

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

12. Vorlesung

Färben planarer Graphen und Planaritätstest

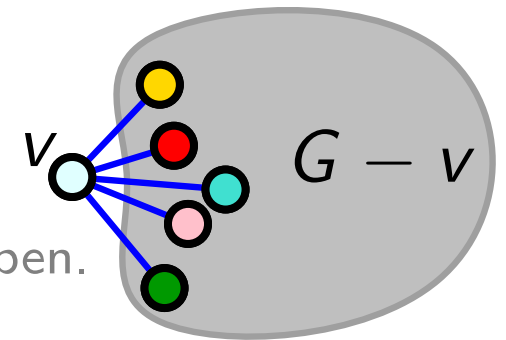
Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.
Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweis. G hat einen Knoten v vom Grad ≤ 5 .
Färbe $G - v$ induktiv. $\Rightarrow N(v)$ verwendet ≤ 5 Farben.
Nimm sechste Farbe für v .

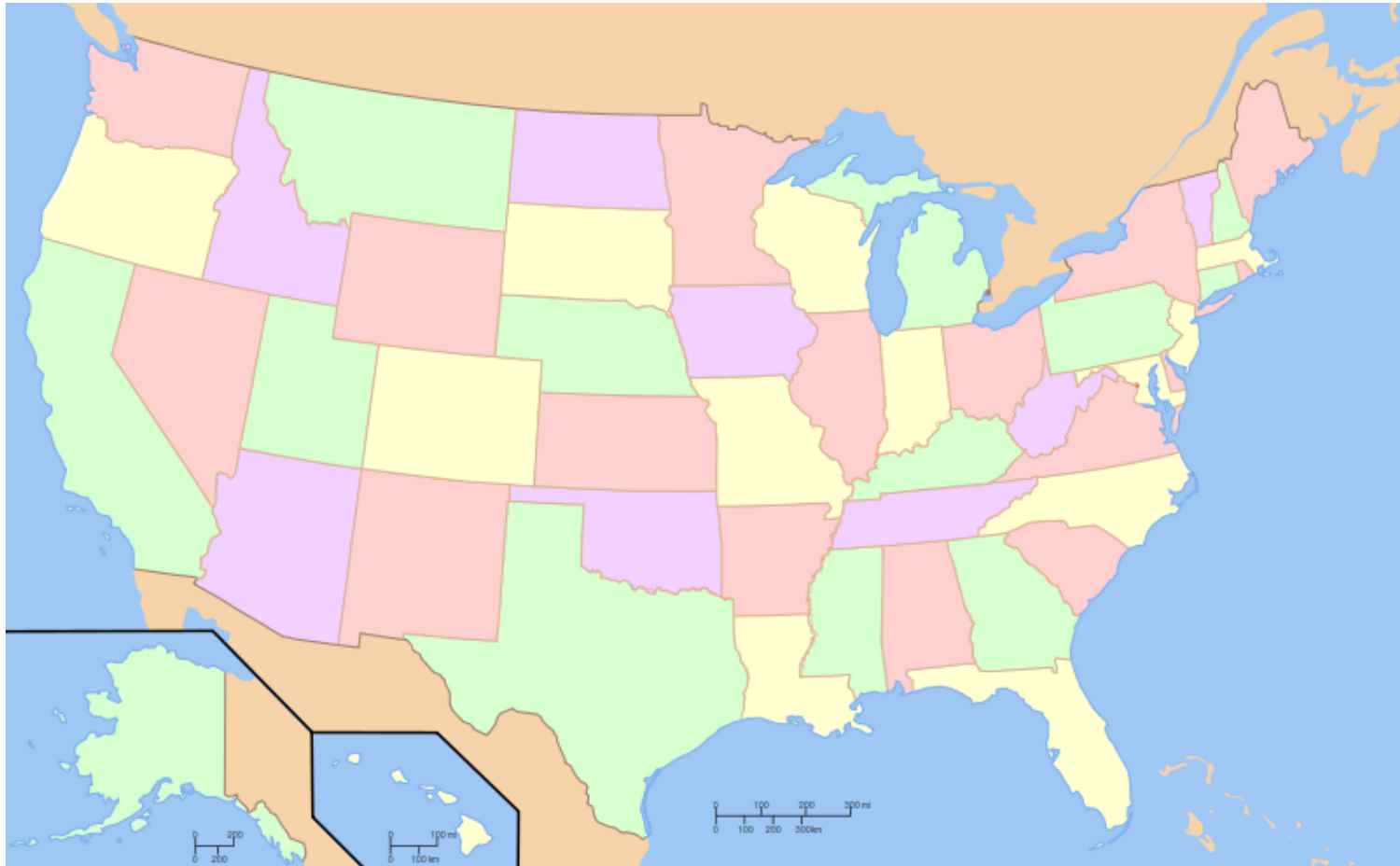


Satz. *Fünf-Farben-Satz* [Heawood 1890]
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Percy John Heawood
1861 Newport, GB
1955 Durham, GB



Der Vier-Farben-Satz von 1976

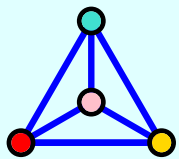


By User:Derfel73; User:Dbenbenn
[CC BY-SA 3.0], via Wikimedia Commons

Satz.

Vier-Farben-Satz

Jeder planare Graph ist 4-färbbar.



