

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

9. Vorlesung

Färbungen, Cliques, unabhängige Mengen
und chordale Graphen

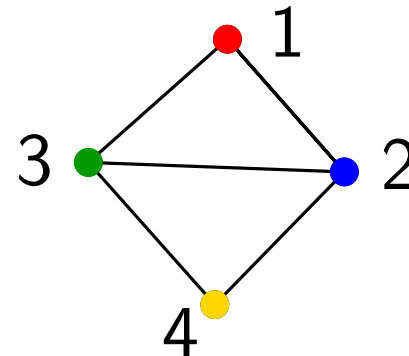
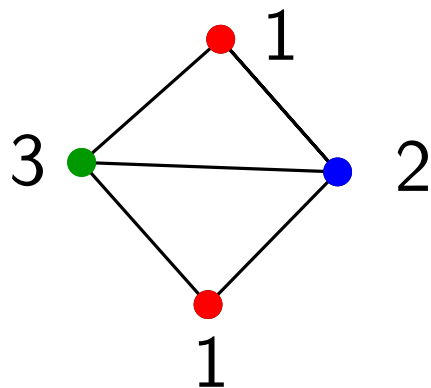
Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein ungerichteter Graph.

Eine k -Färbung ist eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt *chromatische Zahl* von G .

Bsp. 1

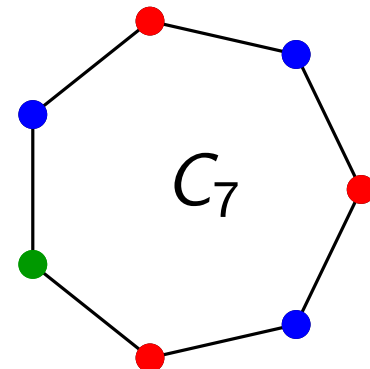
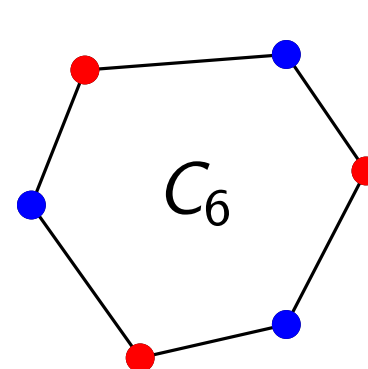


$$\chi(G) = 3$$

Bsp. 2

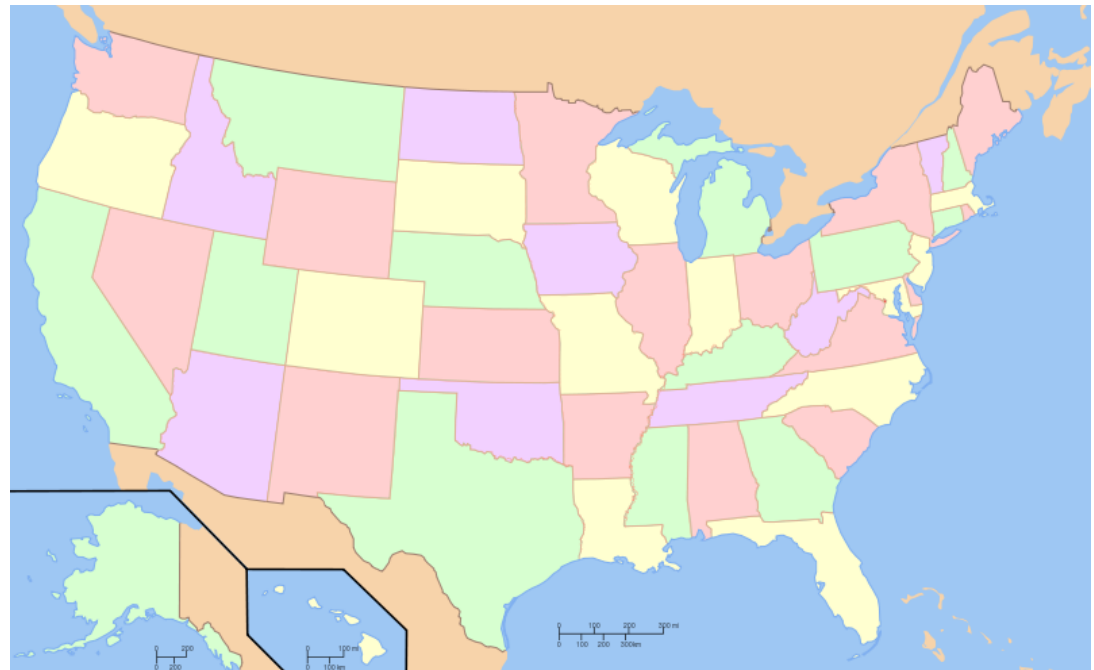
$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kreis mit n Knoten, $n \geq 3$.



