

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

11. Vorlesung

Planare Graphen

Hauptklausur am Mo, 20. Juli

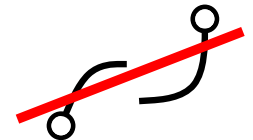
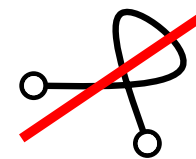
- Die Klausur findet 12:00–14:00 Uhr parallel in Turing- und Zuse-HS statt. (Details kommen kurz vorher per Email.)
- In WueStudy bis **10.07.** anmelden – sonst keine Teilnahme möglich!
Falls Sie nicht teilnehmen werden, melden Sie sich bitte AB (damit wir weniger Klausuren drucken müssen).
- Die Nachklausur findet im Oktober statt, meistens in der Woche vor Vorlesungsbeginn.

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

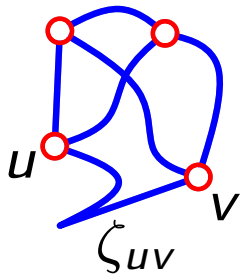
Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



Sei G ein ungerichteter Graph.

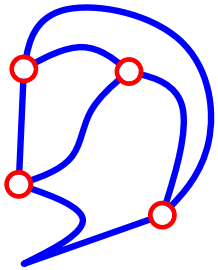
Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls



- für alle $w \in V(G)$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$ (Knoten $\mapsto$ Punkt)
und Einschränkung von ζ auf $V(G)$ injektiv

- für alle $uv \in E(G)$ gilt $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$ (Kante $\mapsto$ J-Kurve)
wobei ζ_{uv} Jordankurve mit $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$
und $\zeta_{uv}(1) = \zeta(v)$.

Ebene Zeichnung, plättbarer Graph

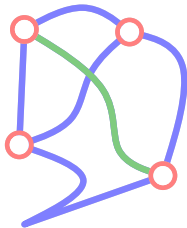
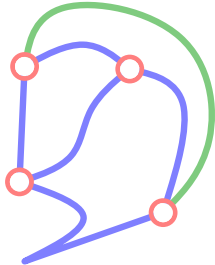


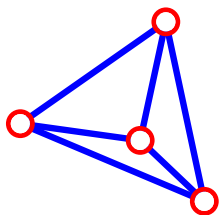
Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd: \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$.

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Def.

Ein Graph G ist *planar* (*plättbar*), falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B. $G =$  planar, denn  ist eine ebene Zeichnung von G .



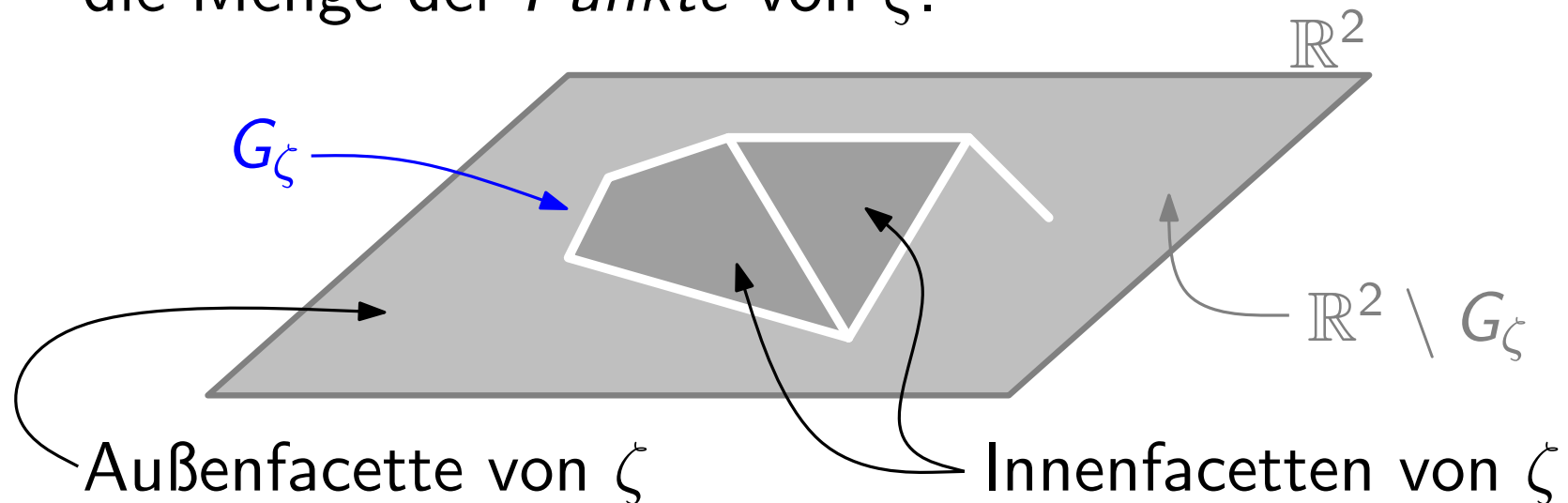
Eine Zeichnung ζ von G heißt *geradlinig*, falls für alle $e \in E(G)$ gilt: ζ_e ist linear (d.h. $\zeta_e([0, 1])$ Strecke).

Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen G und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .



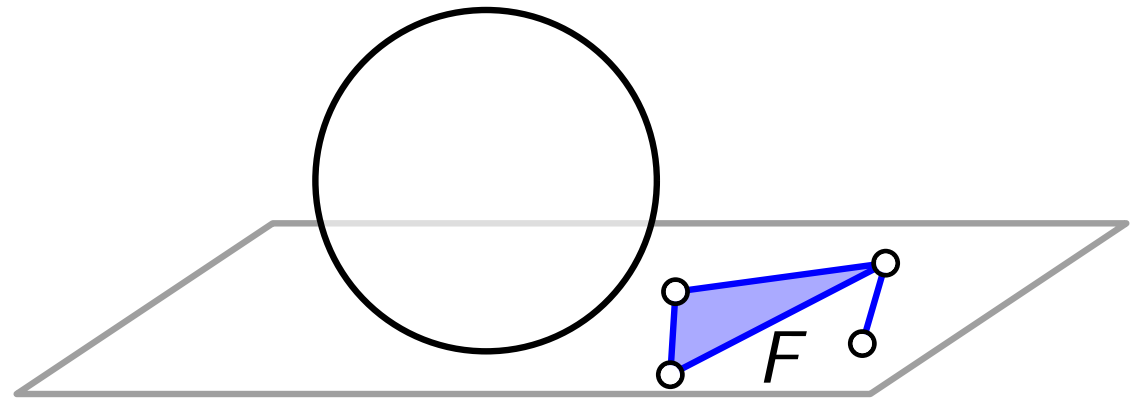
Def. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$ heißen *Facetten* von ζ .

Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Einheitssphäre
im $\mathbb{R}^3$

