

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

7. Vorlesung

Wurzelspannbäume

Wurzelbäume

- Def.** Ein gerichteter Graph T mit einem Knoten s heißt **s -Wurzelbaum**, wenn
- T azyklisch,
 - $\text{indeg}(s) = 0$ und
 - $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V(T) \setminus \{s\}$.

Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph T mit einem Knoten s heißt **s -Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$ und
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V(T) \setminus \{s\}$.

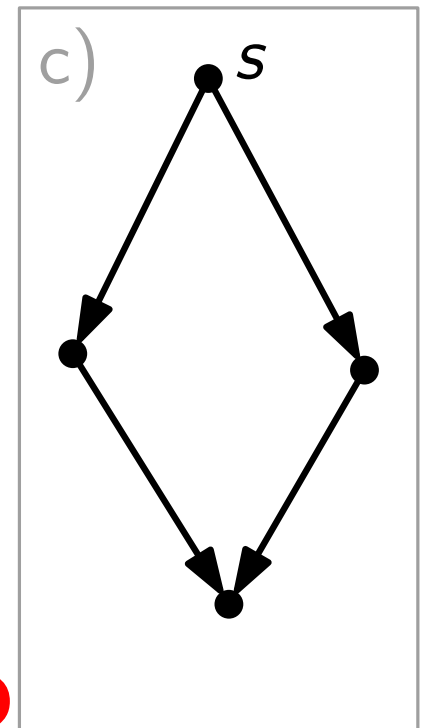
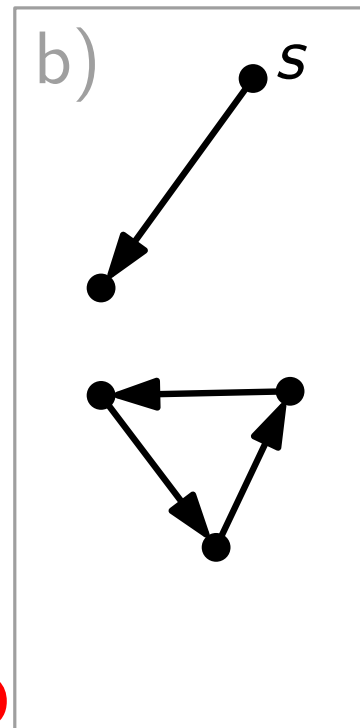
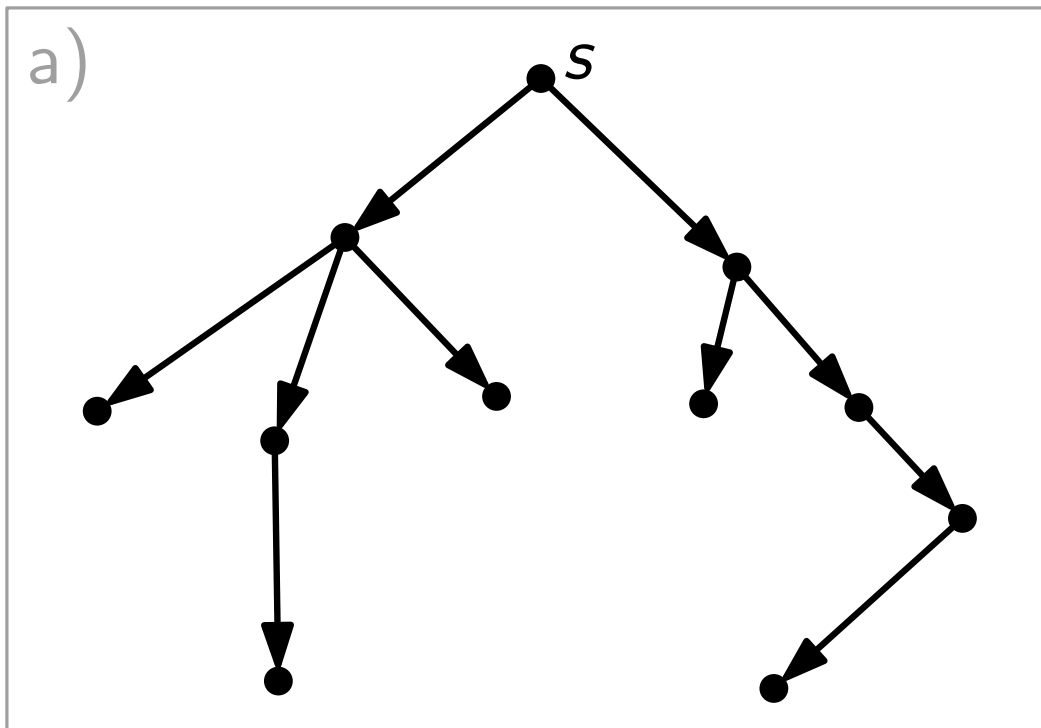
T enthält keinen
(gerichteten) Kreis.

Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph T mit einem Knoten s heißt **s -Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$ und
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V(T) \setminus \{s\}$.

T enthält keinen
(gerichteten) Kreis.



?

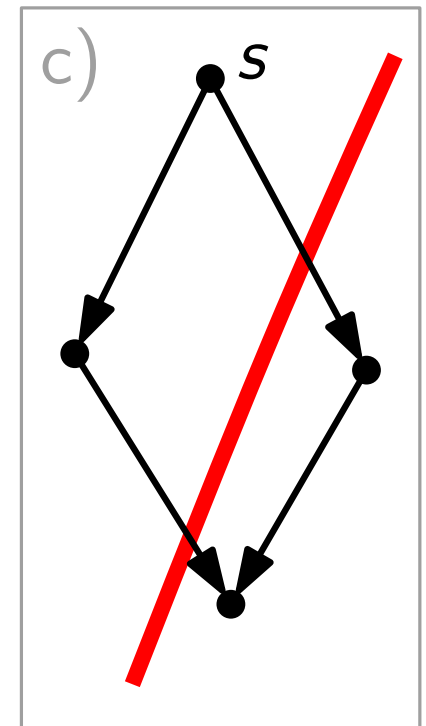
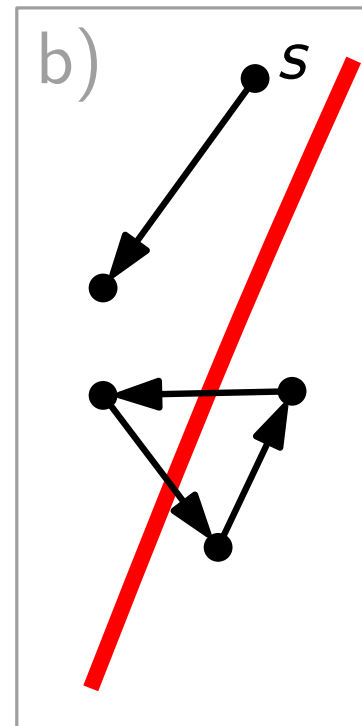
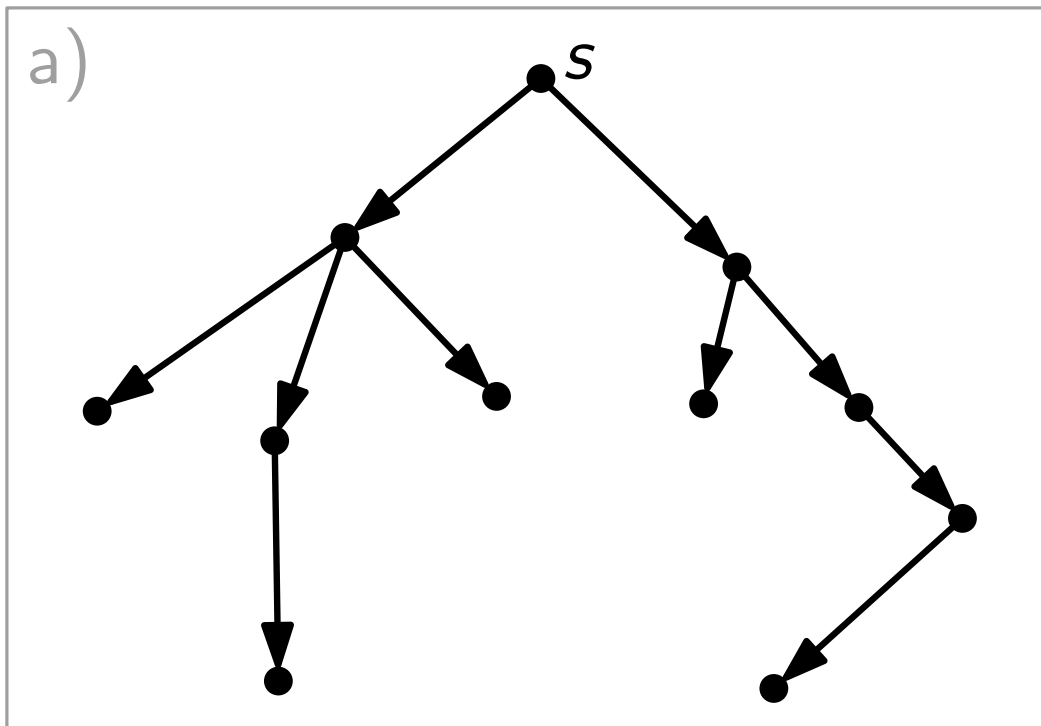
?

Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph T mit einem Knoten s heißt **s -Wurzelbaum**, wenn

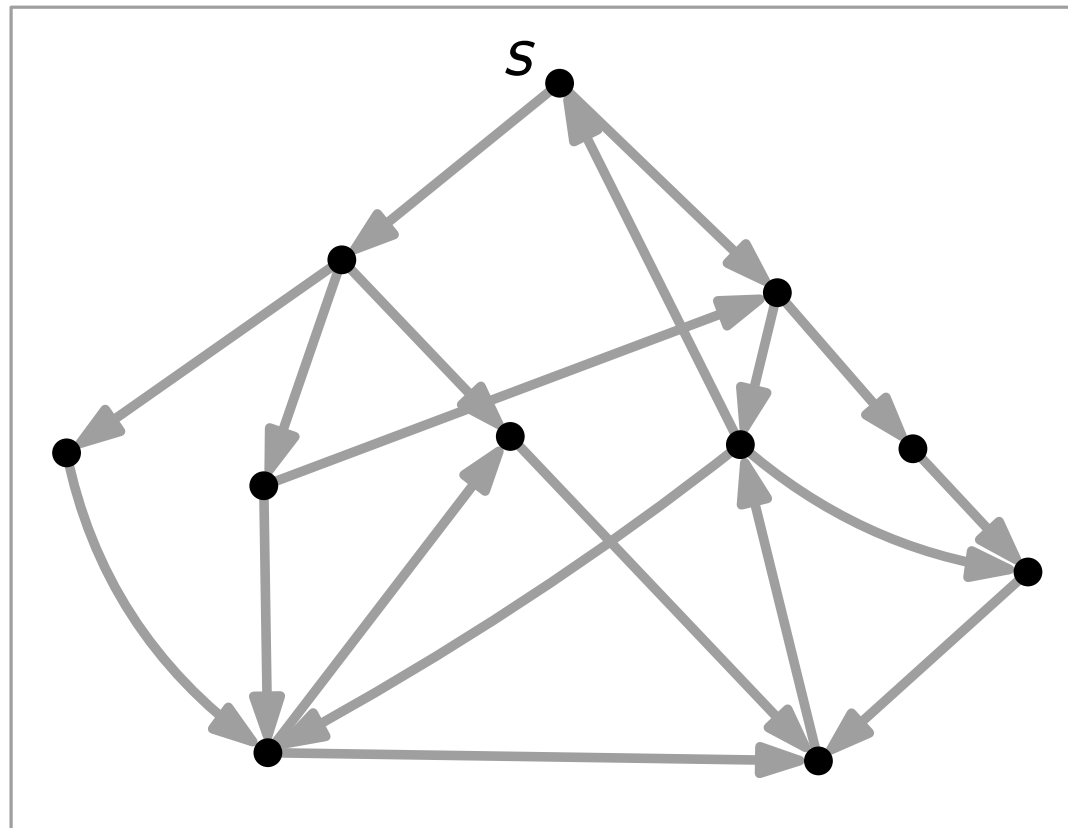
- T azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$ und
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V(T) \setminus \{s\}$.

T enthält keinen
(gerichteten) Kreis.



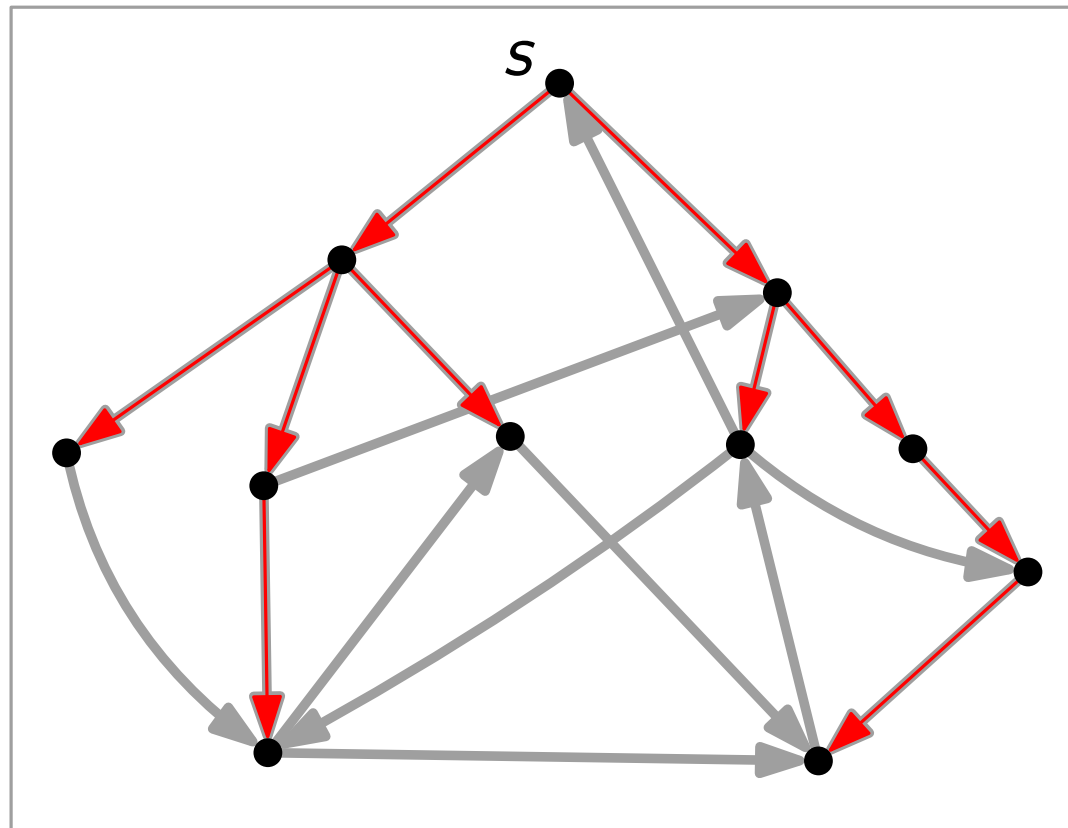
Wurzelspannbäume

Def. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s . Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge $V(G)$ heißt **s -Wurzelspannbaum** von G , wenn T ein s -Wurzelbaum ist.



Wurzelspannbäume

Def. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s . Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge $V(G)$ heißt **s -Wurzelspannbaum** von G , wenn T ein s -Wurzelbaum ist.



Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s .
 G besitzt einen s -Wurzelspannbaum
 $\Leftrightarrow$ jeder Knoten v von G ist von s in G erreichbar.

Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s .
 G besitzt einen s -Wurzelspannbaum
 $\Leftrightarrow$ jeder Knoten v von G ist von s in G erreichbar.

Es existiert ein
 s - v -Pfad in G .

Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s .
 G besitzt einen s -Wurzelspannbaum
 $\Leftrightarrow$ jeder Knoten v von G ist von s in G erreichbar.

Es existiert ein
 s - v -Pfad in G .

Beweis. Siehe Übungsblatt.



Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s .
 G besitzt einen s -Wurzelspannbaum
 $\Leftrightarrow$ jeder Knoten v von G ist von s in G erreichbar.

Es existiert ein
 s - v -Pfad in G .

Beweis. Siehe Übungsblatt.



Bem. DFS(s) liefert s -Wurzelspannbaum
(sofern es einen gibt).

Minimale Wurzelspannbäume

Def. **Gegeben:** gerichteter (Multi-) Graph G mit $s \in V(G)$
und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Minimale Wurzelspannbäume

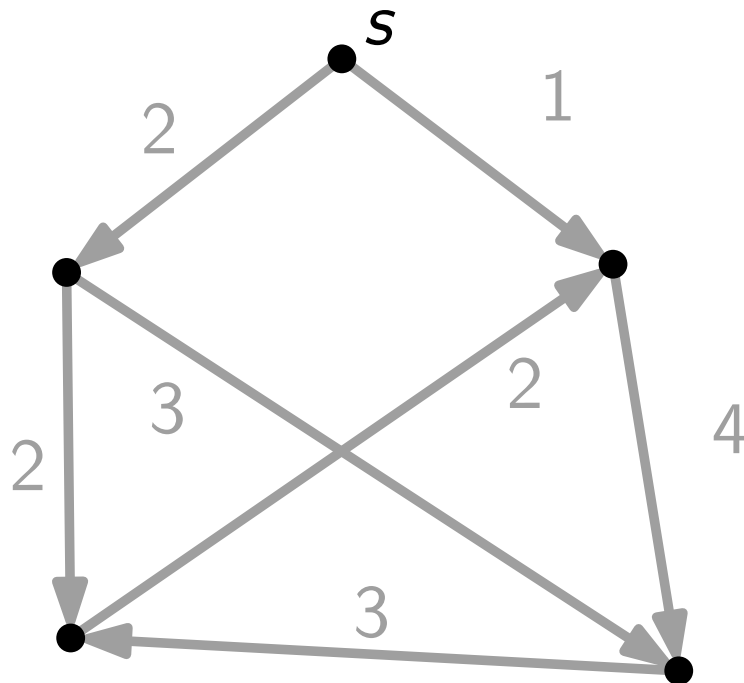
Def. **Gegeben:** gerichteter (Multi-) Graph G mit $s \in V(G)$ und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: s -Wurzelspannbaum T von G (sofern existent) mit $V(T) = V(G)$ und minimalen Kosten $c(E(T)) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$.

Minimale Wurzelspannbäume

Def. **Gegeben:** gerichteter (Multi-) Graph G mit $s \in V(G)$ und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

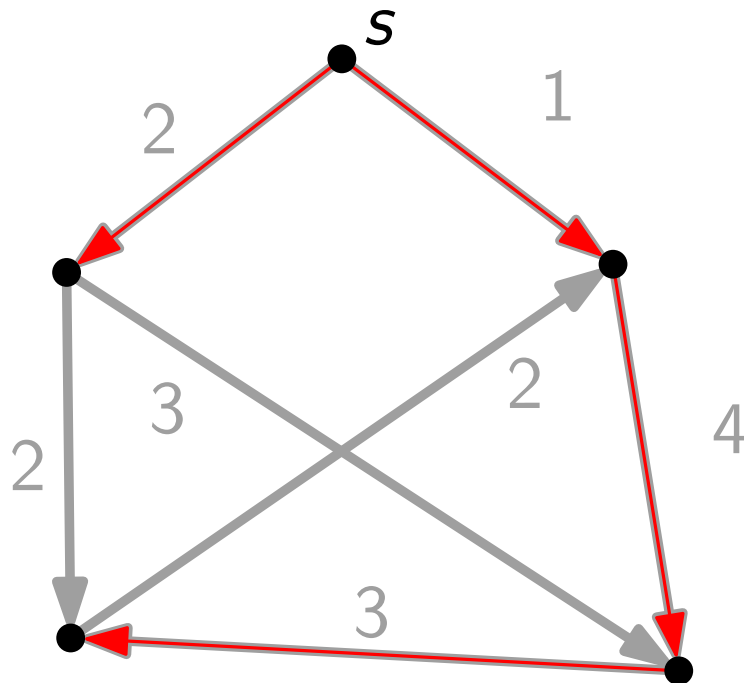
Gesucht: s -Wurzelspannbaum T von G (sofern existent) mit $V(T) = V(G)$ und minimalen Kosten $c(E(T)) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$.



Minimale Wurzelspannbäume

Def. **Gegeben:** gerichteter (Multi-) Graph G mit $s \in V(G)$ und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

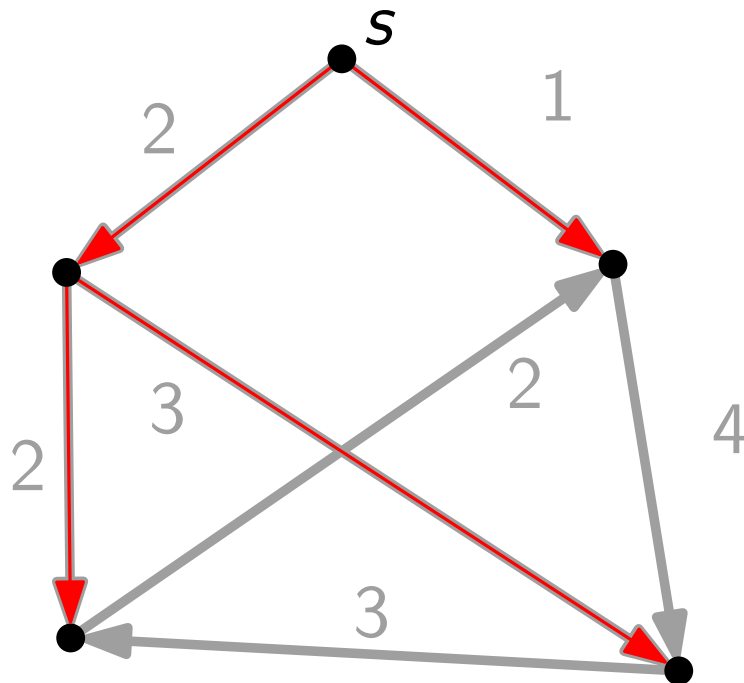
Gesucht: s -Wurzelspannbaum T von G (sofern existent) mit $V(T) = V(G)$ und minimalen Kosten $c(E(T)) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$.



Minimale Wurzelspannbäume

Def. **Gegeben:** gerichteter (Multi-) Graph G mit $s \in V(G)$ und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

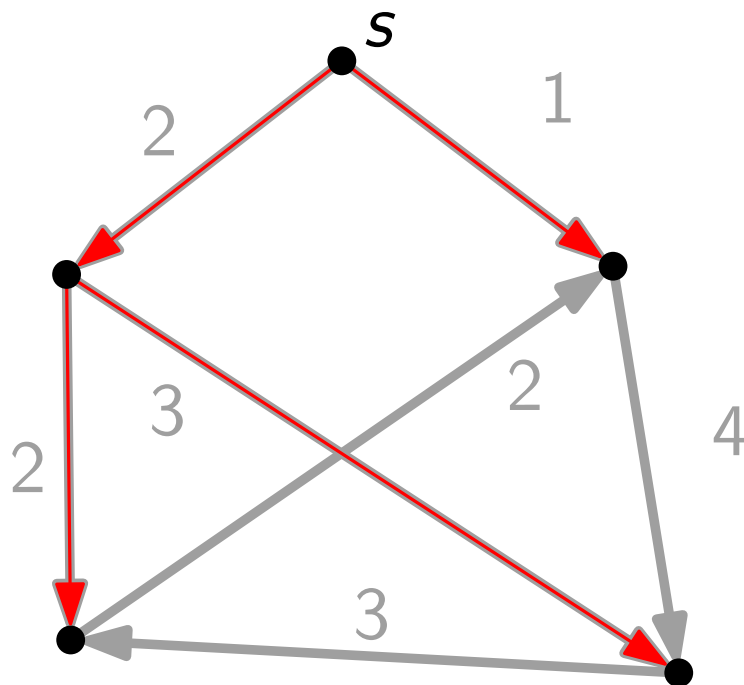
Gesucht: s -Wurzelspannbaum T von G (sofern existent) mit $V(T) = V(G)$ und minimalen Kosten $c(E(T)) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$.



Minimale Wurzelspannbäume

Def. **Gegeben:** gerichteter (Multi-) Graph G mit $s \in V(G)$ und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: s -Wurzelspannbaum T von G (sofern existent) mit $V(T) = V(G)$ und minimalen Kosten $c(E(T)) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$.



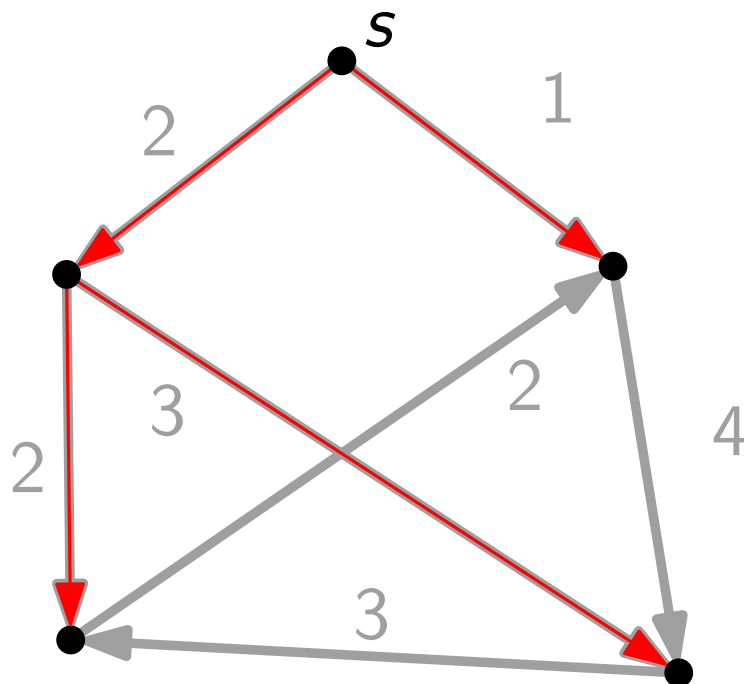
Motivation:

Broadcast (Versenden von Information von s an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

Minimale Wurzelspannbäume

Def. **Gegeben:** gerichteter (Multi-) Graph G mit $s \in V(G)$ und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: s -Wurzelspannbaum T von G (sofern existent) mit $V(T) = V(G)$ und minimalen Kosten $c(E(T)) = \sum_{e \in E(T)} c(e)$.



Motivation:

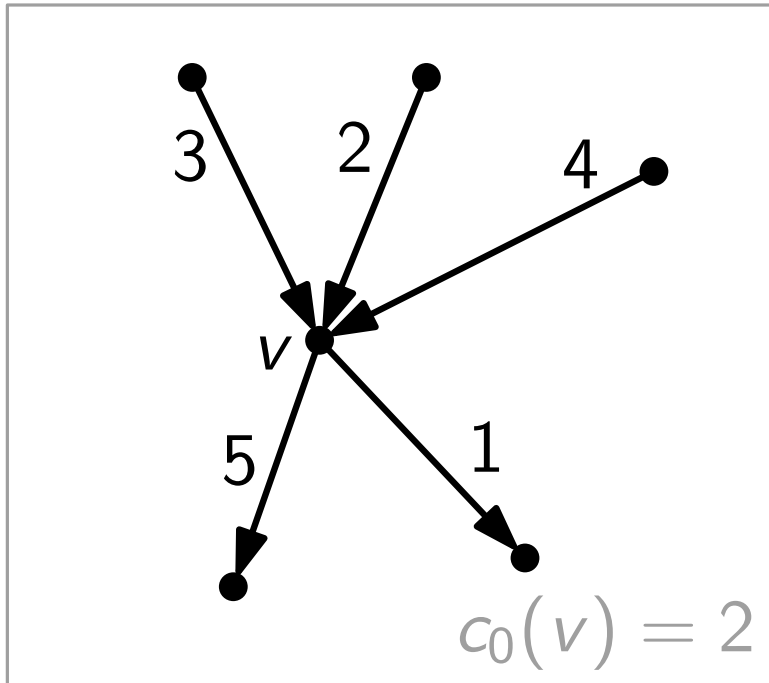
Broadcast (Versenden von Information von s an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

Übungsaufgabe:

Kruskal und Jarník-Prim schlagen i.A. fehl!

Kostenmodifikation

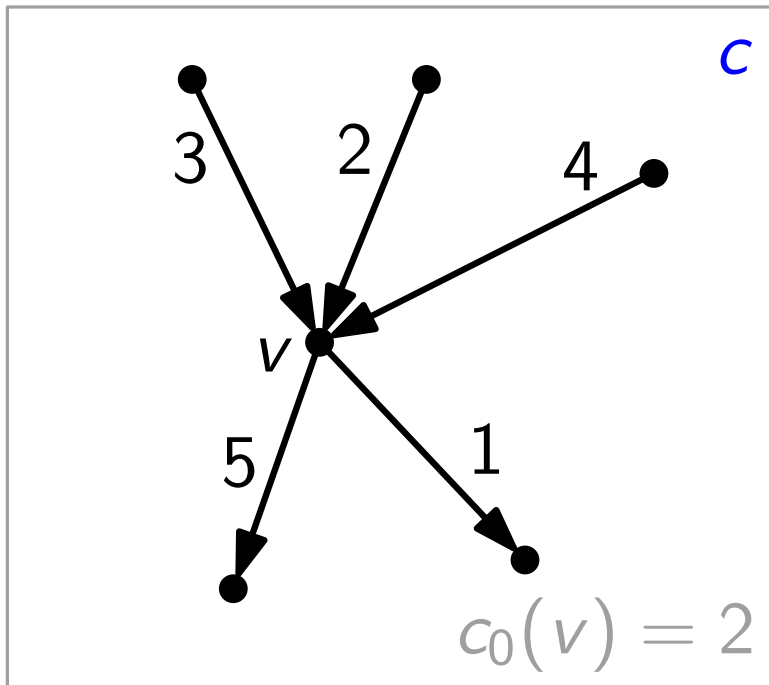
Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{ c(u, v) \mid (u, v) \in E(G) \}$.



Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{ c(u, v) \mid (u, v) \in E(G) \}$.