[Appel & Haken 1976]

[Robertson, Sanders, Seymour, Thomas 1997]

Eine andere Art von Färbung

Def. Gegeben ein Graph G und für jeden Knoten v von G eine Liste L_v von „Farben“, so ist eine *Listenfärbung* von G eine Abbildung $\lambda: V(G) \rightarrow \bigcup_v L_v$ mit

- $\lambda(v) \in L_v$ und
- $\lambda(u) \neq \lambda(v) \quad \forall uv \in E(G)$.

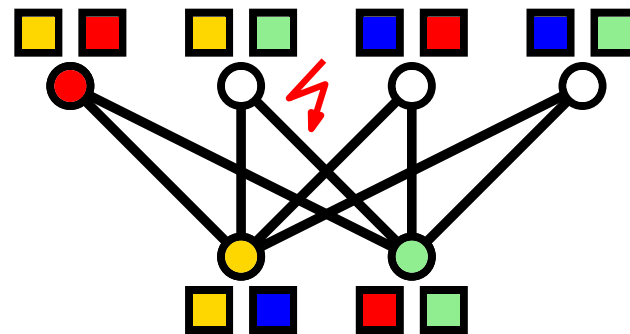
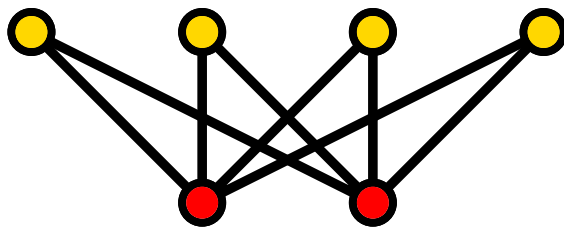
Bsp. Eine „normale“ Färbung $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ entspricht einer Listenfärbung mit $L_v = \{1, \dots, k\}$ für alle $v \in V(G)$.

Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist k -listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar $\not\Rightarrow k$ -färbbar.

Bsp. Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar – aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.



Listenfärbbarkeit planarer Graphen

Satz. *Nicht-Vier-Farben-Satz* [Voigt, 1993]
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.



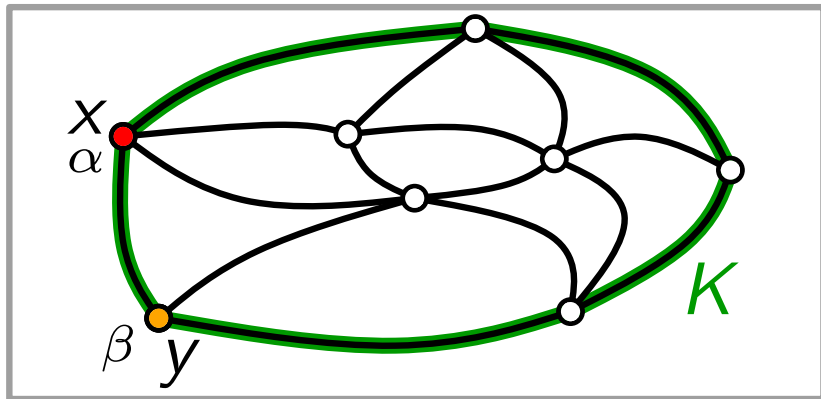
Carsten Thomassen
1948 in Grindsted, DK

Satz. Jeder planare Graph
ist 5-*listenfärbbar*. [Thomassen 1994]
(also auch 5-färbbar!)



Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



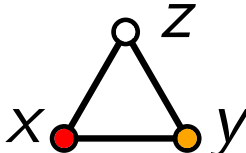
Thomassens Trick:
*Verschärfe Aussage,
beweise mit Induktion!*

Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

Bew. Per Induktion über $n = |V(G)|$.

$n = 3$:  Färbe z mit Farbe $\gamma \in L_z \setminus \{\alpha, \beta\}$. ✓

Induktionsschritt $n > 3$

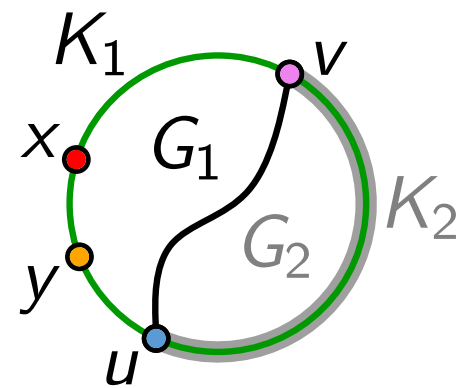
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



Fall 2: K hat keine Sehne.

Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

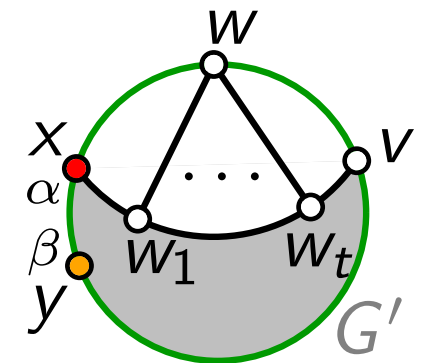
Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$. $G' = G - w$ ist fast trianguliert.

$\Rightarrow G'$ mit Listen L' erfüllt IV $\Rightarrow$ 5-Listenfärbung von G'

Färbe w mit $\{\gamma, \delta\} \setminus \text{Farbe}(v) \Rightarrow$ 5-Listenfärbung von G ✓ □



Planaritätstest

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.