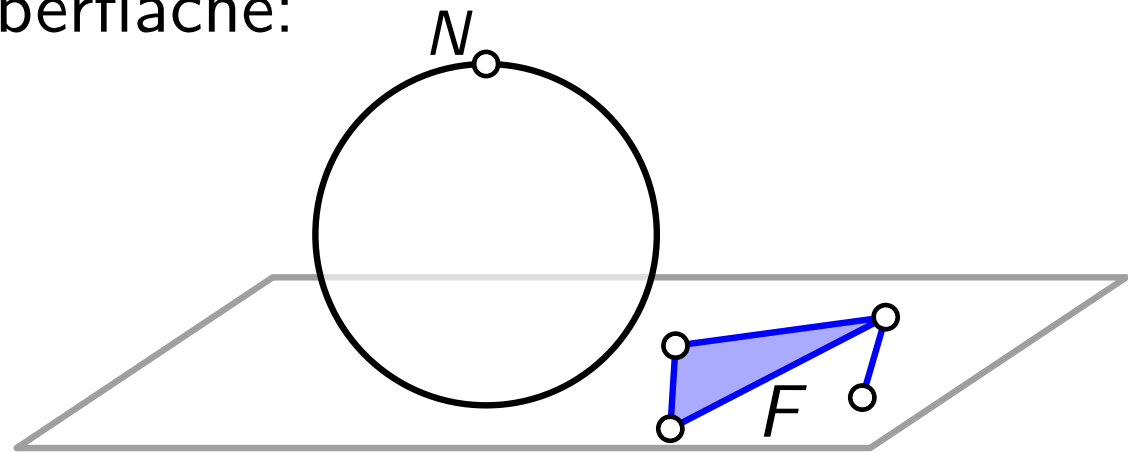


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

höchster
Punkt von S^2

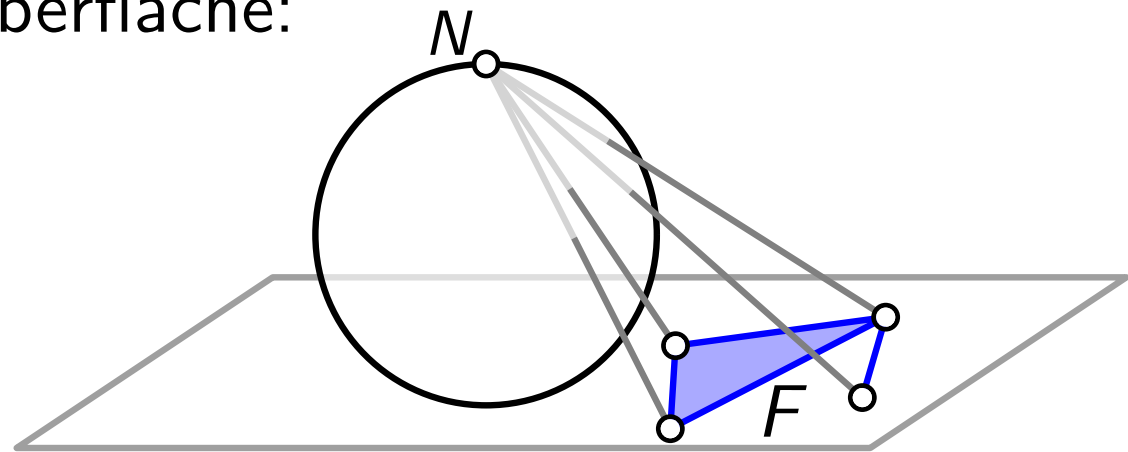


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Zentralprojektion
mit Zentrum N von
 $S^2 \setminus \{N\}$ auf $\mathbb{R}^2$

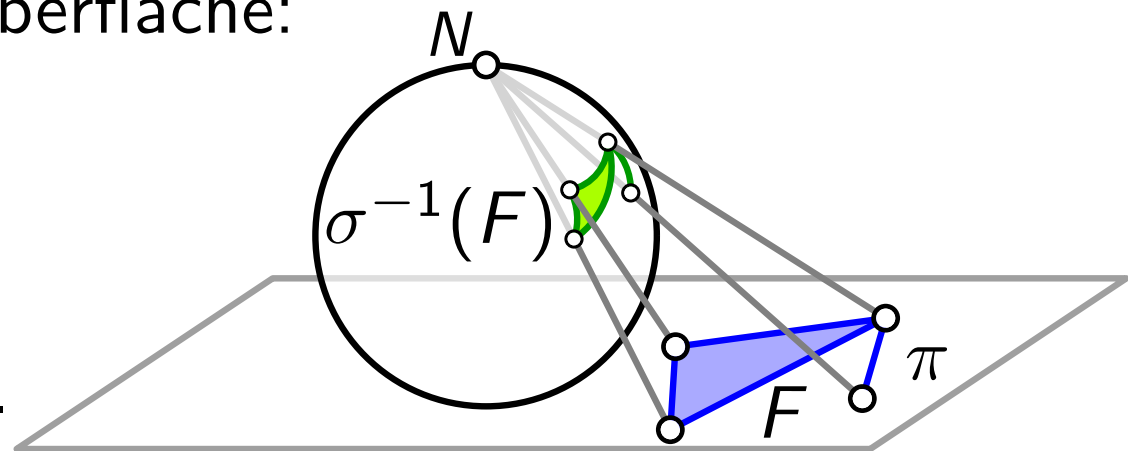


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) die Kugel, so dass $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$.