O.B.d.A. $\text{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

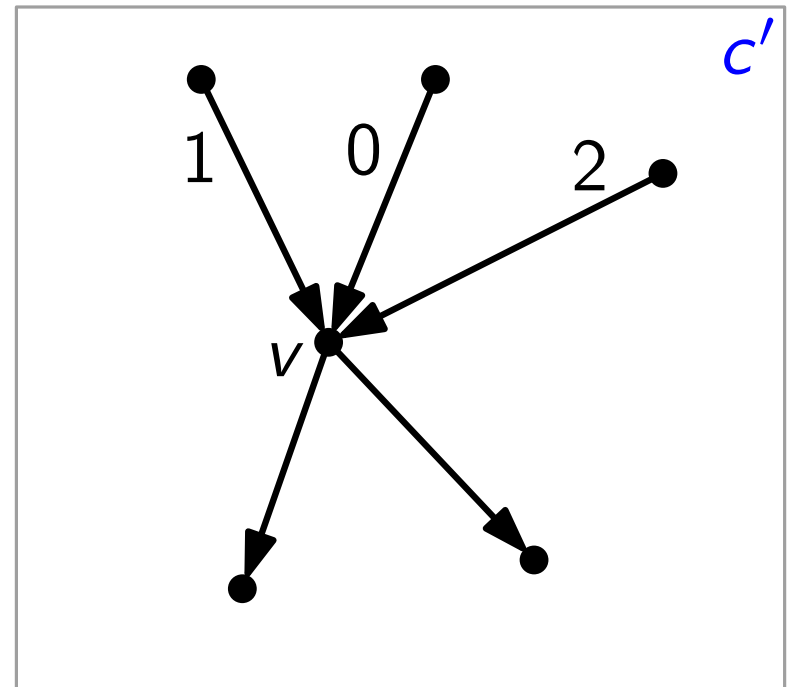
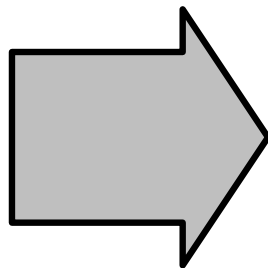
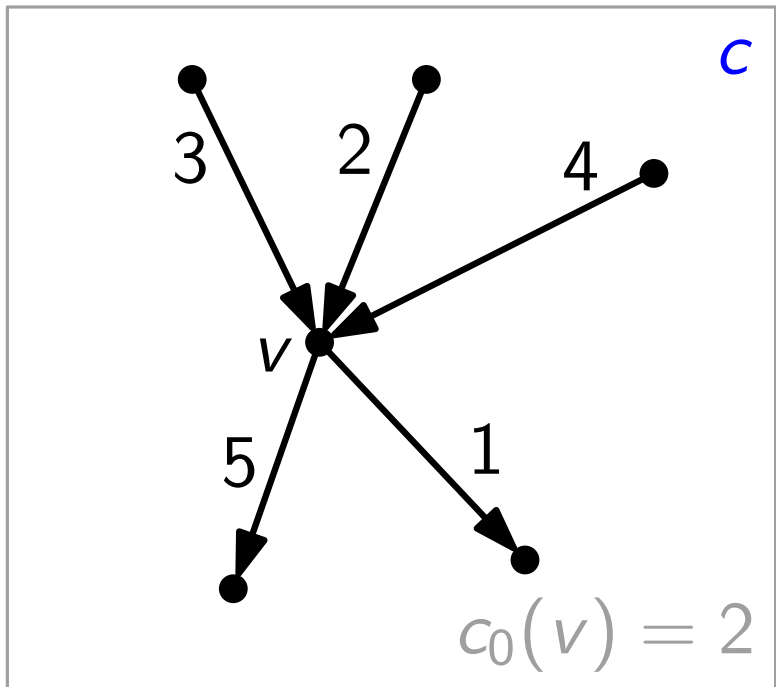


Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{ c(u, v) \mid (u, v) \in E(G) \}$.

O.B.d.A. $\text{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

Für jede Kante (u, v) setze $c'(u, v) := c(u, v) - c_0(v)$.



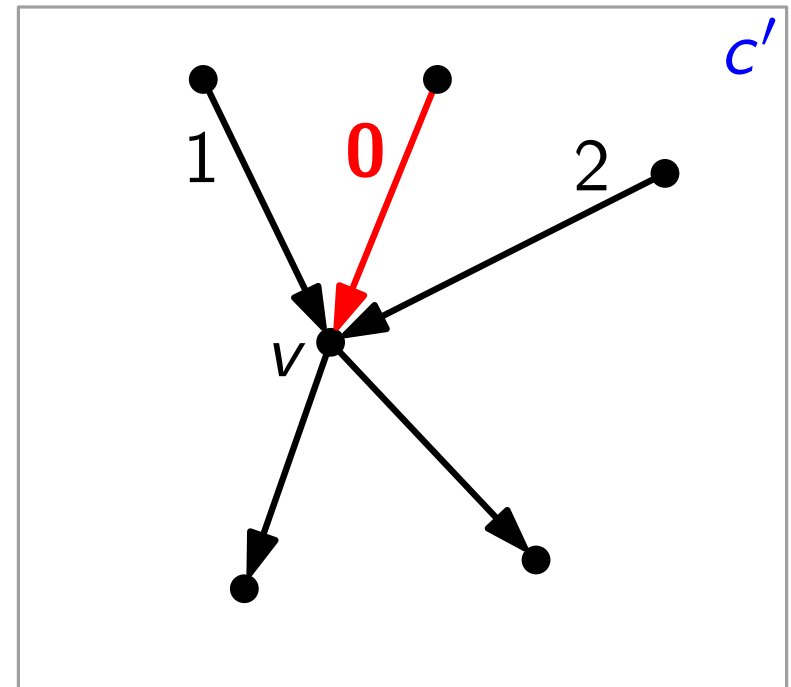
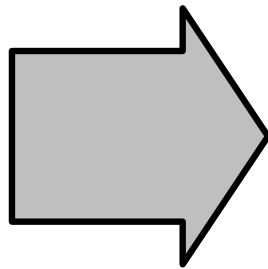
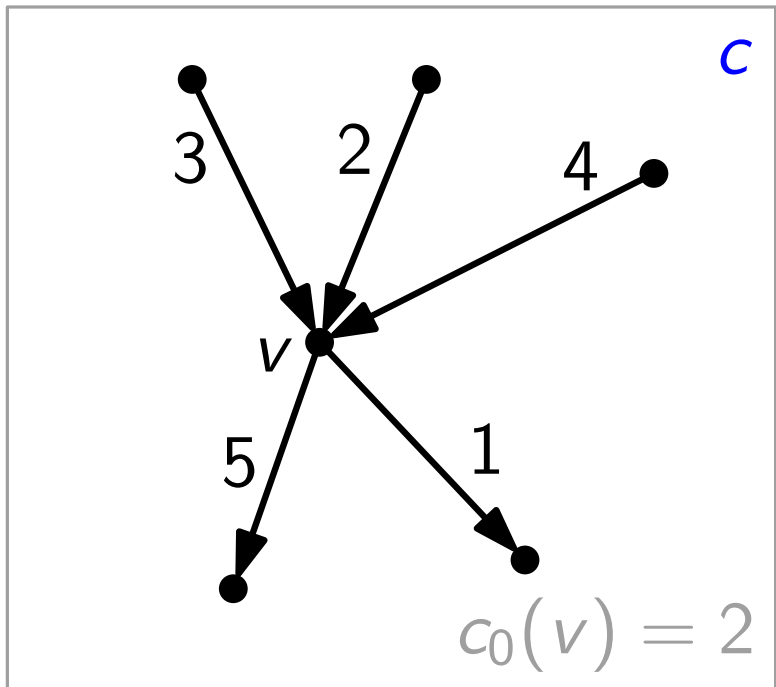
Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{ c(u, v) \mid (u, v) \in E(G) \}$.

O.B.d.A. $\text{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

Für jede Kante (u, v) setze $c'(u, v) := c(u, v) - c_0(v)$.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten $v \neq s$ hat eingehende 0-Kante.



Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s -Wurzelspannbaum T von G gilt

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s -Wurzelspannbaum T von G gilt

$$c'(E(T)) =$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s -Wurzelspannbaum T von G gilt

$$c'(E(T)) = \sum_{(u,v) \in E(T)} (c(u,v) - c_0(v))$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s -Wurzelspannbaum T von G gilt

$$\begin{aligned} c'(E(T)) &= \sum_{(u,v) \in E(T)} (c(u,v) - c_0(v)) \\ &= \sum_{(u,v) \in E(T)} c(u,v) - \sum_{v \in V(G) \setminus \{s\}} c_0(v) \end{aligned}$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für jeden s -Wurzelspannbaum T von G gilt

$$c'(E(T)) = \sum_{(u,v) \in E(T)} (c(u,v) - c_0(v))$$

$\text{indeg}_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
 $\text{indeg}_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v) \in E(T)} c(u,v) - \sum_{v \in V(G) \setminus \{s\}} c_0(v)$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für jeden s -Wurzelspannbaum T von G gilt

$$\begin{aligned}
 c'(E(T)) &= \sum_{(u,v) \in E(T)} (c(u,v) - c_0(v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in E(T)} c(u,v) - \sum_{v \in V(G) \setminus \{s\}} c_0(v) \\
 &= c(E(T)) - \sum_{v \in V(G) \setminus \{s\}} c_0(v)
 \end{aligned}$$

$\text{indeg}_T(s) = 0$
 und für alle $v \neq s$
 $\text{indeg}_T(v) = 1$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s -Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c , wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für jeden s -Wurzelspannbaum T von G gilt

$$\begin{aligned}
 c'(E(T)) &= \sum_{(u,v) \in E(T)} (c(u,v) - c_0(v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in E(T)} c(u,v) - \sum_{v \in V(G) \setminus \{s\}} c_0(v) \\
 &= c(E(T)) - \sum_{v \in V(G) \setminus \{s\}} c_0(v)
 \end{aligned}$$

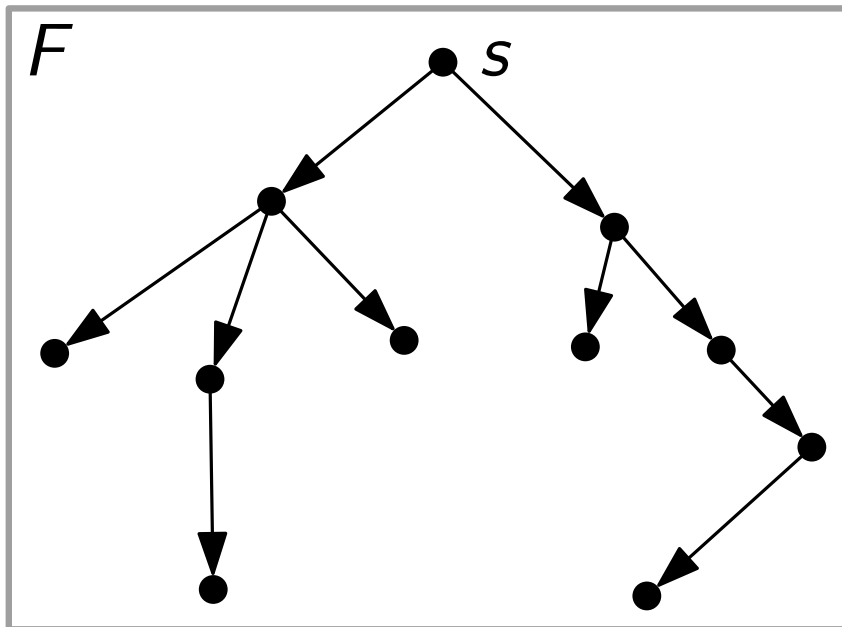
indeg $_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
indeg $_T(v) = 1$

unabhängig von T !



Ein Versuch

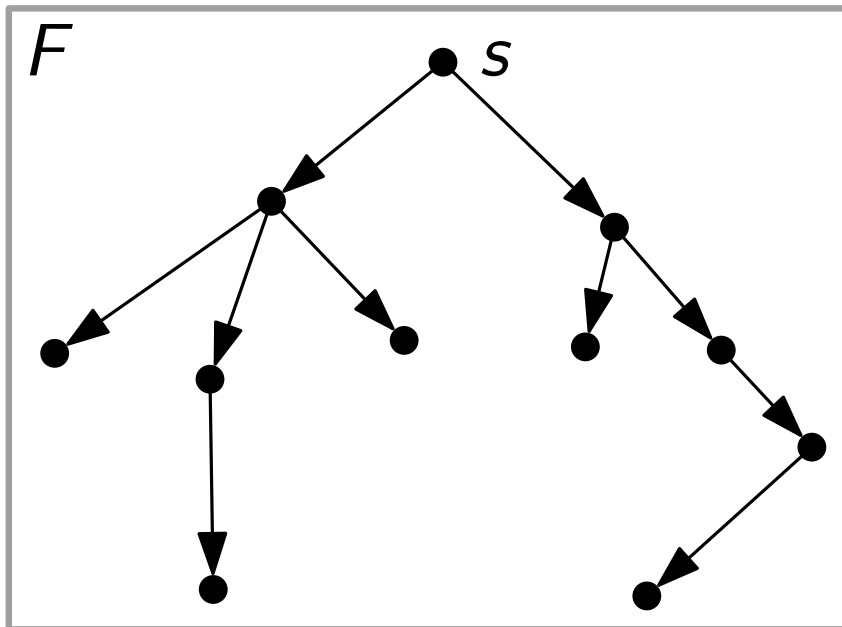
Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
 $\rightsquigarrow$ Teilgraph F von G mit $V(F) = V(G)$.



Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
 $\rightsquigarrow$ Teilgraph F von G mit $V(F) = V(G)$.

Falls F azyklisch $\Rightarrow F$ ist s -Wurzelspannbaum von G !

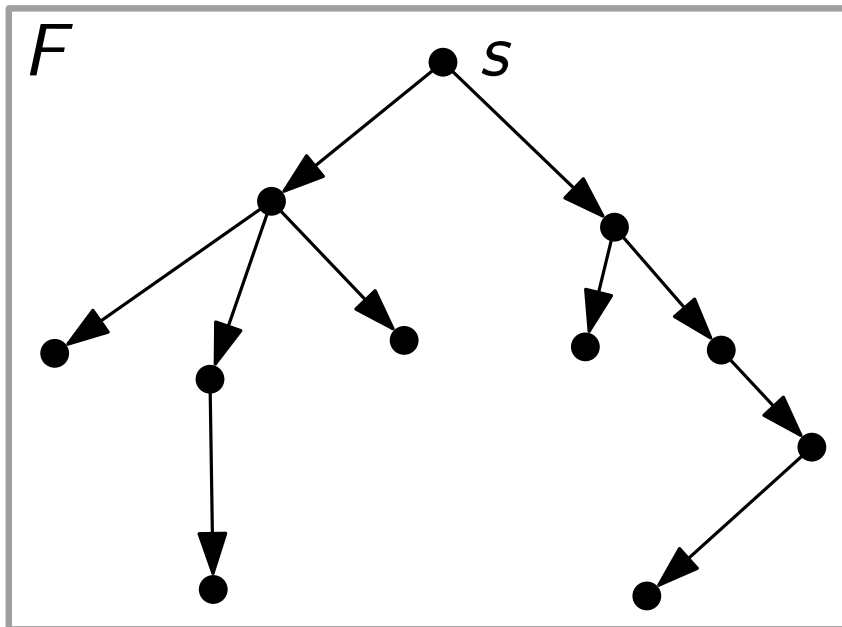


Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
 $\rightsquigarrow$ Teilgraph F von G mit $V(F) = V(G)$.

Falls F azyklisch $\Rightarrow F$ ist s -Wurzelspannbaum von G !