Anwendungen für Färbungen

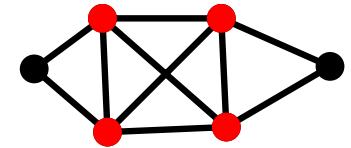
- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Knoten = Sender, Kanten entsprechen Interferenzen)
- Färben von politischen Landkarten (*planare* Graphen)
- Ablaufplanung (minimiere Makespan) bei Zugriff auf beschränkte Ressourcen
- ...



Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G .

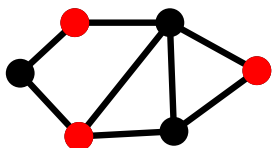


Beob₁. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$? $C_{2k+1}, k \geq 2$

Graph mit $\chi(G) = \omega(G)$? K_n , also $V(G)$ ist Clique.

Def. In einer *unabhängigen* (oder *stabilen*) Menge $I \subseteq V(G)$
gilt für jedes Paar $\{u, v\} \subseteq I$, dass $uv \notin E(G)$.



$\alpha(G) = \max\{|U| : U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$
heißt *Unabhängigkeitszahl* (o. *Stabilitätszahl*) von G .

Zusammenspiel (1)

Farbklassse

Beob₂. Sei f eine k -Färbung von G . Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ eine unabhängige Menge.

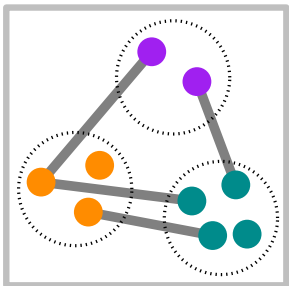
$$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$$

Kor. $\chi(G) \geq \max \{ \omega(G), n/\alpha(G) \}.$

Beob₃. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor.$

Beweis. Sei f eine k -Färbung von G mit $k = \chi(G)$
Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.

(Sonst gäb's eine $(k-1)$ -Färbung!)



$$\Rightarrow |E(G)| \geq \frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow \chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}$$

□

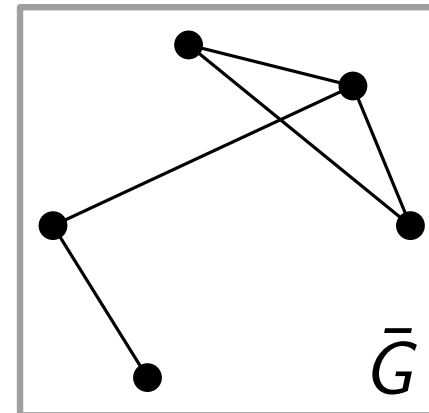
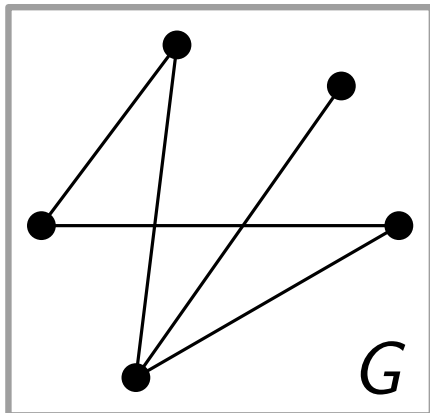
Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und $E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G .