Projiziere dann zurück in die Ebene.

$\Rightarrow$ Zeichnung von $E(F)$ begrenzt die Außenfacette.

Zeichnung $\pi_F = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} \circ \pi$ ist eben.

Skelette sind planar

Beob.² Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis. Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.

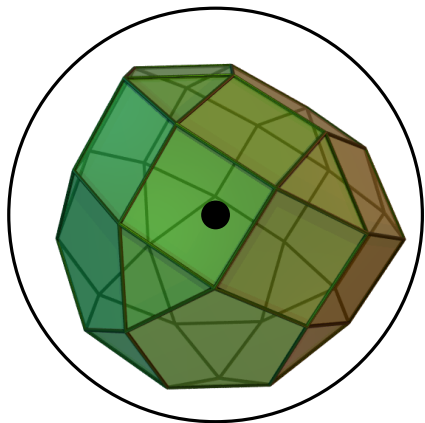
Sei S Kugel mit Zentrum o , so dass $P \subset S$.

Zentralprojektion $\pi_o: P \rightarrow S$ liefert ebene Zeichnung π_S des Skeletts von P auf der Kugeloberfläche von S .

Wähle Nordpol N , so dass $N \notin \pi_S$.

Projiziere π_S mittels σ auf die Ebene.

Ergebnis: $\sigma \circ \pi_S$ ist eben.



Schon wieder Euler . . .

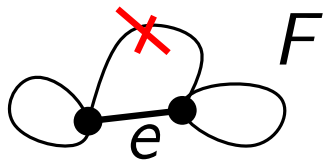


Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



Beweis.

Induktion über m .

$m = 0$: $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$ ✓

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$

$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = RS_m.$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler ...

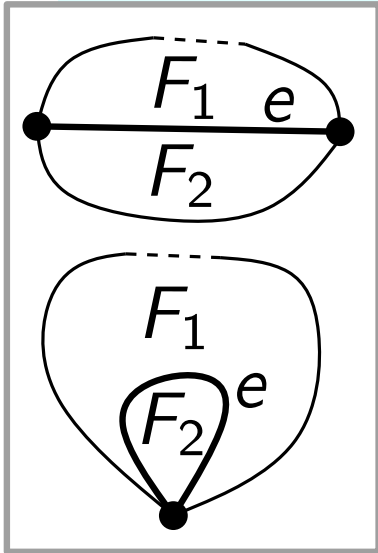


Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e ~~beidseitig zu gleicher Facette F~~
inzident zu Facetten $F_1 \neq F_2$

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k - 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' + 1 = k + 1 = RS_m.$$

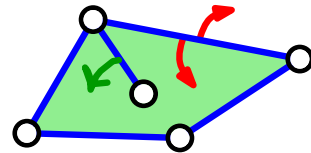
[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]



Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

[da jede Facette eines *einfachen* Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls $n \geq 3$ und $m \geq 3$).]

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\Rightarrow m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Euler

$$\Rightarrow f \leq 2n - 4$$



Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

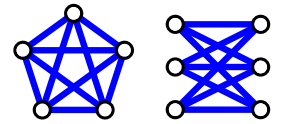
Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
 Angenommen, es gibt nur **2** Knoten vom Grad ≤ 5 .
 $2m = \sum_v \deg(v) \geq (n - 2) \cdot 6 + \mathbf{2} \cdot 1 = 6n - 10$.
Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ in planaren Graphen! $\square$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$ kein Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