John Edward Hopcroft
*1939, Seattle, WA, U.S.A.



Robert Endre Tarjan
*1948 Pomona, CA, USA

Ziemlich kompliziert! $\Rightarrow$

Wir behandeln einfacheren Algorithmus mit Laufzeit $O(n^3)$.

Planaritätstest

Satz. [Auslander & Parter 1961]

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n^3)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Beobachtung.

G planar $\Leftrightarrow$ jede Zusammenhangskomponente von G ist planar.

Also können wir uns auf Algorithmen für zusammenhängende Graphen beschränken.

Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

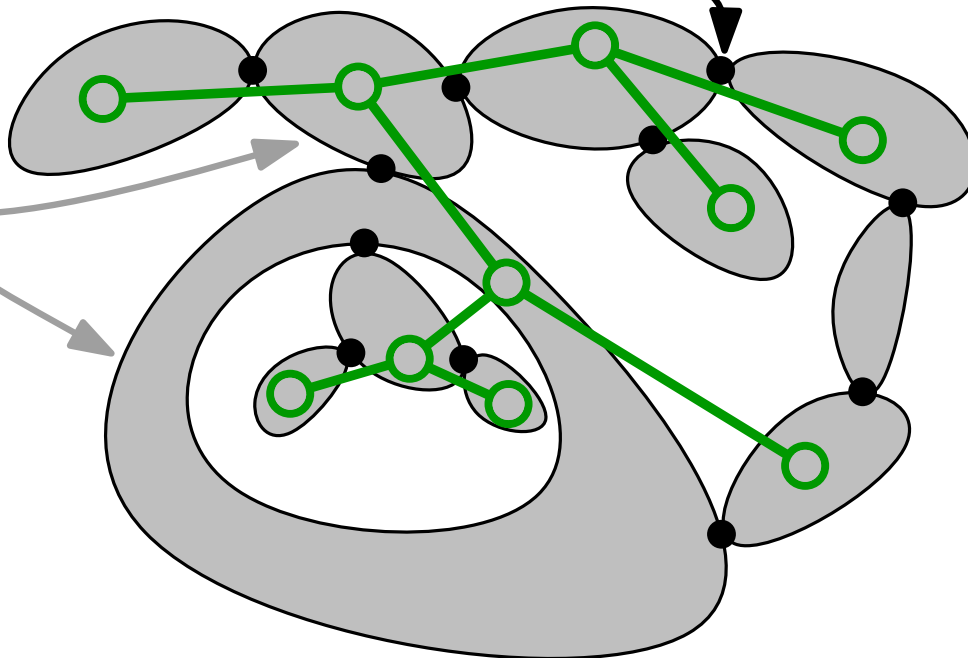
Behauptung. G planar $\Leftrightarrow$
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar $\Leftrightarrow$
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.

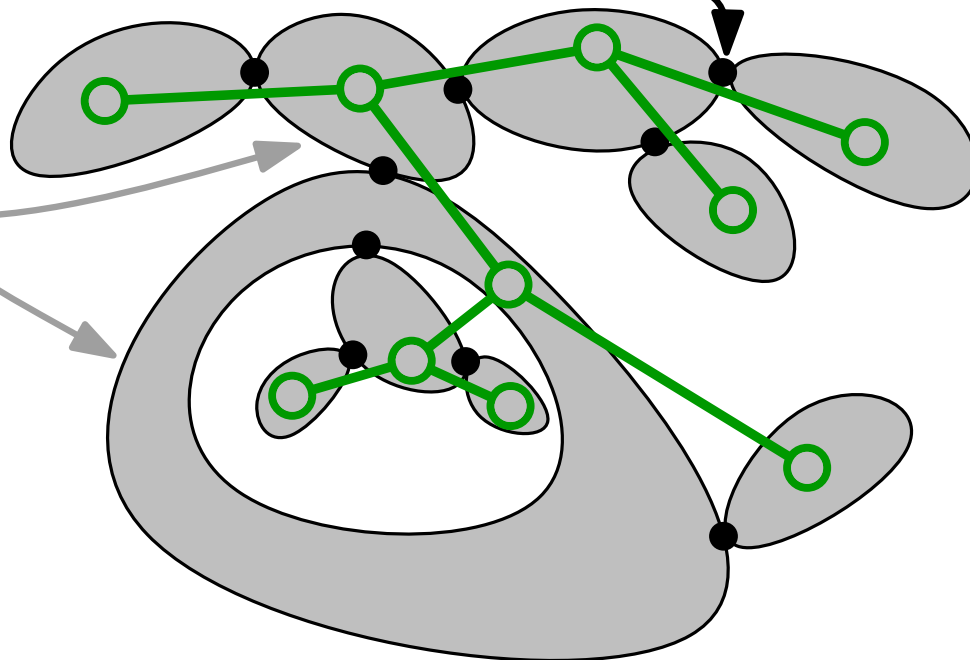


Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar $\Leftrightarrow$
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.