Beob₄. Es gilt

- (i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$
- (ii) $\bar{\bar{G}} = G$
- (iii) S Clique in $G \Leftrightarrow S$ unabhängig in $\bar{G}$
- (iv) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ und $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$



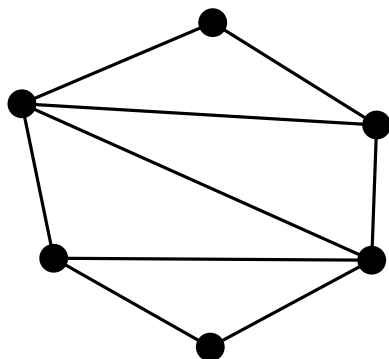
Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

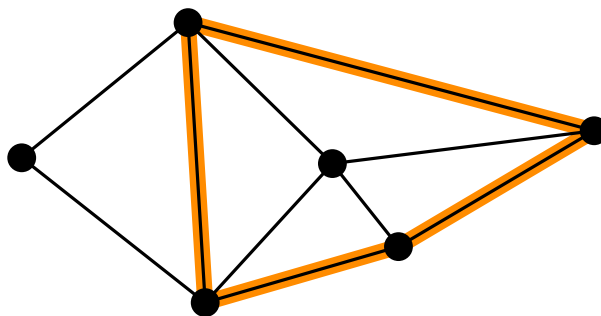
Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.

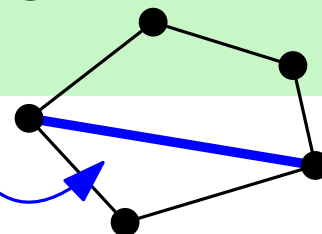
Def. Ein Graph heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.



chordal



nicht chordal



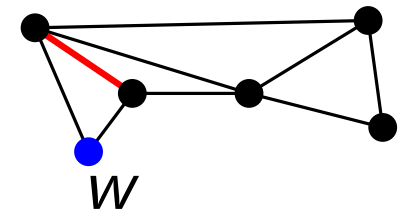
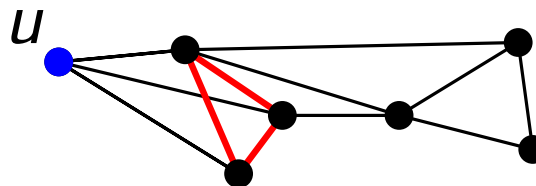
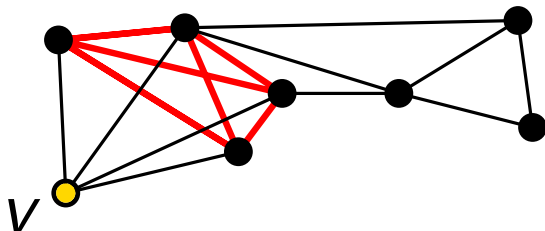
Simpliziale Knoten

Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G .

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
 [Dirac '61] (Beweis: später!)

ex. $U \subseteq V(G)$ mit $G[U] := (U, \{uv \in E(G) \mid u, v \in U\})$

Beob₅. G chordal $\Rightarrow$ jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal
 $\Rightarrow G - v$ enthält ebenfalls einen simplizialen Knoten u
 und $G - \{v, u\}$ enthält einen simplizialen Knoten $w, \dots$



Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \dots, v_n)$ der Knotenmenge von G heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$.

Das heißt:

v_1 ist simplizial in $G[\{v_1, \dots, v_n\}] = G$,

v_2 ist simplizial in $G[\{v_2, \dots, v_n\}] = G - v_1$,

v_3 ist simplizial in $G[\{v_3, \dots, v_n\}] = G - \{v_1, v_2\}$, usw.

Satz von Dirac und Beob₅ $\Rightarrow$

Jeder chordale Graph hat ein perfektes Eliminationsschema!

Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow G$ hat perfektes Eliminationsschema

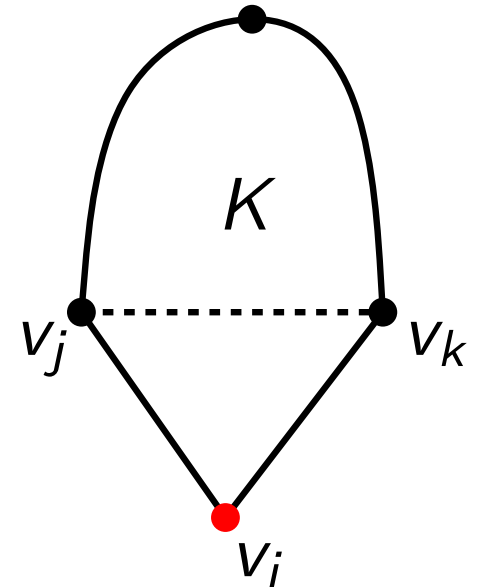
Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„ $\Leftarrow$ “

Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4 .

Sei $v_i \in K$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.



Die Nachbarn (v_j und v_k) von v_i auf K sind adjazent in G , da v_i simplizial in $G[v_i, \dots, v_n]$ und $j > i$ und $k > i$. □

Ein perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac: $O(|V| \cdot |V| \cdot |V|^2) = O(|V|^4)$).

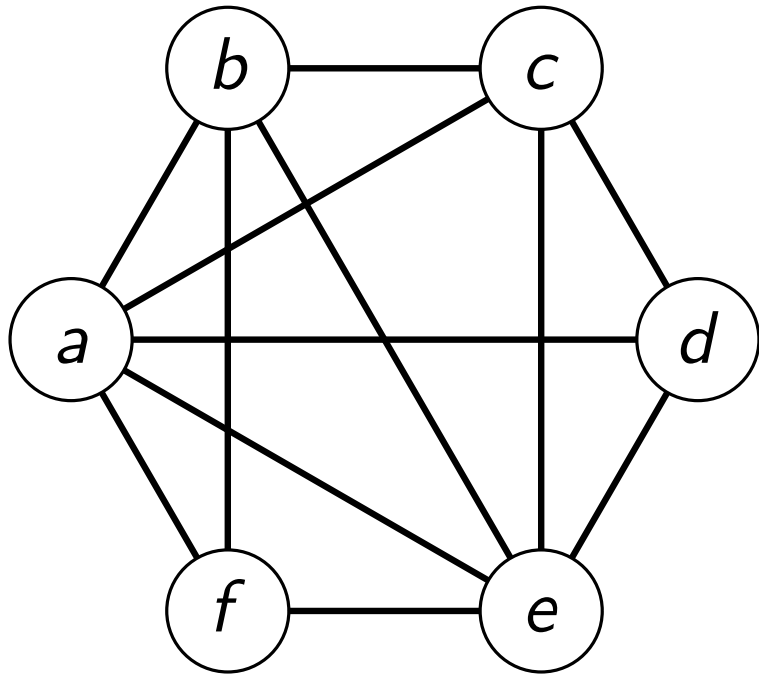
Mit mehr „Cleverness“ sogar *Linearzeit* möglich!

Anwendungen der Charakterisierung

1. Überprüfen von Chordalität.
2. Berechnen einer größten Clique bzw. der Cliquenzahl!
3. Bestimmen einer optimalen Färbung bzw. der chromatischen Zahl!