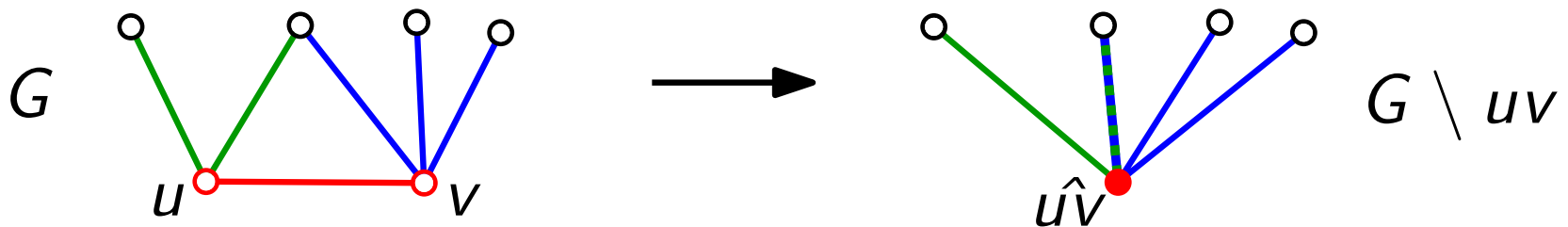
$$2m = 18 \quad < \quad 20 = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f \quad \text{⚡}$$

Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch (*Einfach-*)Kontraktion von uv .
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
Unterschied zur
Kontraktion G/U
bei Multigraphen!

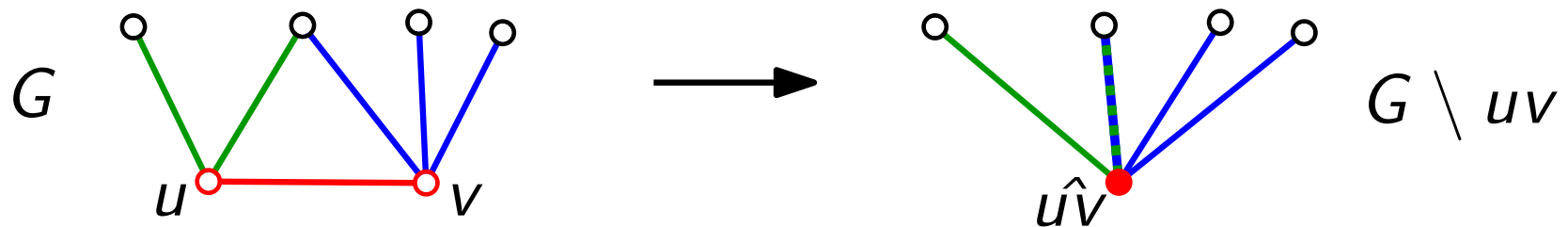


Kontraktionen und Minoren

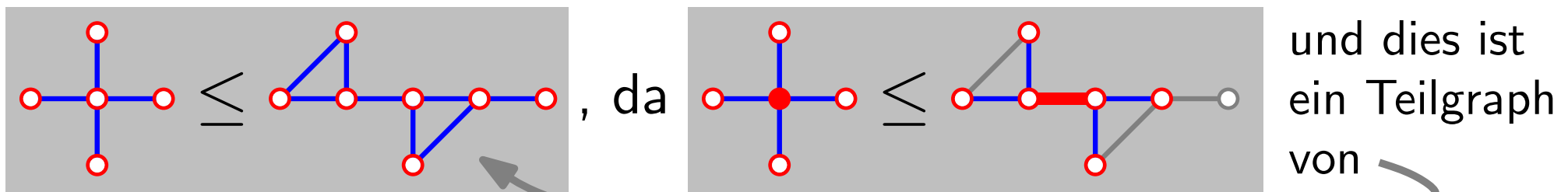
Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch (*Einfach-*)Kontraktion von uv .
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
Unterschied zur
Kontraktion G/U
bei Multigraphen!



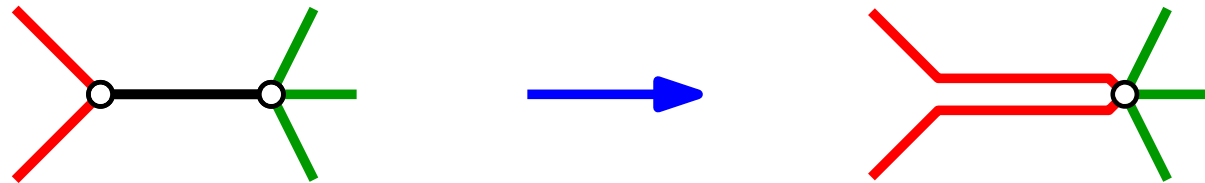
Ein Graph H heißt *Minor* von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.