Beachte: F ist *optimal* bzgl. c' (und somit auch bzgl. c)

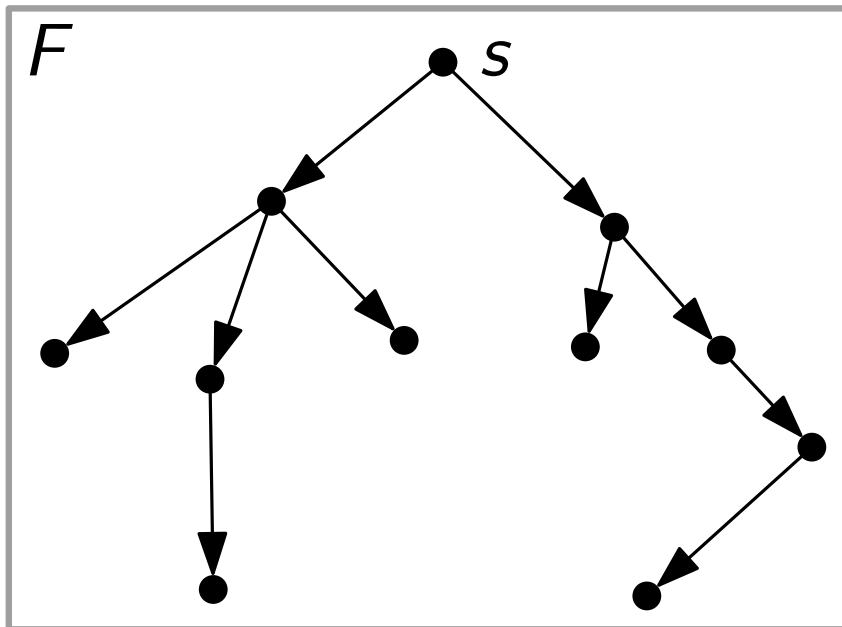


Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
 $\rightsquigarrow$ Teilgraph F von G mit $V(F) = V(G)$.

Falls F azyklisch $\Rightarrow F$ ist s -Wurzelspannbaum von G !

Beachte: F ist *optimal* bzgl. c' (und somit auch bzgl. c),
da $c'(F) = 0$.



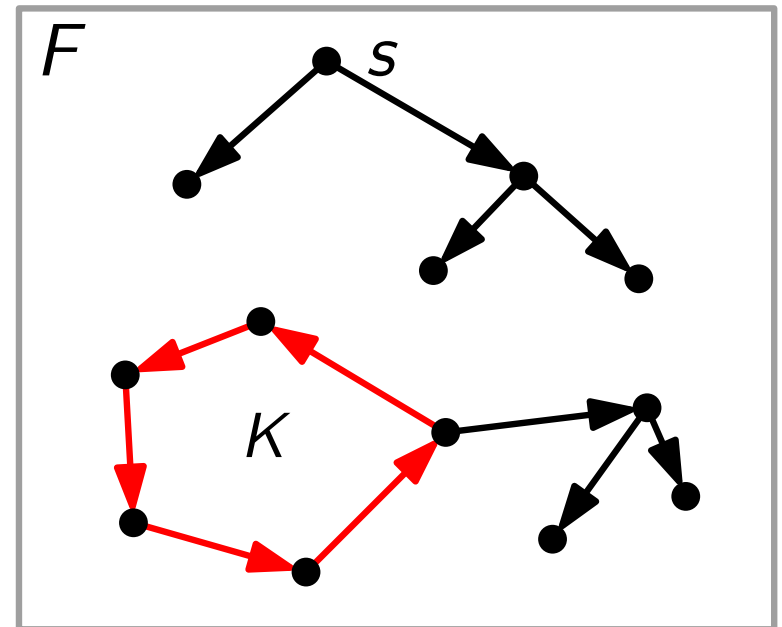
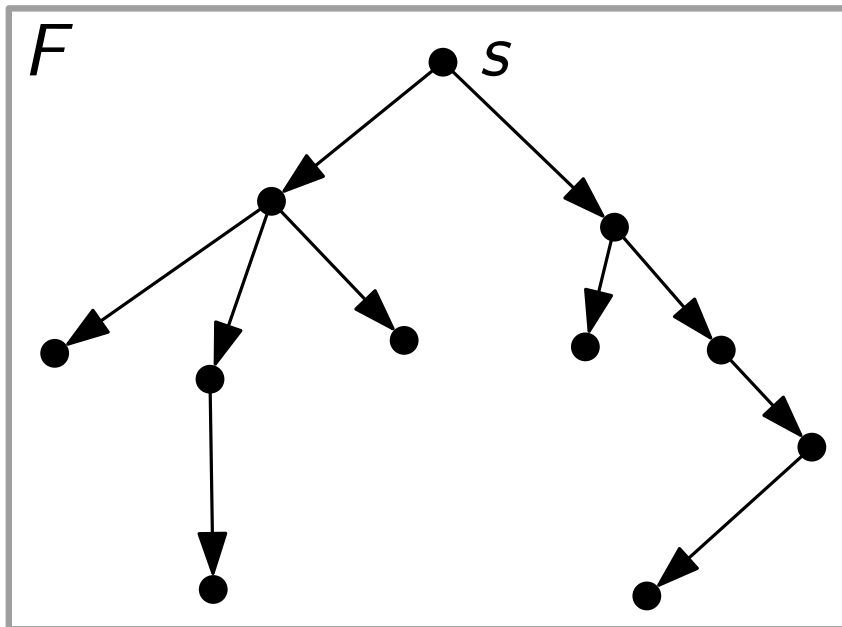
Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
 $\rightsquigarrow$ Teilgraph F von G mit $V(F) = V(G)$.

Falls F azyklisch $\Rightarrow F$ ist s -Wurzelspannbaum von G !

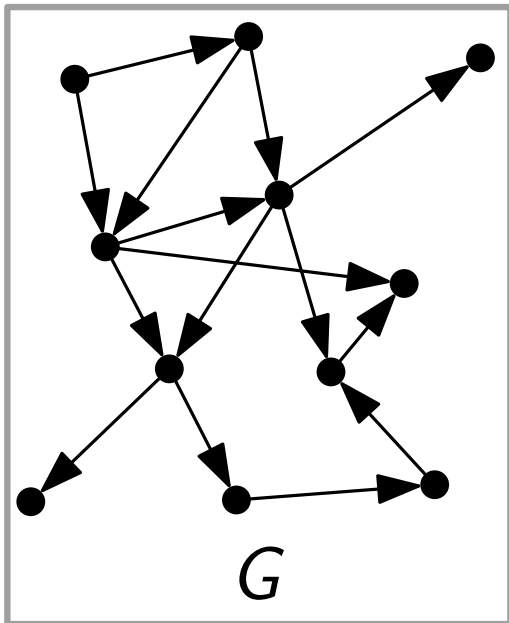
Beachte: F ist *optimal* bzgl. c' (und somit auch bzgl. c),
 da $c'(F) = 0$.

Problem: Was tun, wenn F einen Kreis K enthält?



Kontraktion

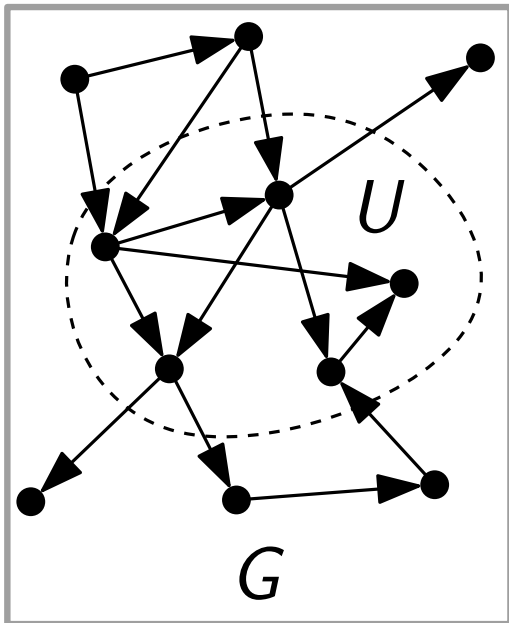
Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V(G)$.



Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V(G)$.

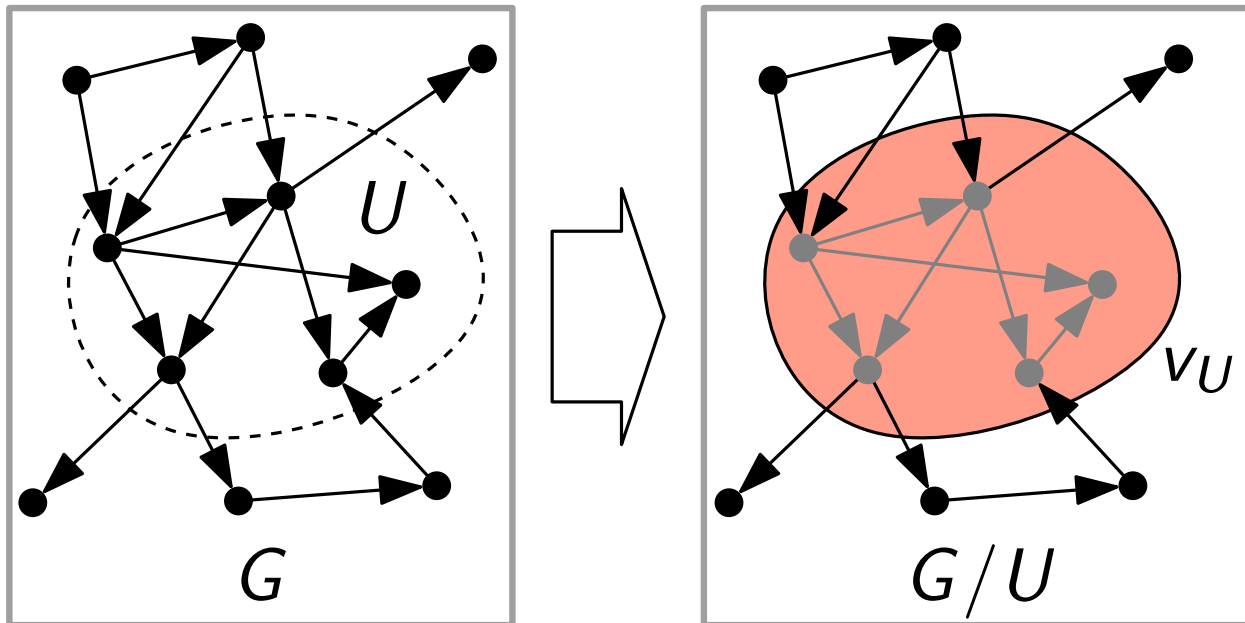
Kontraktion von U : Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U .



Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V(G)$.

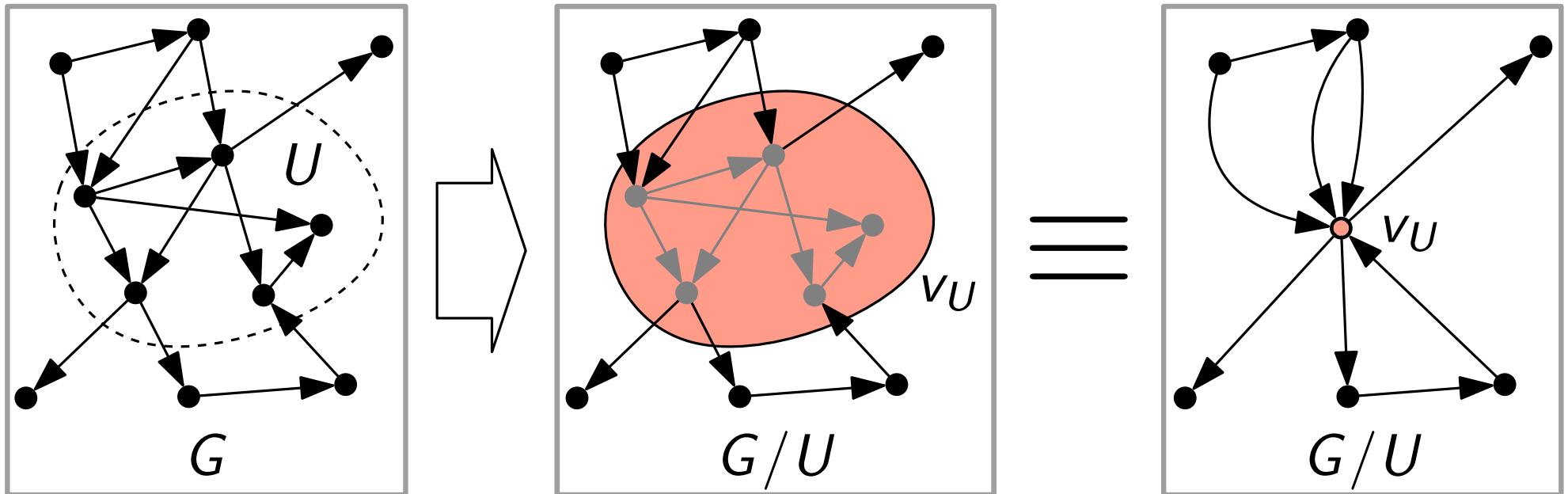
Kontraktion von U : Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U .



Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V(G)$.

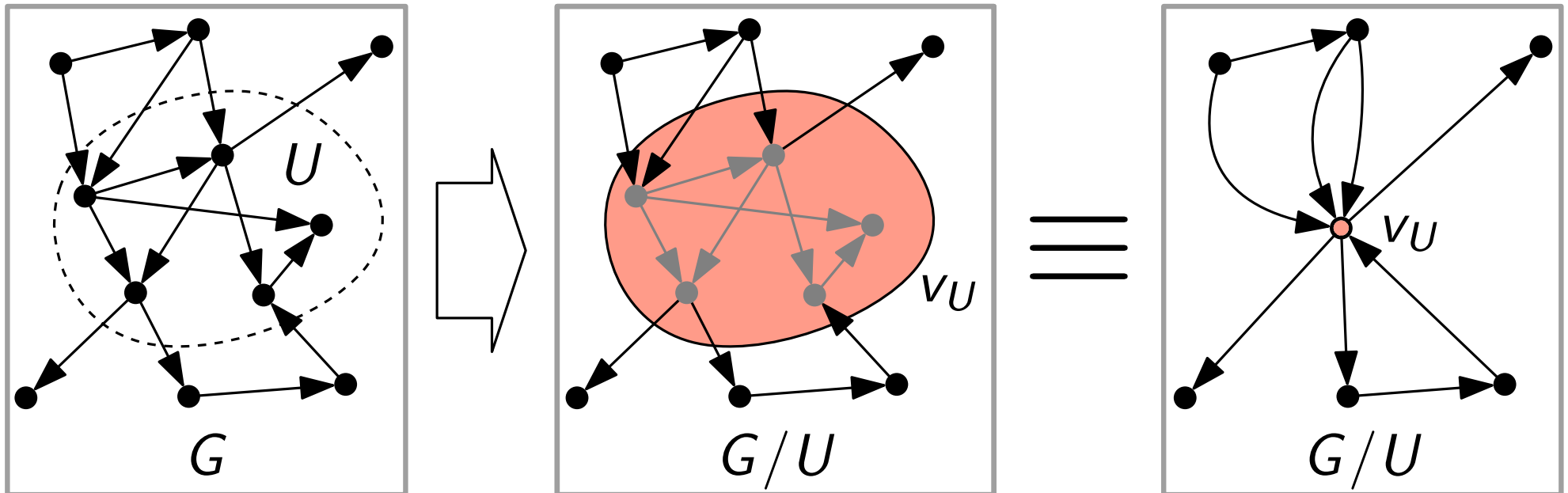
Kontraktion von U : Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U .



Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V(G)$.

Kontraktion von U : Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U .
Kantenkosten werden auf G/U vererbt.