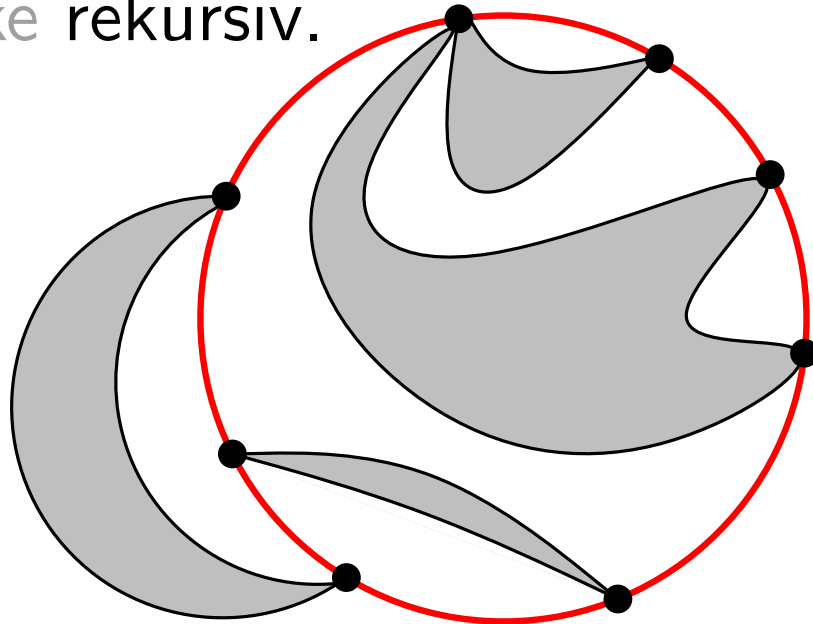
Es genügt, zweifach
zusammenhängende
Graphen zu betrachten.

Ziel und Strategie

Ziel: Planaritätstest für zweifach zusammenhängende Graphen.

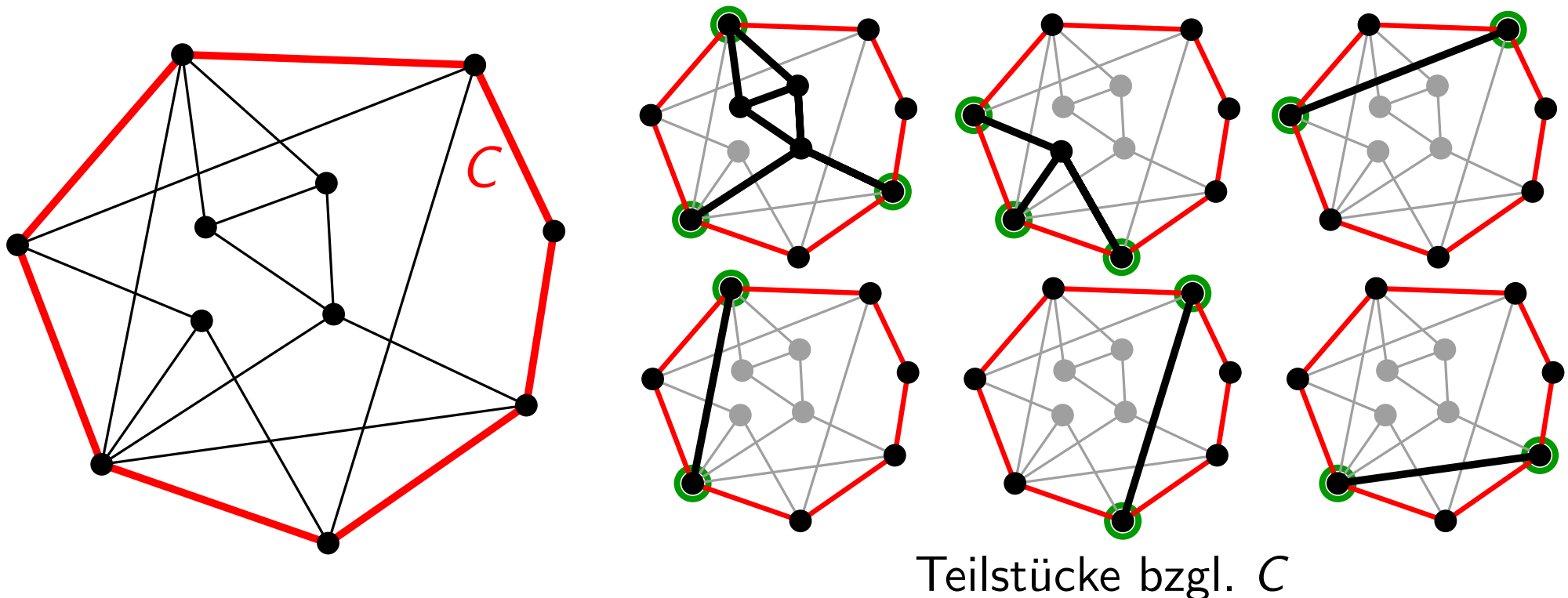
Strategie:

- Berechne separierenden **Kreis** und zerlege Graph in sogenannte **Teilstücke**.
- Untersuche Grobstruktur der **Teilstücke**.
- Teste **Teilstücke** rekursiv.