Ein paar Beobachtungen

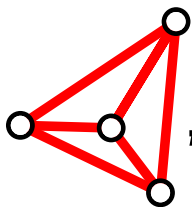
Beob.³ G planar $\Leftrightarrow$ alle Minoren von G sind planar.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



„ $\Leftarrow$ “ G ist Minor von G ($G \leq G$). □

Beob.⁴ Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

Beweis.  , also ist K_4 planar $\Rightarrow$ Beh. □

Satz von Kuratowski

Satz. [Kuratowski 1930: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*]
Sei G ein einfacher Graph. Dann gilt:
 G planar $\Leftrightarrow$ weder K_5 noch $K_{3,3}$ ist Minor von G .



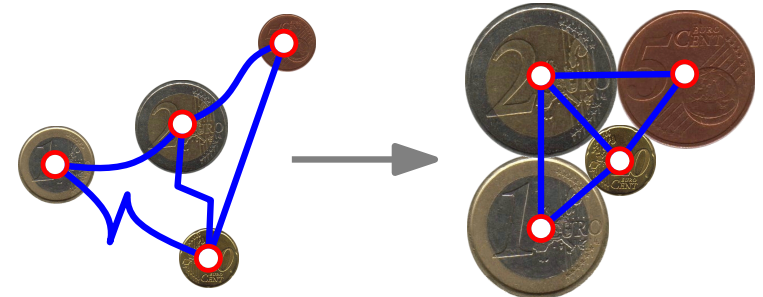
Kazimierz Kuratowski
Warschau 1896–1980 Warschau

Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Satz. [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]
Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

Satz. [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]
Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



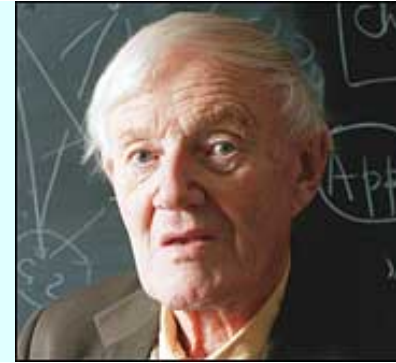
Planare Graphen zeichnen

Satz. [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

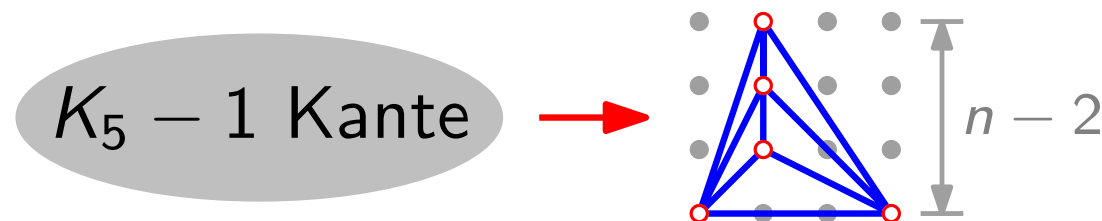
William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



Satz. [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n - 2) \times (n - 2)$ Gitters abgebildet werden.