Expansion

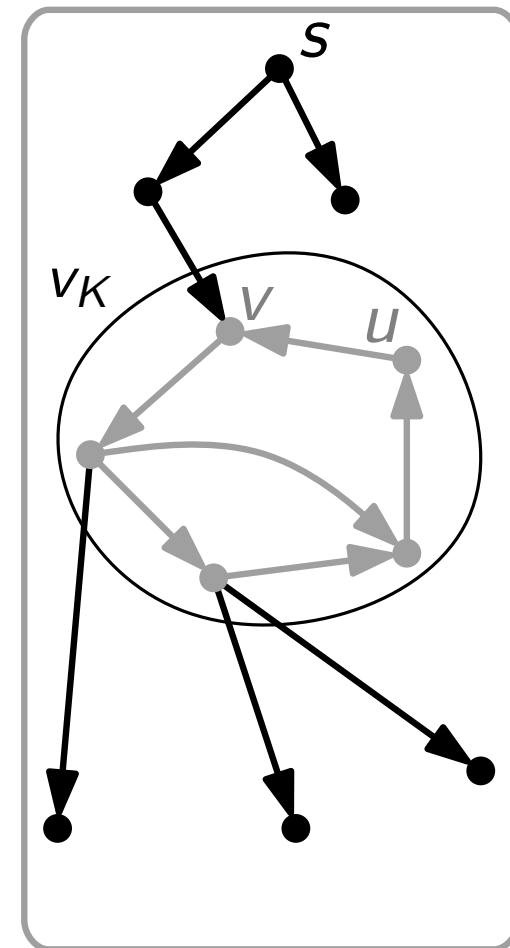
Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .



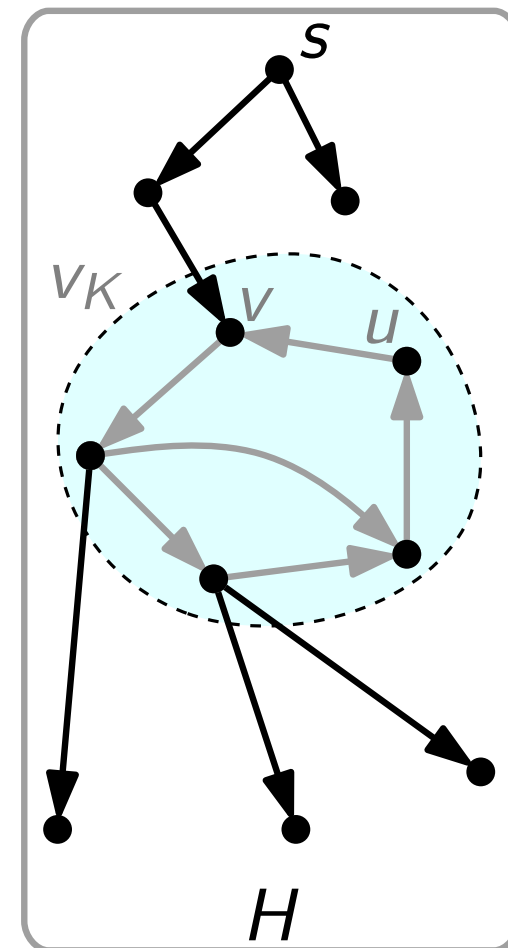
Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.



Expansion

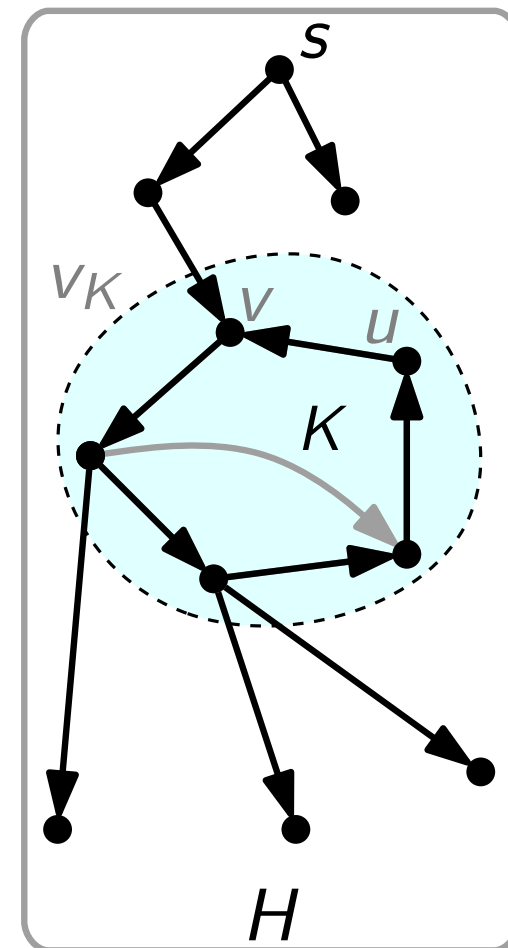
Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.

Füge Kreis K zu H hinzu.



Expansion

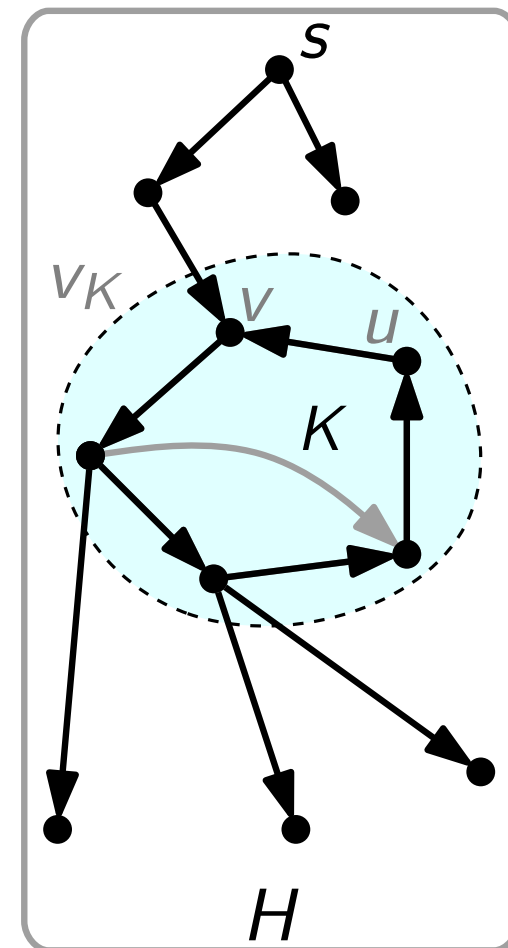
Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) =$

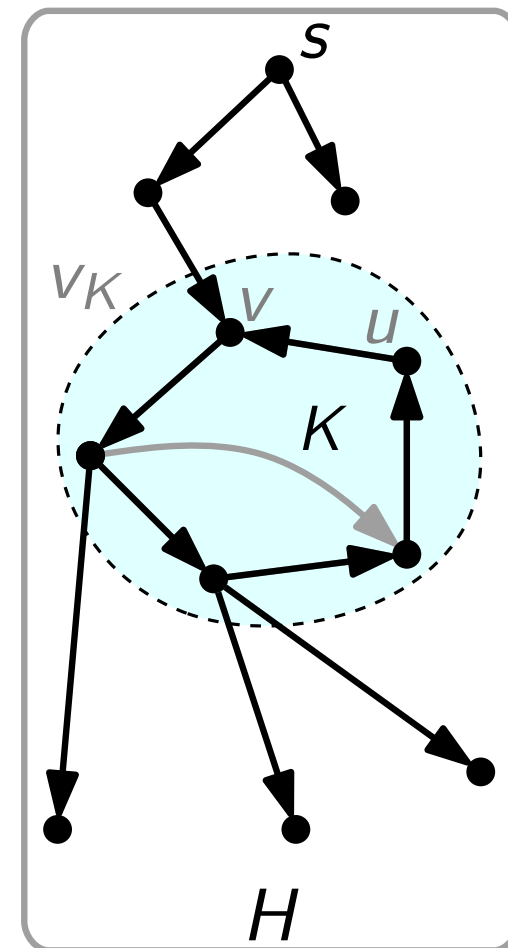


Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .
 $\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.
 Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

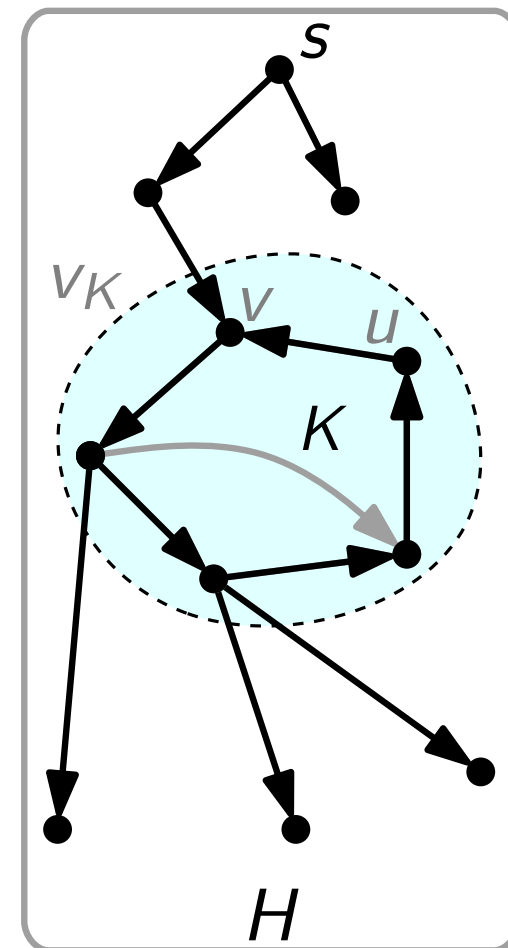
Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

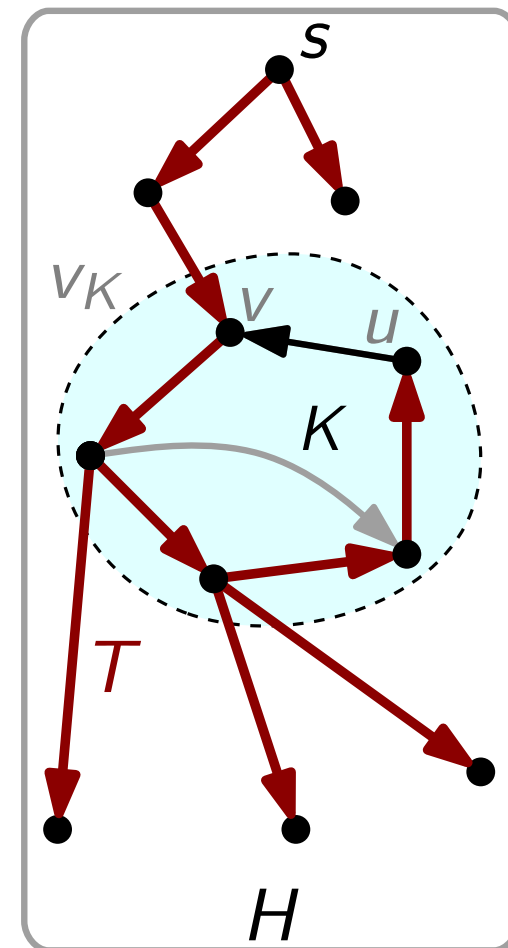
Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s -Wurzelspannbaum T ($= H - uv$) von H .



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .

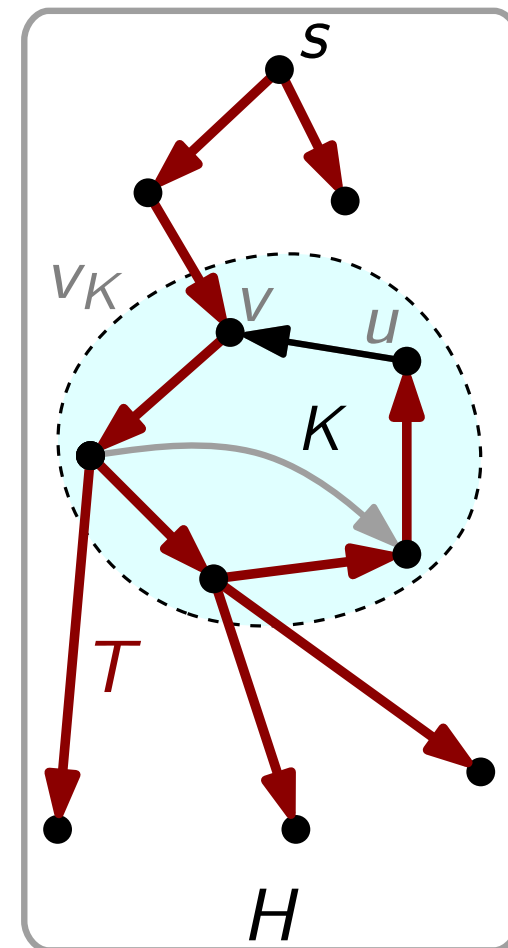
$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s -Wurzelspannbaum T ($= H - uv$) von H .

T ist s -Wurzelspannbaum von G .



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G .

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge $V(G)$.

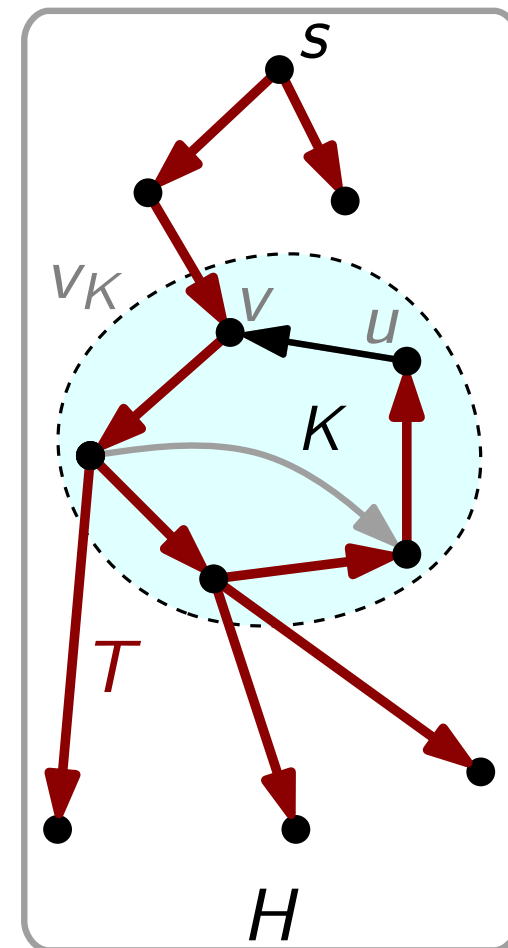
Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s -Wurzelspannbaum T ($= H - uv$) von H .

T ist s -Wurzelspannbaum von G .

$c'(T) \leq$



Beweis.

$$c'(T) \leq c'(H) = c'(\tilde{T})$$

The diagram shows a directed graph H (bottom) and a subgraph K (top, light blue dashed oval). Nodes v and u are in K , while v_K is outside. Edges are red (labeled T) or black (labeled u). A curved grey arrow labeled K points from a node in K to u .

Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .

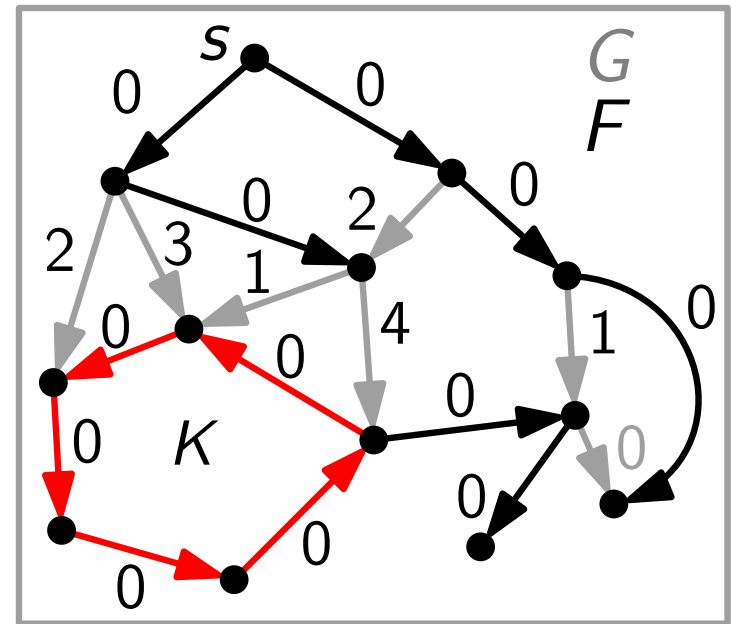


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

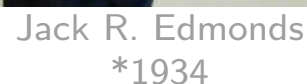
- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .



Jack R. Edmonds
*1934

[Edmonds 1967]

-



[Edmonds 1967]

-

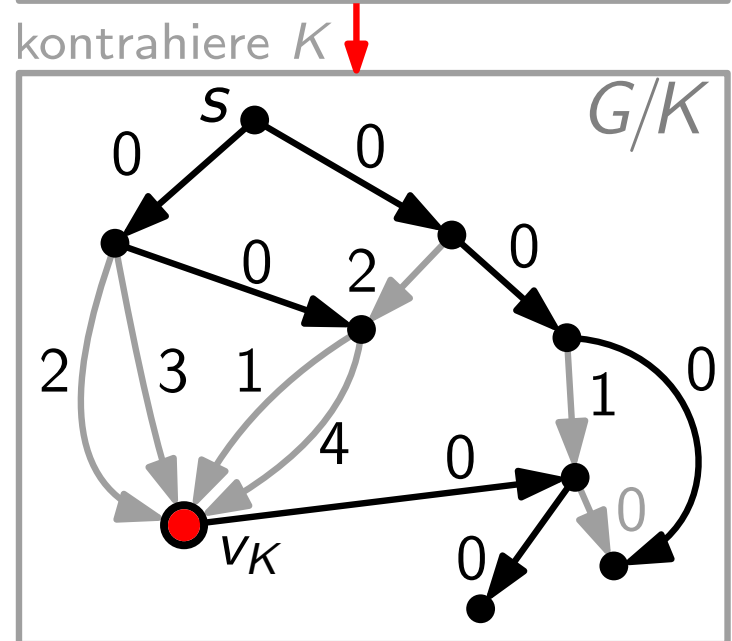
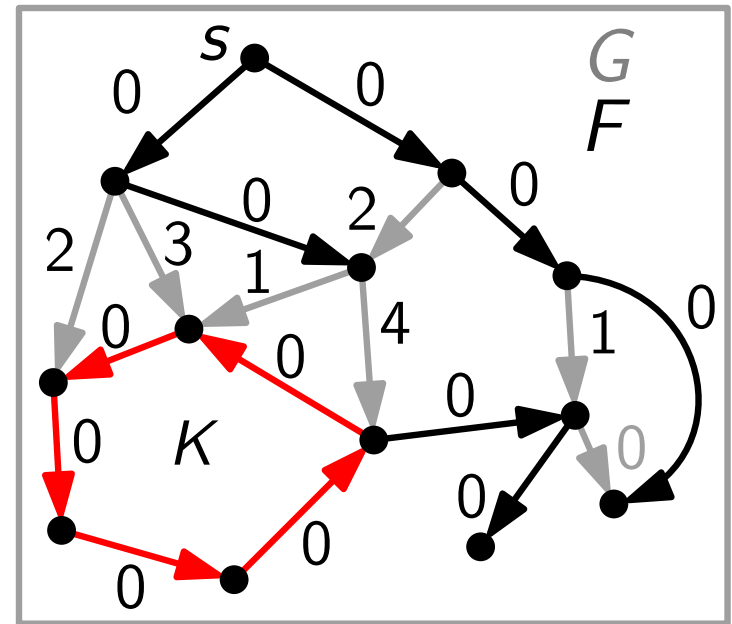


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .

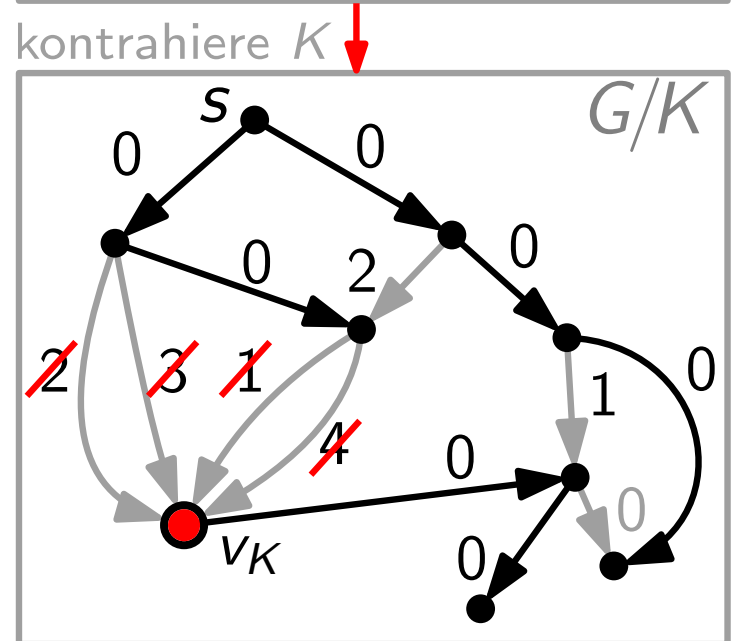
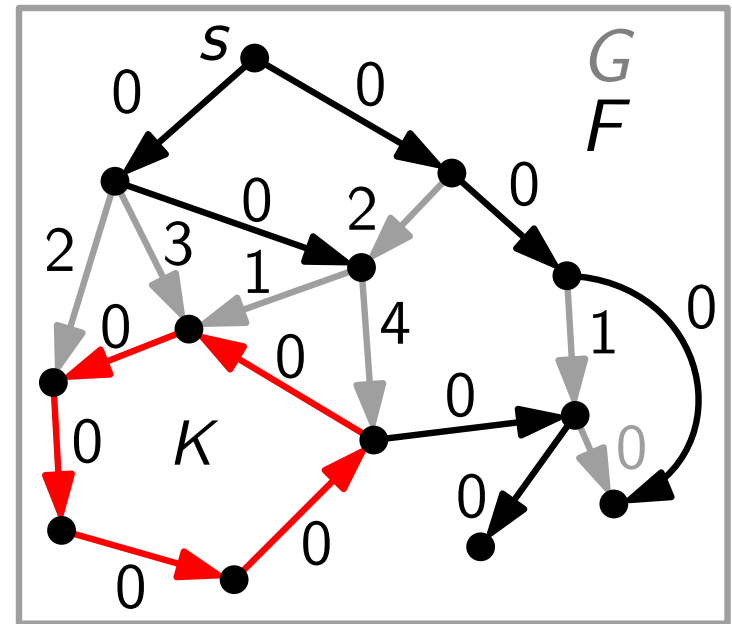


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .

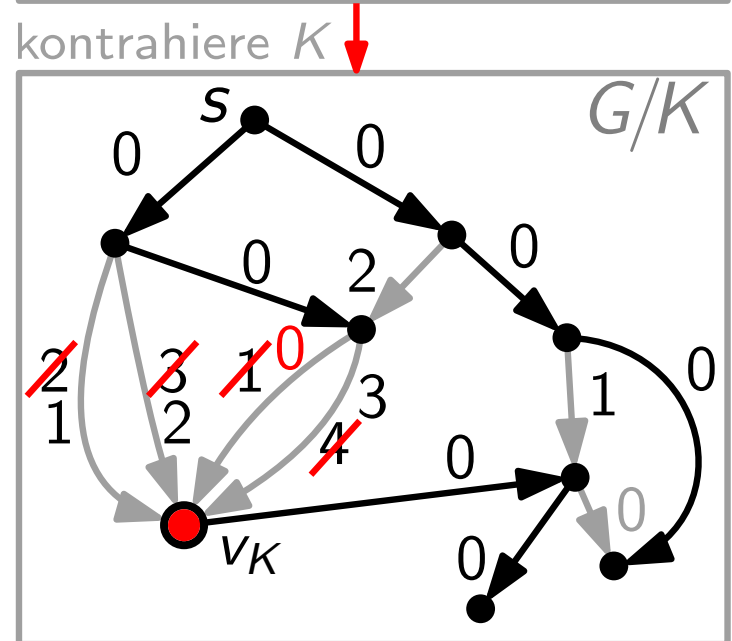
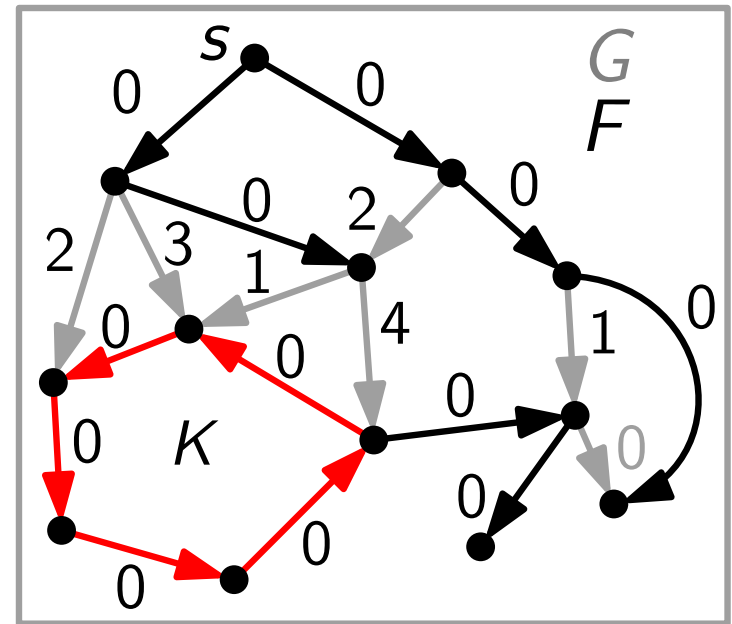


Jack R. Edmonds
 *1934

Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .

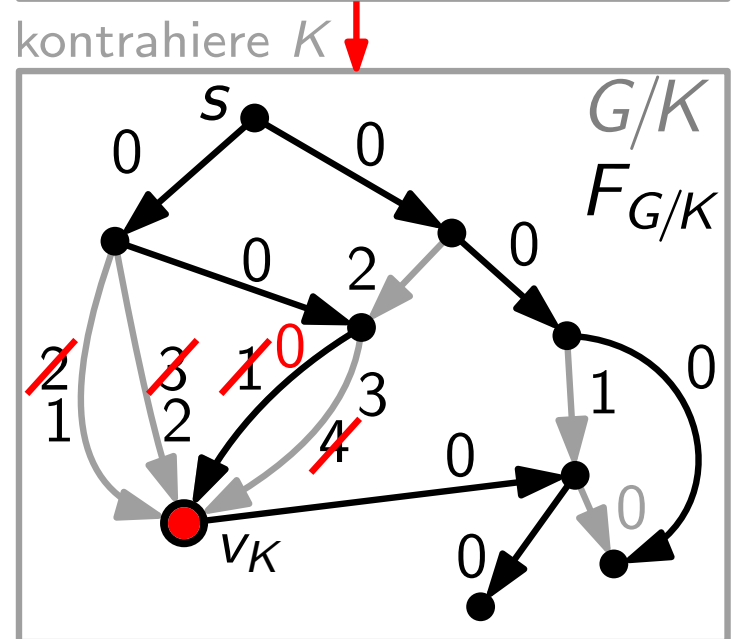
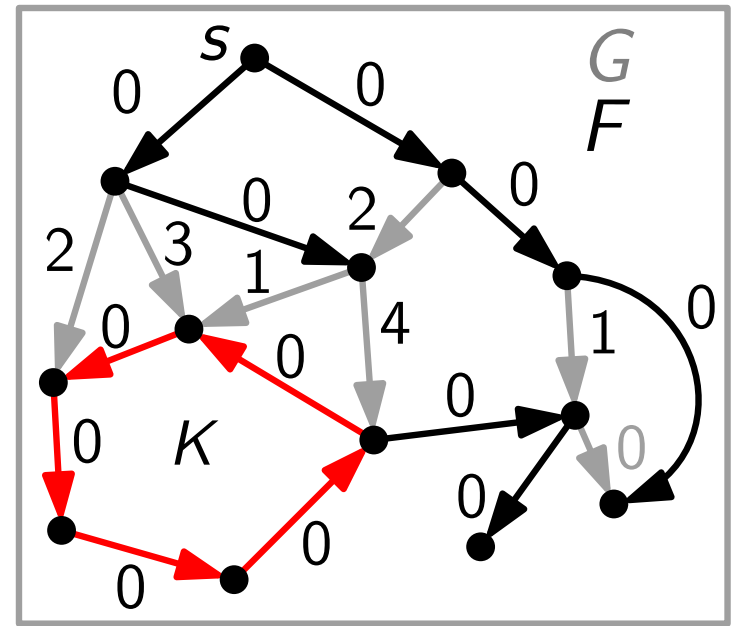


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .

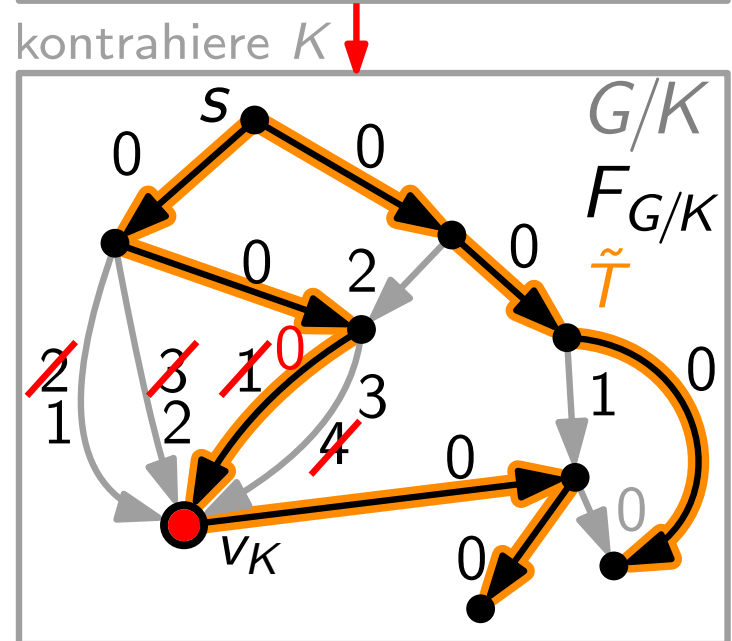
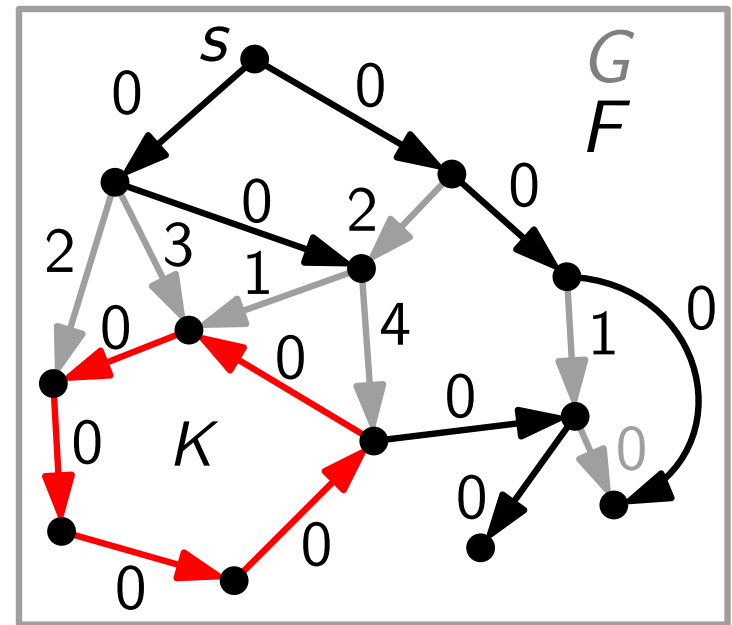


Jack R. Edmonds
 *1934

Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .



