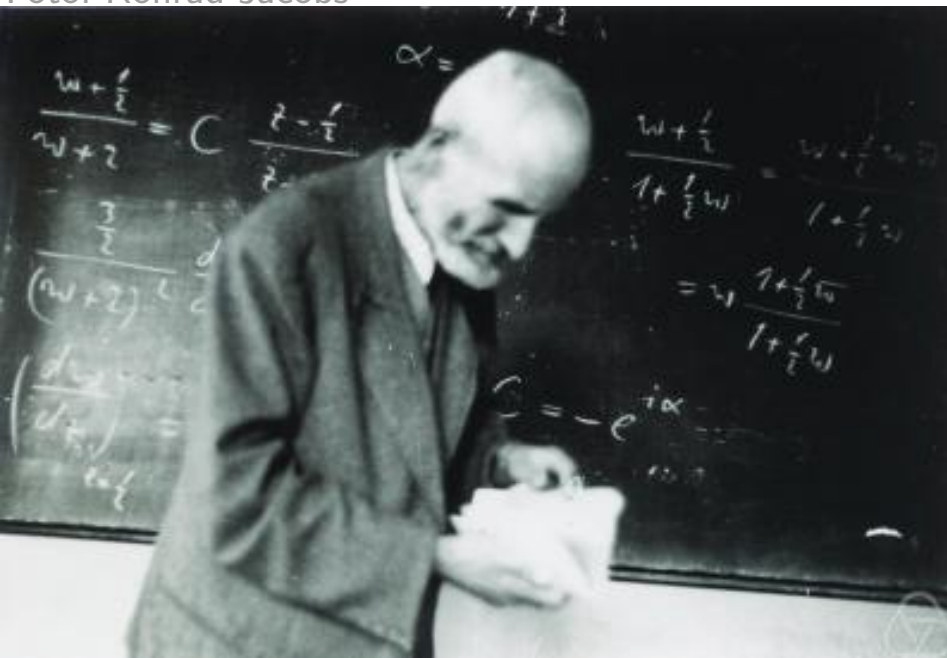
Ferdinand Georg Frobenius  
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

# Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

- (i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,
- (ii) 1 ist der größte Eigenwert,
- (iii) es gibt einen eindeutigen Eigenvektor  $r$  zum Eigenwert 1, dessen Einträge sich zu 1 summieren (probabilistischer Eigenvektor); alle Einträge von  $r$  sind positiv.

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron  
(Frankenthal 1880  
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



Ferdinand Georg Frobenius  
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix.

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix.  
Sei  $r$  ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1.

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix.  
Sei  $r$  ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1.  
Sei  $r_0$  ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle  $1/n$  sind.

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix. Sei  $r$  ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei  $r_0$  ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle  $1/n$  sind. Dann konvergiert die Folge  $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^k r_0, \dots$  gegen den Vektor  $r$ .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix. Sei  $r$  ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei  $r_0$  ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle  $1/n$  sind. Dann konvergiert die Folge  $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^k r_0, \dots$  gegen den Vektor  $r$ .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor  $r$  für  $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$  mit

- Übergangsmatrix  $A$  (Web-Graph!) und
- Dämpfungsfaktor  $p$

kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix. Sei  $r$  ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei  $r_0$  ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle  $1/n$  sind. Dann konvergiert die Folge  $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^k r_0, \dots$  gegen den Vektor  $r$ .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor  $r$  für  $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$  mit

- Übergangsmatrix  $A$  (Web-Graph!) und
- Dämpfungsfaktor  $p$

kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Dies ist häufig schneller als die exakte Berechnung.

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix. Sei  $r$  ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei  $r_0$  ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle  $1/n$  sind. Dann konvergiert die Folge  $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^k r_0, \dots$  gegen den Vektor  $r$ .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor  $r$  für  $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$  mit

- Übergangsmatrix  $A$  (Web-Graph!) und
- Dämpfungsfaktor  $p$

kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Dies ist häufig schneller als die exakte Berechnung.

Man muss dabei ausnutzen, dass in  $A$  fast alle Einträge 0 sind.