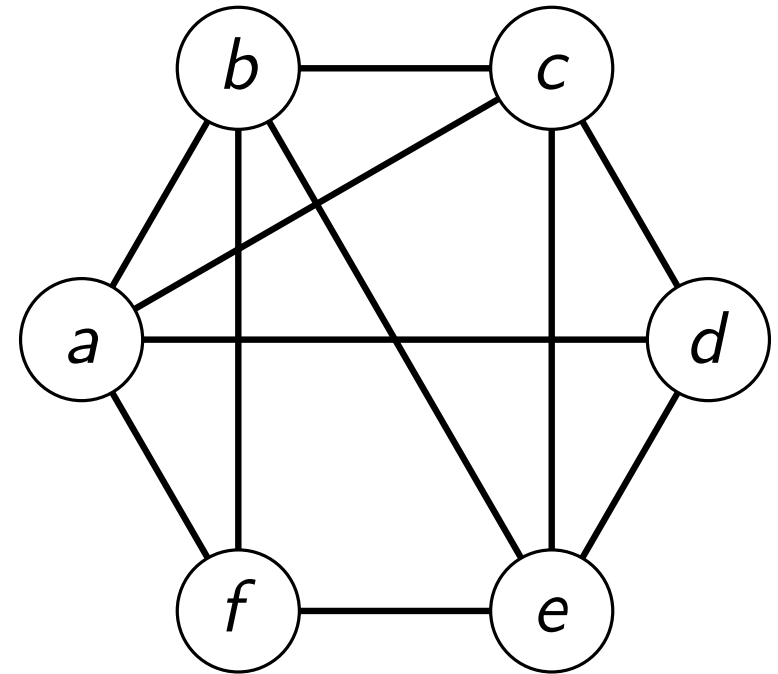
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



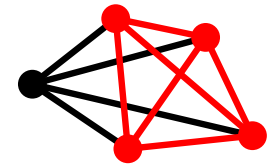
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



Der Graph (oder ein induzierter Teilgraph) hat keinen simplizialen Knoten!

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. **Größte** Cliques sind nicht erweiterbar!

Lemma. Sei $v_1, \dots, v_n$ perfektes Eliminationsschema von G . Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i . $C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \dots, v_n]$.

Es gilt: $C \subseteq C'$, da i minimal.

$C = C'$, da C nicht-erweiterbar. □

$\Rightarrow$ Es gibt höchstens n nicht-erweiterbare Cliques in G !

Also können wir eine **größte** Clique (und somit $\omega(G)$) in Polynomialzeit berechnen – durch Aufzählen dieser Cliques.

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n - 1, \dots, 1$: $v_{i+1}, \dots, v_n$ bereits gefärbt
Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde. („Greedy-Färbung“)

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) \Rightarrow C_i$ ist Clique!

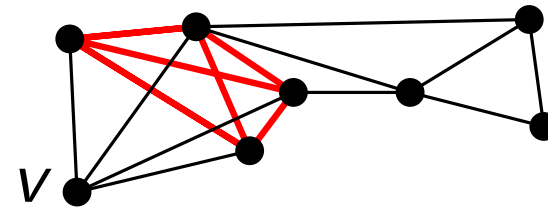
$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \Rightarrow$ Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$.

$\Rightarrow$ Wir können v_i stets mit einer Farbe in $\{1, \dots, \omega(G)\}$ färben.

Wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ gilt, dass unsere Färbung optimal ist!

Satz. In chordalen Graphen kann man größte Cliques und optimale Färbungen effizient ermitteln.

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplicial*, falls $N(v)$ Clique in G .

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplicialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow \text{O.K.}$

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow \text{O.K.}$

Ansonsten existieren Knoten $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

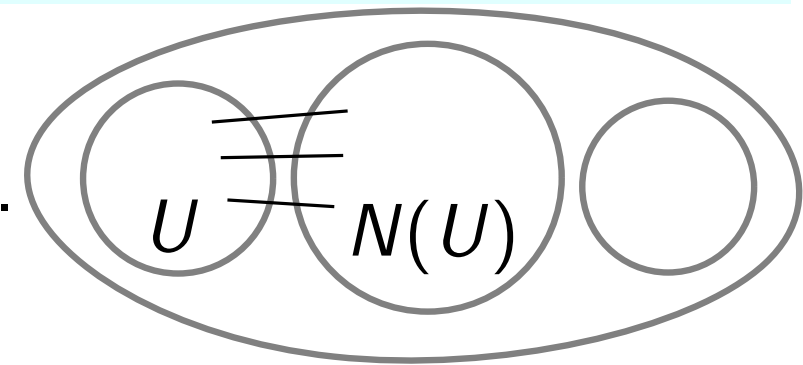
Wähle $U \subseteq V(G)$ mit *maximaler* Kardinalität, so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$ $N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U: ab \in E(G)\}$

Ein $U' \subseteq V(G)$ mit (i) und (ii) existiert immer:

z.B. $U' = \{u\} \Rightarrow v \notin U' \cup N(U')$.