Jack R. Edmonds
*1934

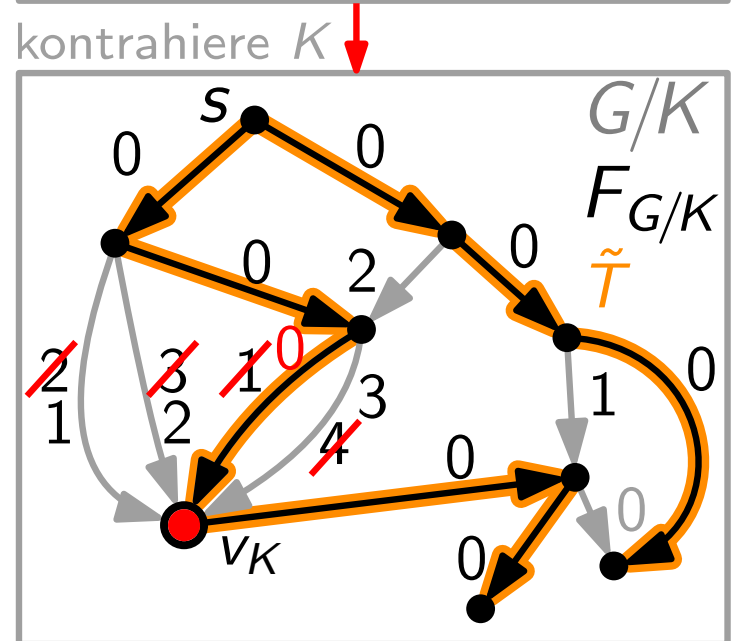
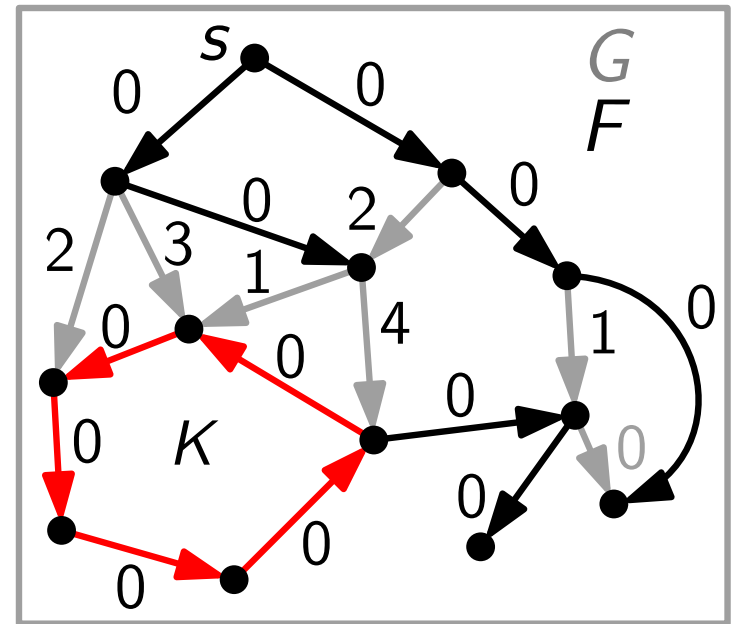
Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s -Wurzelspannbaum T von G .
 (nach Lemma 2!)



Jack R. Edmonds
*1934



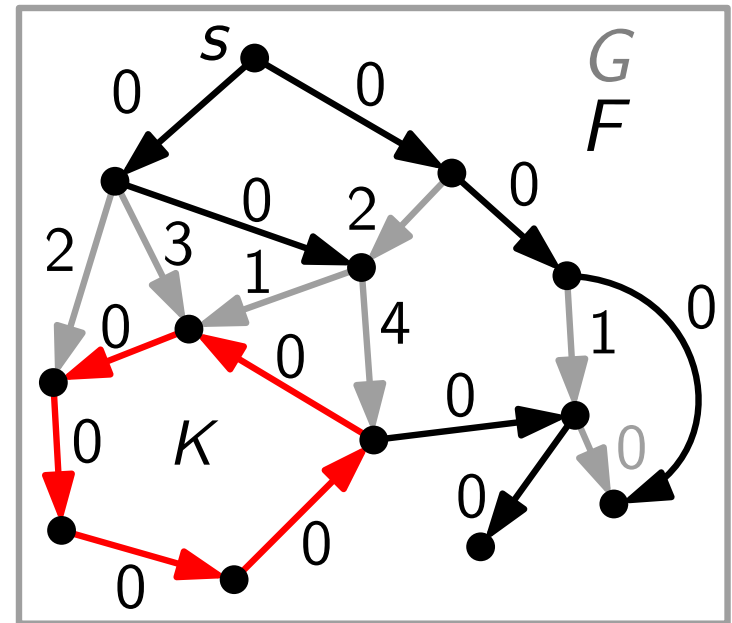
Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

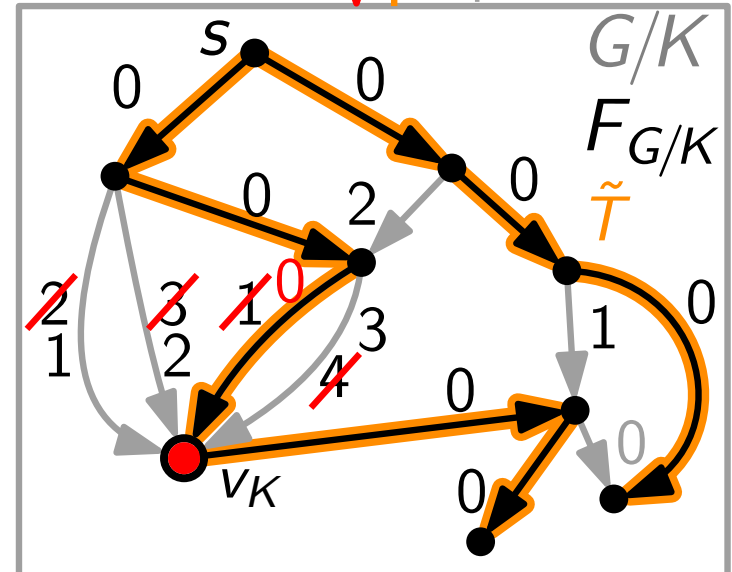
- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s -Wurzelspannbaum T von G .
 (nach Lemma 2!)



Jack R. Edmonds
*1934



kontrahiere K $\downarrow \uparrow$ expandiere $\tilde{T}$



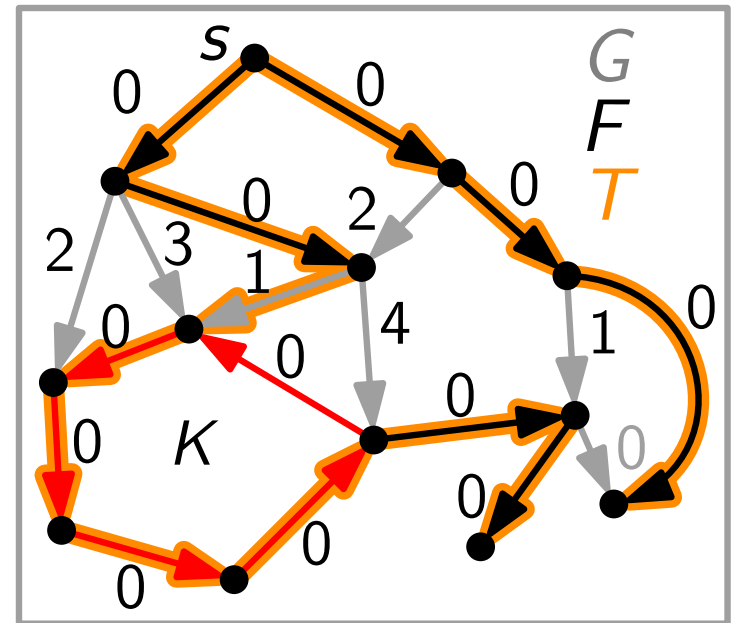
Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

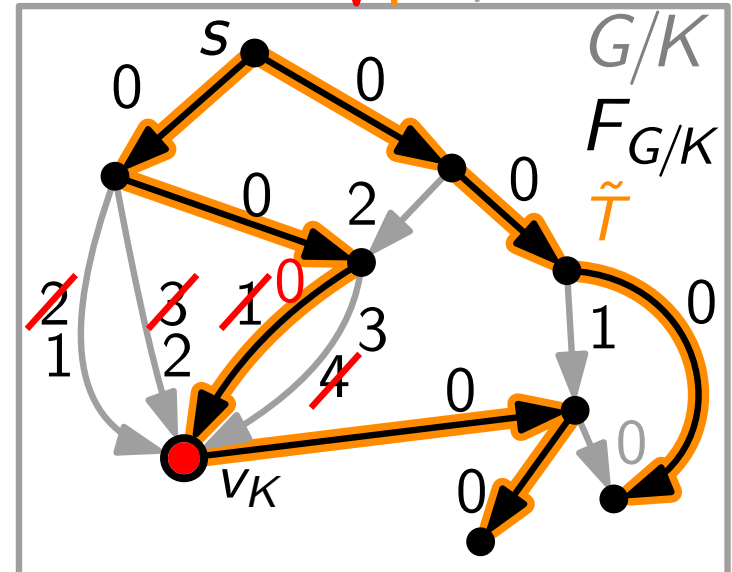
- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s -Wurzelspannbaum T von G .
 (nach Lemma 2!)



Jack R. Edmonds
*1934



kontrahiere K $\downarrow \uparrow$ expandiere $\tilde{T}$



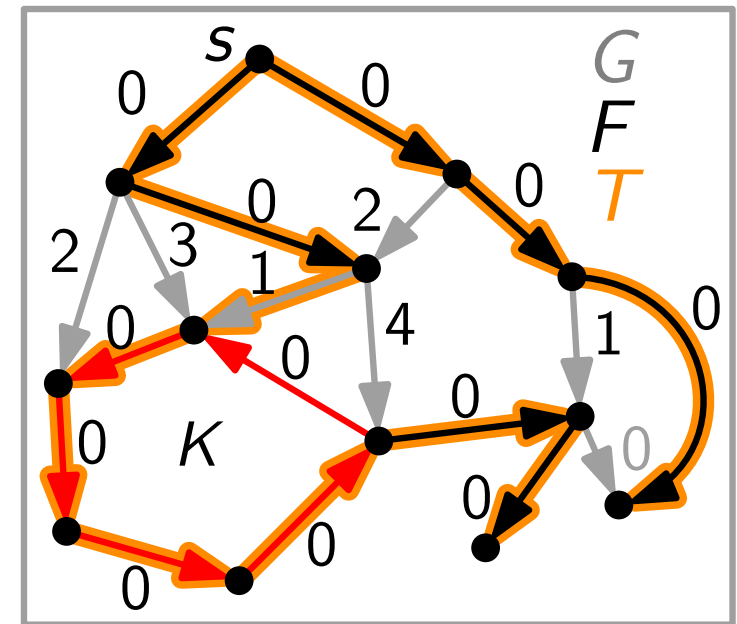
Algorithmus für (G, c)

[Edmonds 1967]

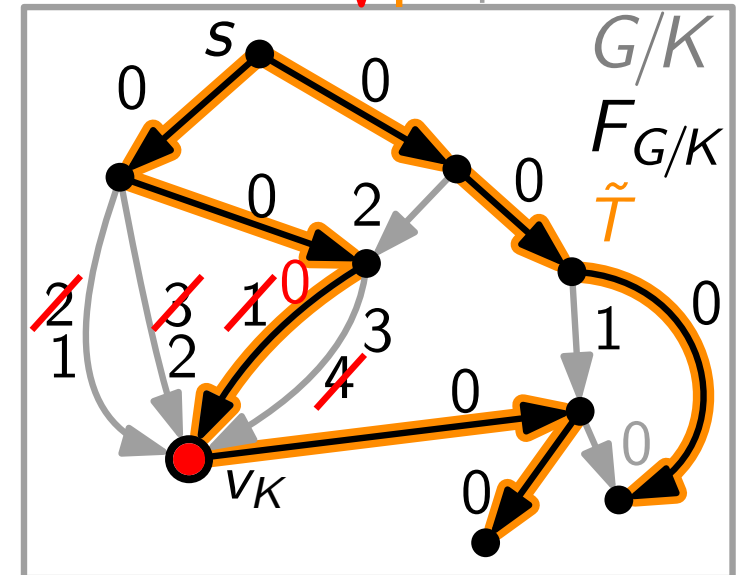
- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s -Wurzelspannbaum T von G .
 (nach Lemma 2!)
- Gib T zurück.



Jack R. Edmonds
*1934



kontrahiere K $\downarrow \uparrow$ expandiere $\tilde{T}$



Algorithmus für (G, c)

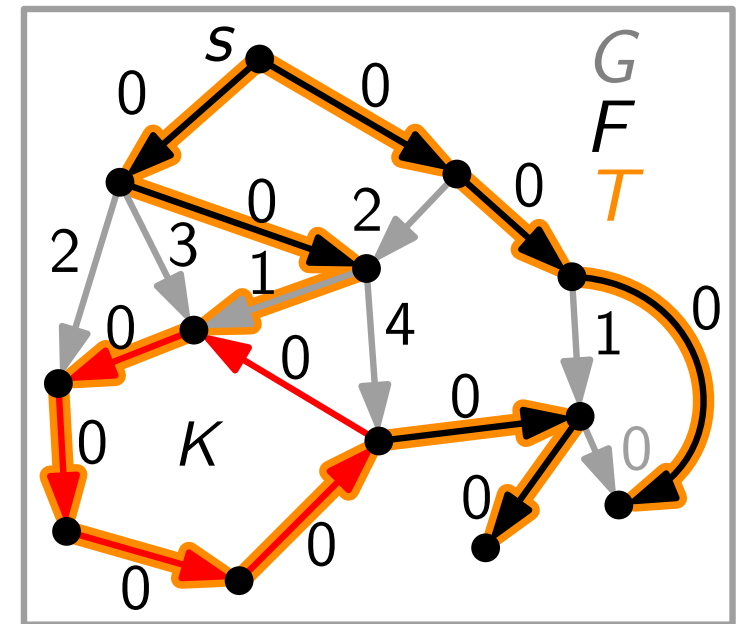
[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s -Wurzelspannbaum T von G .
 (nach Lemma 2!)
- Gib T zurück.

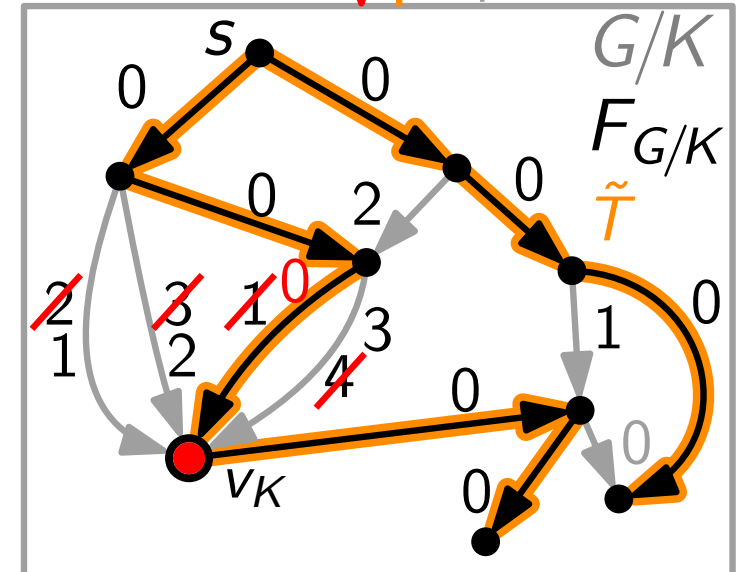
– Optimalität?