Teilstück

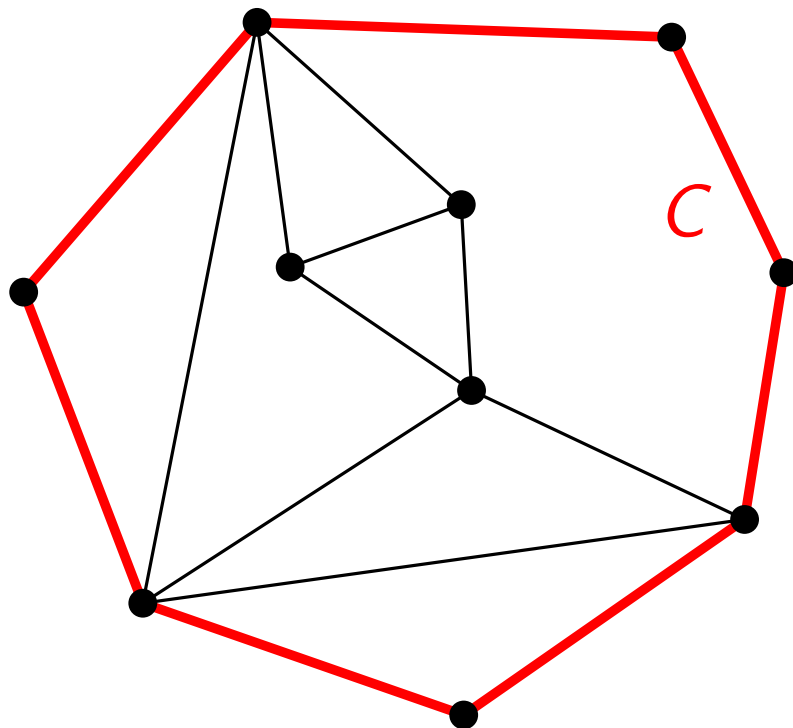
Def. Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten. Dann heißen e und e' *äquivalent* (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt. Die resultierenden Äquivalenzklassen heißen *Teilstücke* (bezüglich C). Jedes Teilstück hat ≥ 2 *Anknüpfungspunkte*.



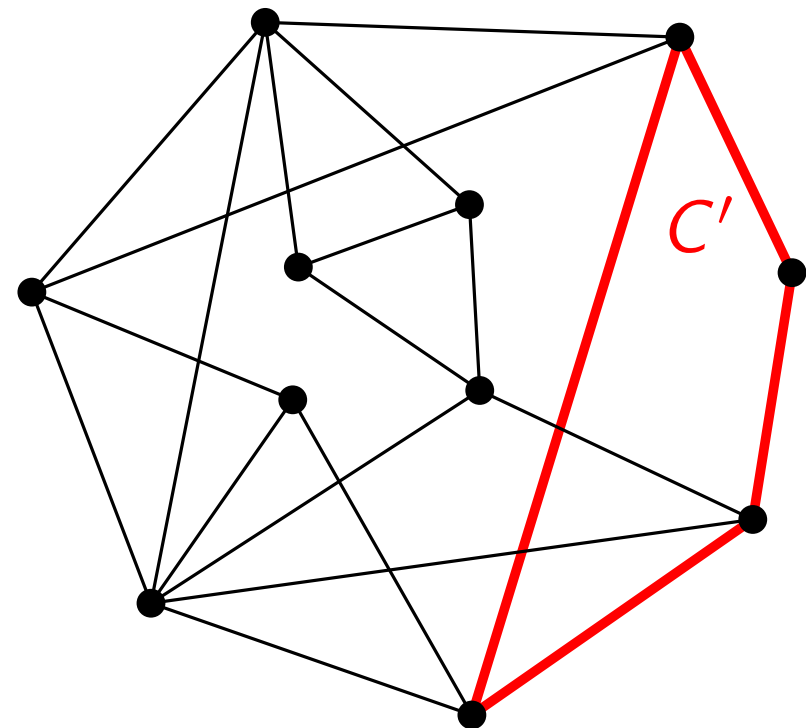
Separierender Kreis

Def. Ein Kreis heißt *separierend*, wenn er mindestens zwei Teilstücke induziert.

separierend



nicht separierend



Existenz eines separierenden Kreises

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

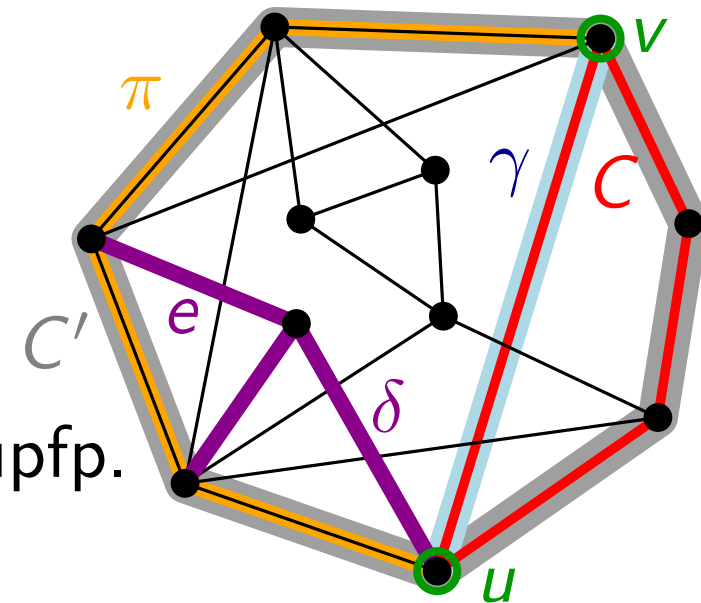
Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfungsp.