Beweis (Fortsetzung)

Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
 aber $|U'| > |U| \Rightarrow \nexists$ zur Maximalität von U .

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden! (*)

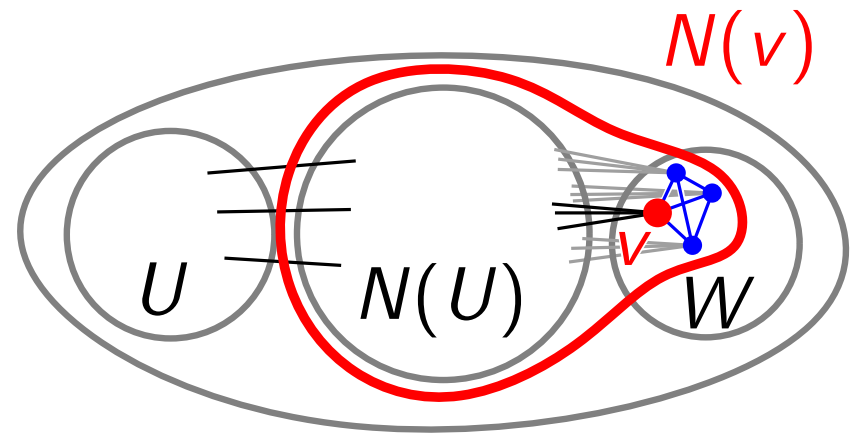
Beob₅. $\Rightarrow G[W]$ chordal $\xRightarrow{\text{I.V.}}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $N(v)$ Clique)

Beachte: $N(v) \cap W$ ist Clique, da v simplizial in $G[W]$.

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \forall w \in N(v) \cap W : N(w) \cap N(U) &= N(U) \\ &= N(v) \cap N(U) \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.



Beweis (Fortsetzung)

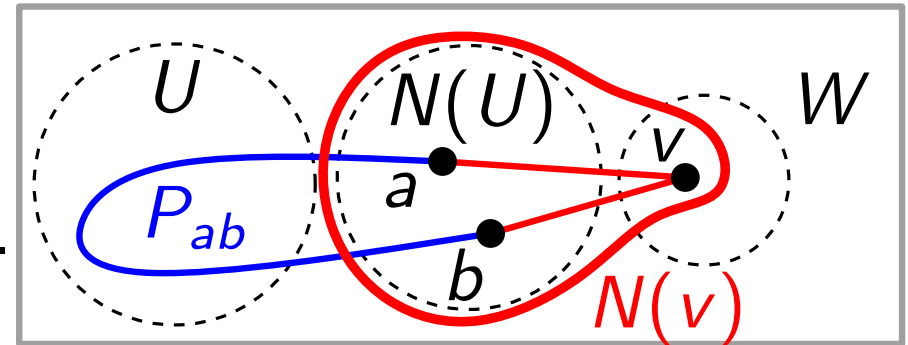
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a - b -Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} kürzester solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2 , da $ab \notin E(G)$.



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg. ⚡

$\Rightarrow N(U)$ ist eine Clique.

$\Rightarrow N(v)$ ist eine Clique.

$\Rightarrow v$ ist simplizialer Knoten in G .



Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph G heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für jeden chordalen Graphen G gilt $\omega(G) = \chi(G)$.
Und: Jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal.
 $\Rightarrow$ Chordale Graphen sind perfekt!

Bsp. 2 Bipartite (2-färbbare) Graphen sind perfekt.

Auch in perfekten Graphen können $\omega(G)$ und $\chi(G)$ effizient bestimmt werden. Außerdem:

Satz. G ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist.
[Lovász '72]

Satz. Die Berechnung von $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist für *perfekte* Graphen effizient möglich.

[Grötschel, Lovász, Schrijver '88]