Jack R. Edmonds
*1934



kontrahiere K $\downarrow \uparrow$ expandiere $\tilde{T}$



Algorithmus für (G, c)

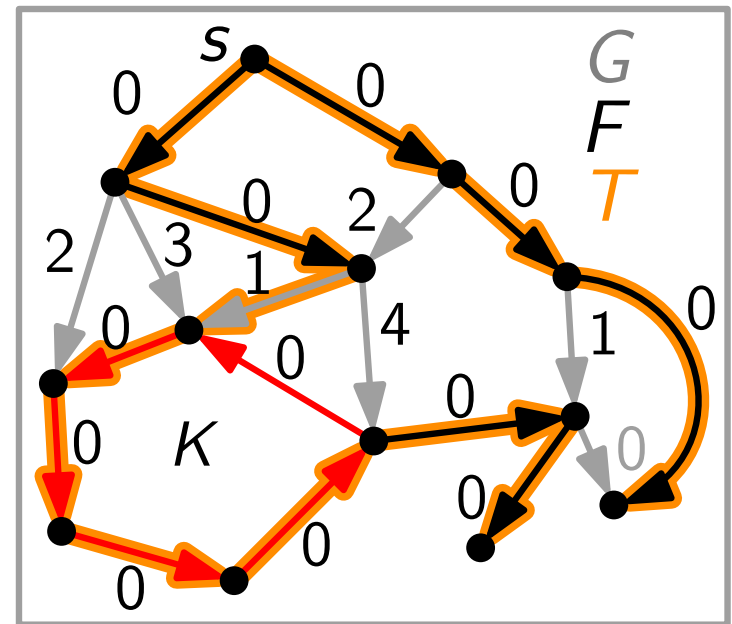
[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c' .
- Bestimme Teilgraph F .
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F .
- Kontrahiere G zu G/K .
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
 $\rightsquigarrow$ s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K .
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s -Wurzelspannbaum T von G .
 (nach Lemma 2!)
- Gib T zurück.

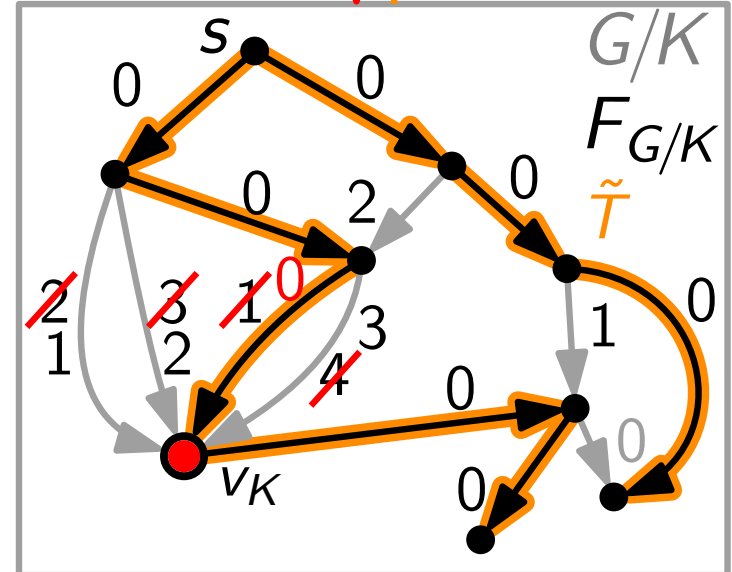
– Optimalität?
– Laufzeit?



Jack R. Edmonds
*1934



kontrahiere K $\downarrow \uparrow$ expandiere $\tilde{T}$



Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V(G)| \leq 2$.

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V(G)| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(|V(G)|)$ rekursive Aufrufe.

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V(G)| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(|V(G)|)$ rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils $O(|E(G)|)$ Zeit.

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V(G)| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(|V(G)|)$ rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils $O(|E(G)|)$ Zeit.

Satz. Angewandt auf einen gewichteten (Multi-) Graphen G , läuft Edmonds' Algorithmus in $O(|V(G)| \cdot |E(G)|)$ Zeit.

Optimalität

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Optimalität

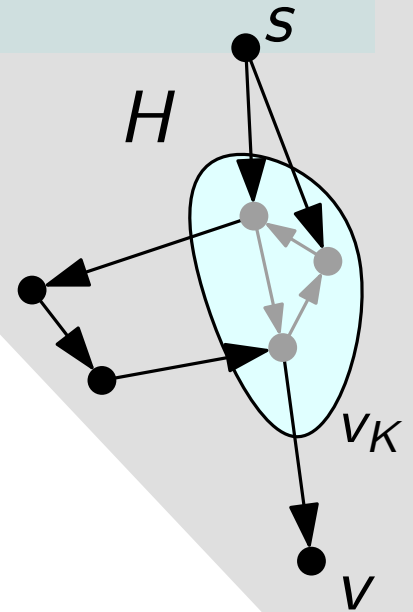
Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s -Wurzelspannbaum von G/K .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

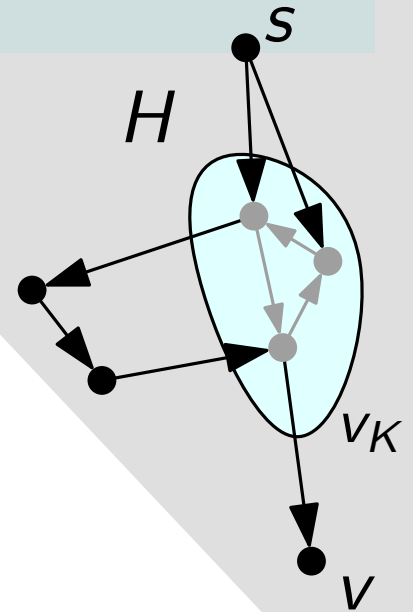


Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq$

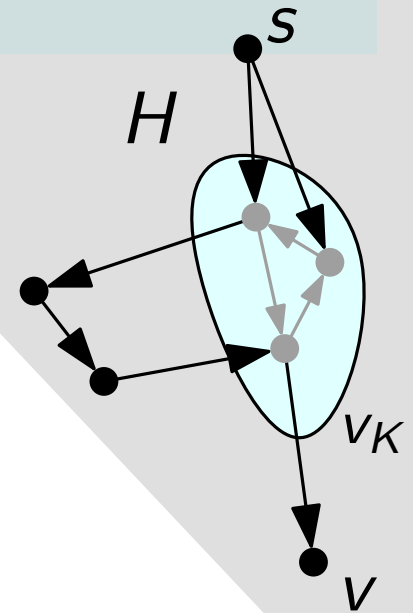


Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.



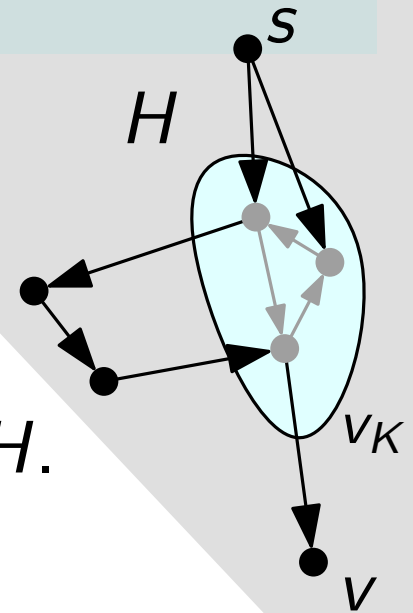
Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu
(nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .



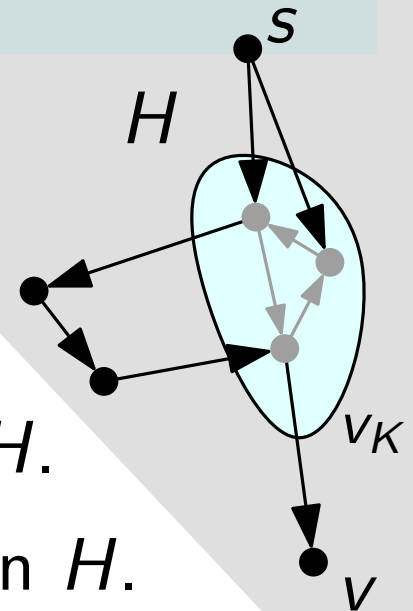
Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .
- Jeder s - u -Weg ($u \in K$) in T wird zu s - v_K -Weg in H .



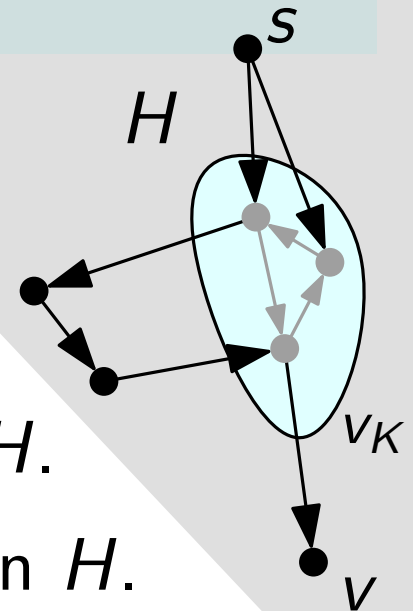
Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu
(nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .
 - Jeder s - u -Weg ($u \in K$) in T wird zu s - v_K -Weg in H .
- $\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.



Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

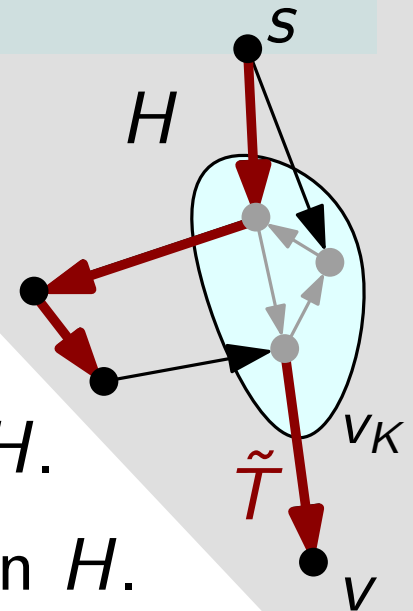
Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .
- Jeder s - u -Weg ($u \in K$) in T wird zu s - v_K -Weg in H .

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H .



Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

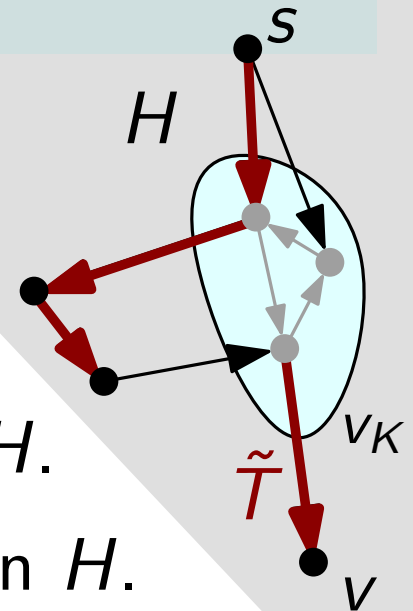
H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .
- Jeder s - u -Weg ($u \in K$) in T wird zu s - v_K -Weg in H .

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H .

$\Rightarrow \tilde{T}$ ist auch s -Wurzelspannbaum von G/K



Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

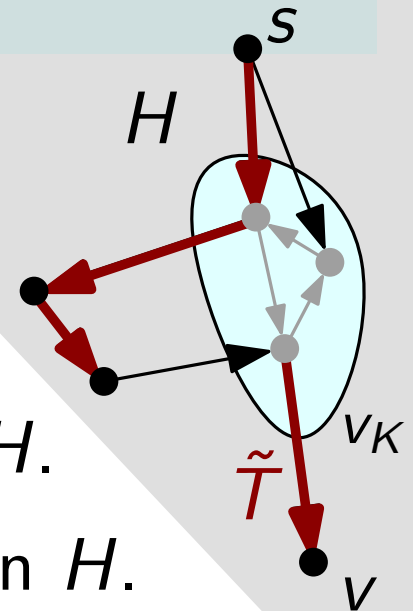
H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .
- Jeder s - u -Weg ($u \in K$) in T wird zu s - v_K -Weg in H .

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H .

$\Rightarrow \tilde{T}$ ist auch s -Wurzelspannbaum von G/K
und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq$



Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

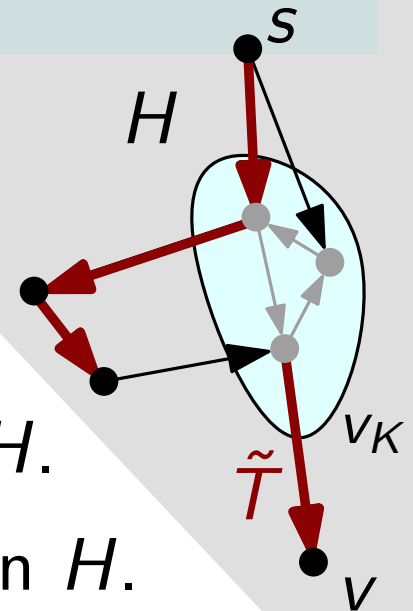
H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .
- Jeder s - u -Weg ($u \in K$) in T wird zu s - v_K -Weg in H .

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H .

$\Rightarrow \tilde{T}$ ist auch s -Wurzelspannbaum von G/K
und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq$



Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s -Wurzelspannbaum von G .
Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K
mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

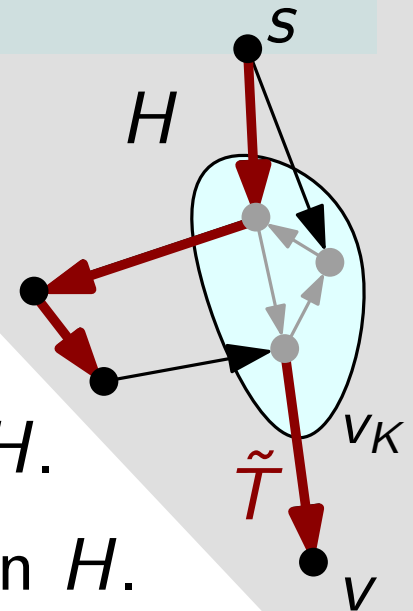
H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

- Jeder s - v -Weg ($v \in V(G) \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s - v -Weg in H .
- Jeder s - u -Weg ($u \in K$) in T wird zu s - v_K -Weg in H .

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s -Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H .

$\Rightarrow \tilde{T}$ ist auch s -Wurzelspannbaum von G/K
und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq c'(T)$.



Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .
Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .
Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*)$

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s -WSB $\hat{T}$ von G/K .

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s -WSB $\hat{T}$ von G/K .

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s -WSB $\hat{T}$ von G/K .

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

Lem. 2 liefert s -WSB T von G mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \text{OPT}'$.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s -WSB $\hat{T}$ von G/K .

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

Lem. 2 liefert s -WSB T von G mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \text{OPT}'$.

$\Rightarrow T$ ist optimal bzgl. c'

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s -WSB $\hat{T}$ von G/K .

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

Lem. 2 liefert s -WSB T von G mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \text{OPT}'$.

$\Rightarrow T$ ist optimal bzgl. c' und somit bzgl. c (Lem. 1).

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s -Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n von G .

Anfang ($n = 1$): $V(G) = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und T^* min. s -Wurzelspannbaum von G .

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s -WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s -WSB $\hat{T}$ von G/K .

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

Lem. 2 liefert s -WSB T von G mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \text{OPT}'$.

$\Rightarrow T$ ist optimal bzgl. c' und somit bzgl. c (Lem. 1). ✓ $\square$