Sei π ein u - v -Pfad in P .

Betrachte Kreis $C' := C + \pi - \gamma \Rightarrow \gamma$ ist Teilstück bzgl. C' .

Falls P kein Pfad ist, existiert eine Kante $e \in E(P) \setminus E(\pi)$.

Teilstück δ , das e enthält, ist verschieden von $\gamma \Rightarrow C'$ sep. $\square$

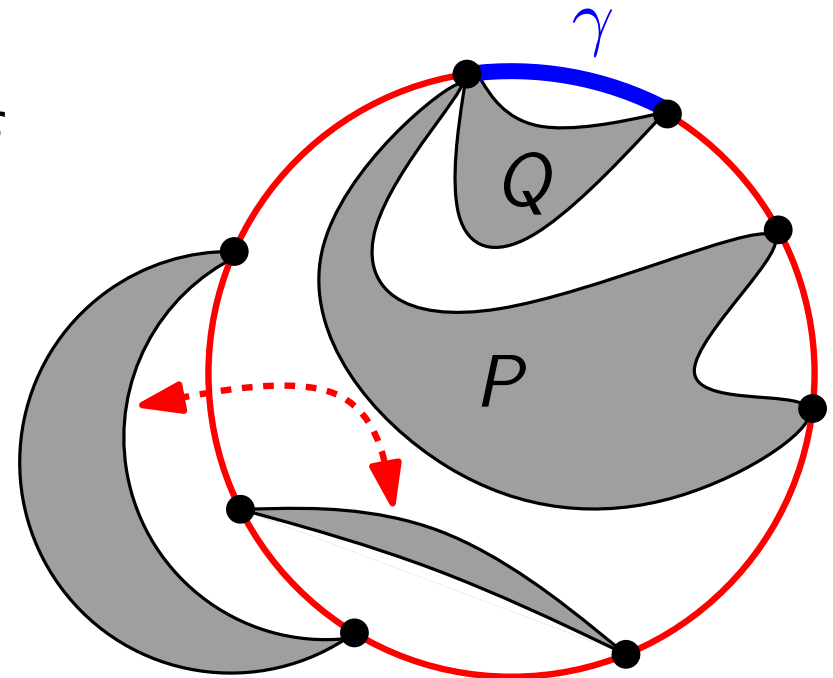


Einander störende Teilstücke

G planar $\Rightarrow$ jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C eingebettet.

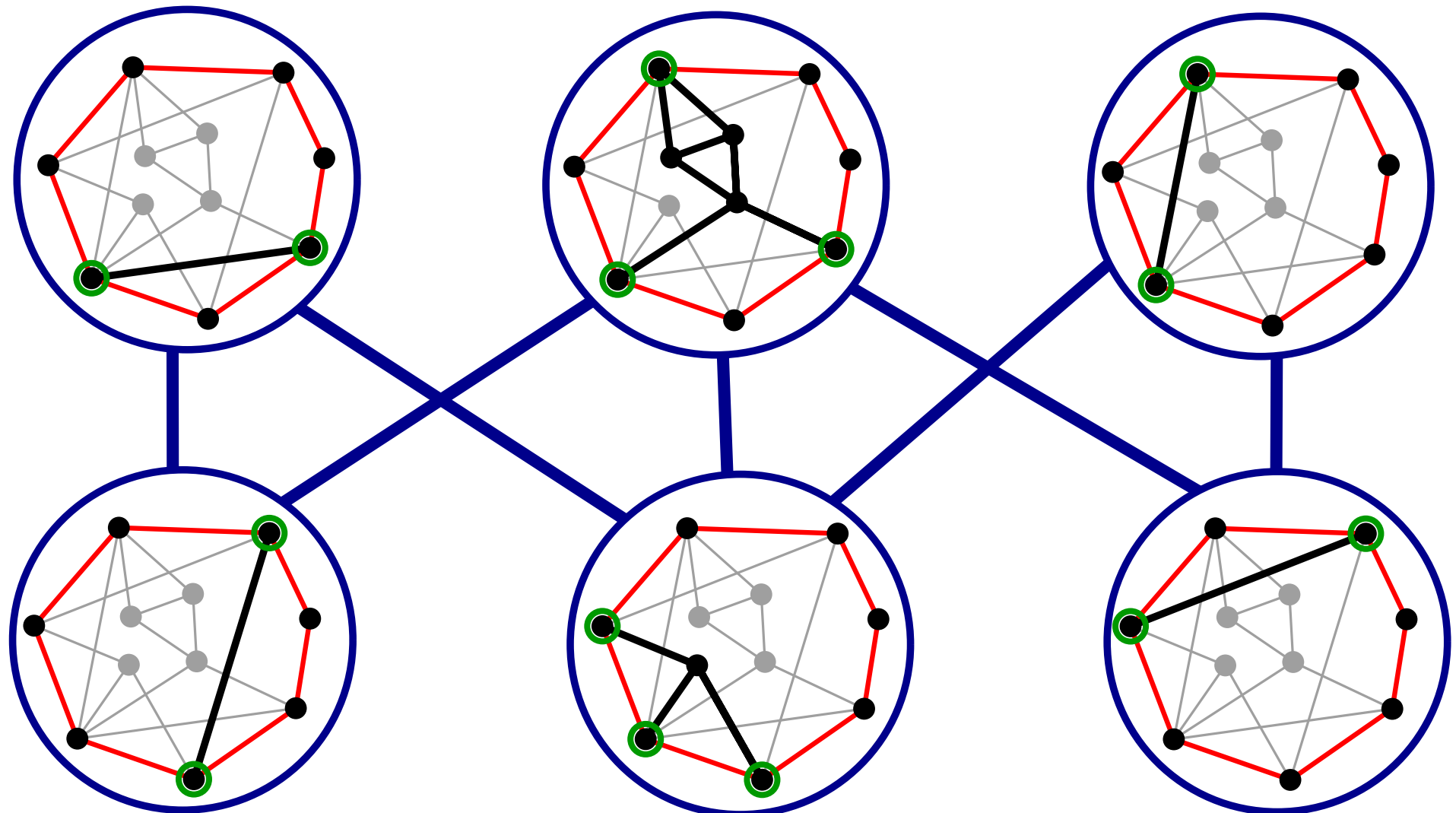
Beob. Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden $\Leftrightarrow$ es existiert ein Teilpfad γ von C , so dass γ alle Anküpfungspunkte von Q enthält, aber kein innerer Knoten von γ Anküpfungspunkt von P ist.