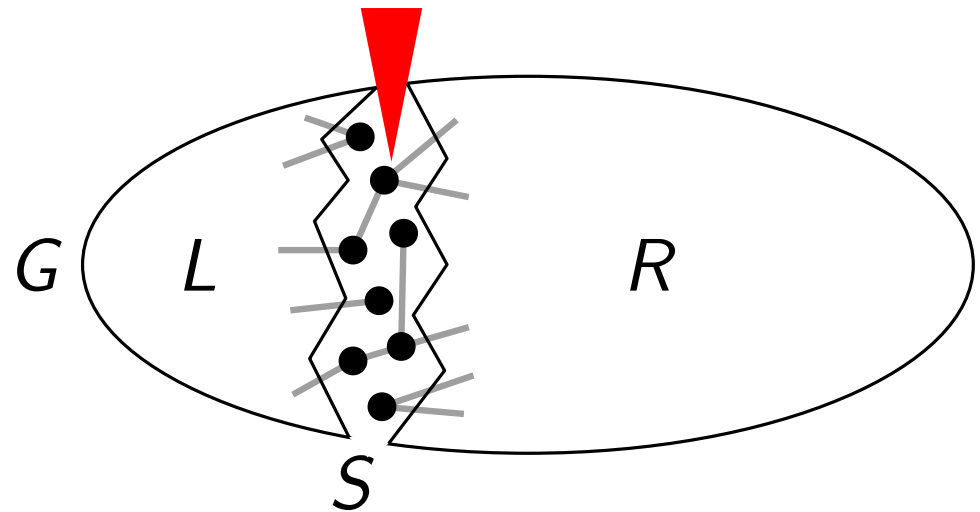
Noch mehr große Sätze

Satz. *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei G ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.
Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge
 $V(G) = L \dot{\cup} S \dot{\cup} R$ von G , so dass

- keine Kante zwischen L und R verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$.

Eine solche Zerlegung
kann in $O(n)$ Zeit
berechnet werden.



Größte Matchings inkrementell

Lemma. Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V(G)$ und sei M größtes Matching in $G - v$.

- (i) Falls G keinen augmentierenden Weg mit Endknoten v enthält,
so ist M größtes Matching in G .
- (ii) Ansonsten sei W ein augmentierender Weg.
Dann ist $M \Delta E(W)$ größtes Matching in G .

Mit einer passenden Repräsentation eines größten Matchings in $G - v$ kann man in $O(|E(G)|)$ Zeit ein größtes Matching in G finden.

Beweis. Übung – jetzt!

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(planarer Graph G)

if $|V(G)| < 5$ **then**

return BruteForceMatching(G)

else

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$ $\Rightarrow$ keine L - R -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

M ist größtes Matching in $G[\bar{V}]$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M =$ größtes Matching in $G[\bar{V}]$ laut Lemma

return M

Korrektheit?

Hier $\bar{V} = V(G) \Rightarrow G[\bar{V}] = G \Rightarrow M$ max. in G

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

if $|V(G)| < 5$ **then** $O(1)$
 return BruteForceMatching(G)

else

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

$T(n) =$ **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n}) \cdot$

$O(n)$

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

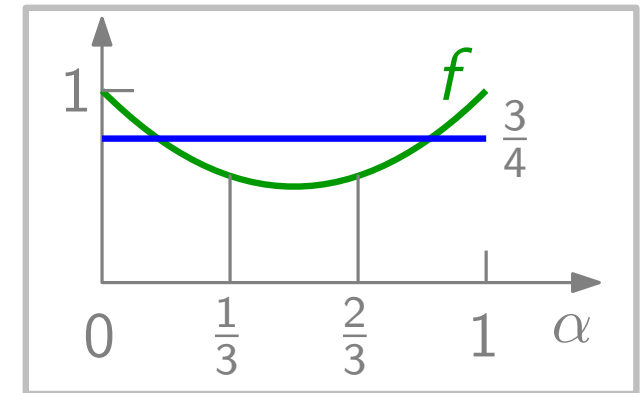
Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$



Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$

[Wir können c' wählen!]

Bew.

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1-\alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{f(\alpha)} + c/c' \right) \\ \leq c'n^{3/2} \quad < 3/4 \Rightarrow \text{Nimm } c' = 4c! \quad \square$$

Ergebnis

Satz. In einem planaren Graphen mit n Knoten kann man in $O(n^{3/2})$ Zeit ein größtes Matching finden.

Zum Vergleich:

$$n = |V(G)|, m = |E(G)|$$

Größtes Matching

Bipartite Graphen	$O(m\sqrt{n})$	[Hopcroft & Karp, 1973]
Allgemeine Graphen	$O(m\sqrt{n})$	[Micali & Vazirani, 1980]

Schwerstes Matching

Planare Graphen*	$O(n^{3/2} \log n)$	[Lipton & Tarjan, 1980]
Allgemeine Graphen	$O(mn \log n)$	[Gabow, 1975]

*) Das Lemma gilt entsprechend für den gewichteten Fall, allerdings mit Laufzeit $O(m \log n)$ statt $O(m)$.