Def. Zwei Teilstücke, die nicht auf der gleichen Seite von C eingebettet werden können, *stören* einander.



Störgraph

Def. Der *Störgraph* I (bezüglich C) hat als Knoten die Teilstücke. Zwei Teilstücke sind adjazent genau dann, wenn sie einander stören.

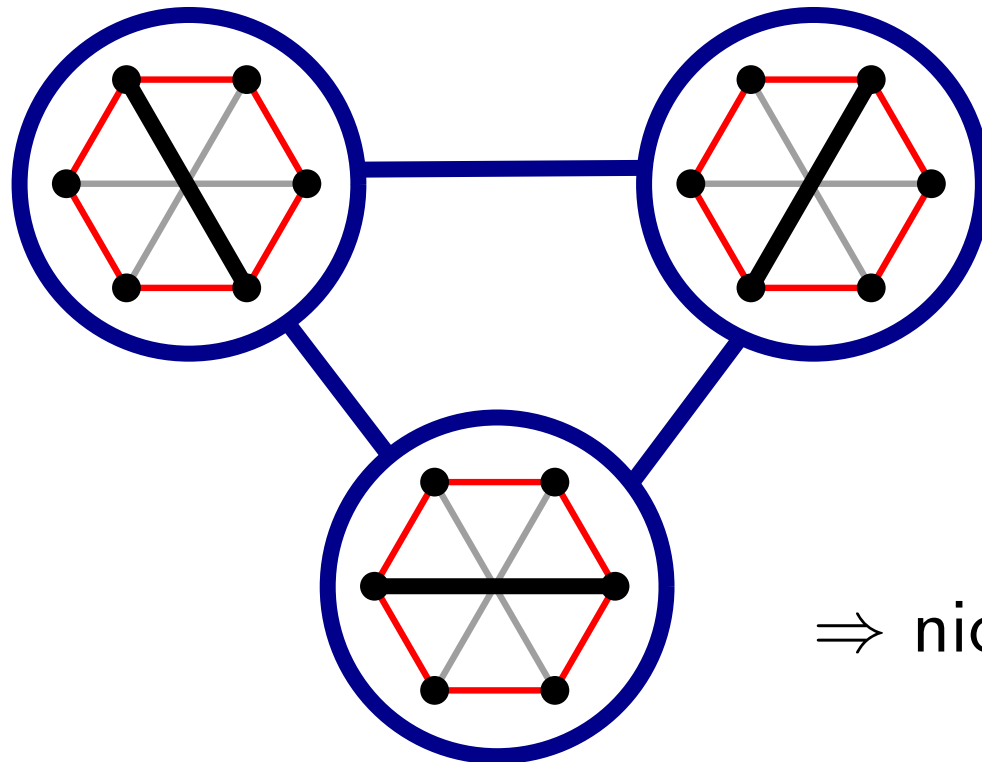
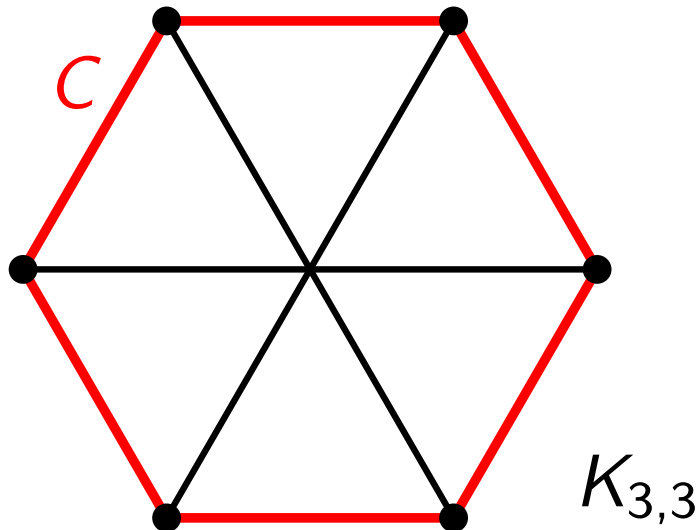


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

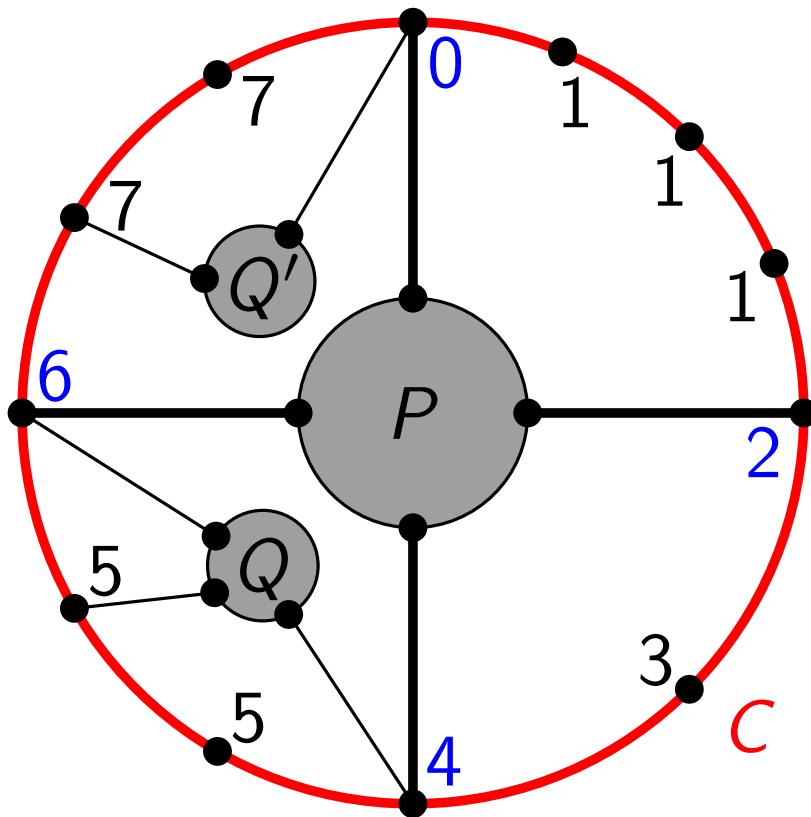


$\Rightarrow$ nicht planar!

Berechnung Störgraph

Beob. Die Nachbarn eines Teilstücks P im Störgraphen lassen sich in $O(n)$ Zeit bestimmen, wenn die Teilstücke bekannt sind.

Der Störgraph lässt sich so in $O(n^2)$ Zeit aufbauen.



Nummeriere Knoten von C mit Nummern $\{0, \dots, 2k - 1\}$ wie abgebildet.

Teilstück Q stört P *nicht* $\Leftrightarrow$ alle Anknüpfungspunkte von Q liegen in einem Intervall der Art

$$[2i, 2i + 2 \bmod (2k + 2)]$$

Planaritätstest

Übung:

Falls G keinen separierenden Kreis hat, ist G planar.

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Berechne Störgraphen I

if I bipartit **then**

return true

else

return false

Übung:

G' ist zweifach zusammenhängend.

Baut nicht-sep. Kreis C in sep. Kreis C' um.

Sei G ein Graph mit sep. Kreis C und Störgraphen I . Dann ist G planar $\Leftrightarrow$
 (i) für jedes Teilstück P ist $C + P$ planar,
 (ii) I ist bipartit.

Korrektheit? Per Induktion über $|E(G)|$ mit Hilfe von Lem₂.

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in $O(n)$ Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf C werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in $O(n^2)$ Zeit.

$\Rightarrow$ Jeder Aufruf (ohne Rek.) in $O(n^2)$ Zeit.

Beh. Anz. der Aufrufe (nicht nur der Teilstücke!) ist $\leq |E(G)|$.

Beweis folgt auf der nächsten Folie!

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $O(n^3)$



Anzahl der rekursiven Aufrufe

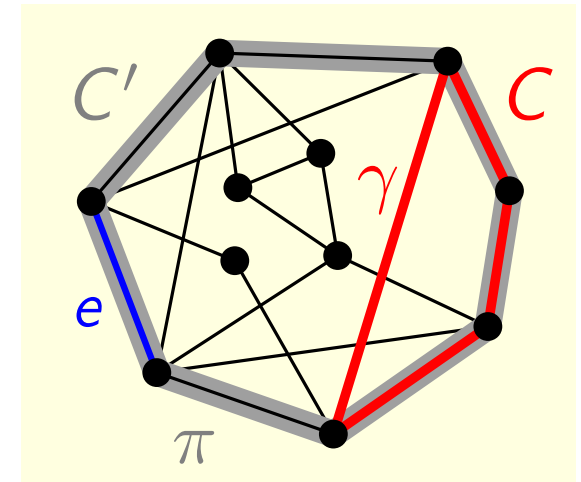
Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

Beweis. Assoziiere mit Aufruf (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
...
  
```



1. Beob. $e_P \in \pi \subset P$

$\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$ für jedes Teilstück $P' \neq P$ von G .

2. Beob. e liegt immer auf dem *neuen* Stück π des sep. Kreises
Frühere Kanten e liegen auf $C \cap C'$ oder auf γ .

Altes Stück des separierenden Kreises!

Pfadteilstück bezüglich C'
– wird in Rekursion ignoriert!