

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

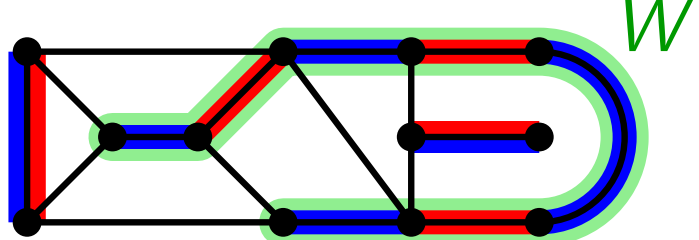
6. Vorlesung

## Matchings II

- Kombinatorischer Algorithmus, Anwendung für Handlungsreisende, LP-Runden –

# Alternierende und augmentierende Wege

**Ziel:** Besseres Problemverständnis  $\rightarrow$  kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

**Bsp.**   $G = (V, E)$  unger. Graph  
 $M \subseteq E$  Matching in  $G$ .

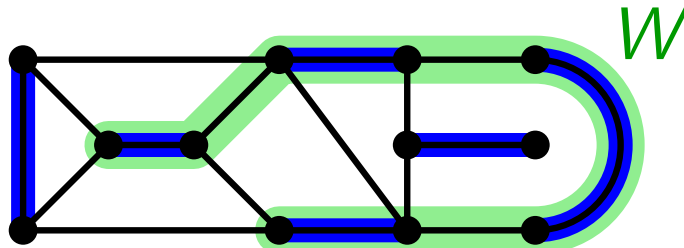
Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

*enthält abwechselnd  $M$ - und nicht- $M$ -Kanten*

- Finde einen ( $M$ -) *alternierenden Weg*  $W$ , dessen Endknoten  $M$ -frei sind. So ein Weg heißt ( $M$ -) *augmentierend*.
- Setze  $M' = W \Delta M$ , wobei  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  die *symm. Differenz* von  $A$  und  $B$  ist.

# Alternierende und augmentierende Wege

**Ziel:** Besseres Problemverständnis  $\rightarrow$  kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

**Bsp.**   $G = (V, E)$  unger. Graph  
 $M \subseteq E$  Matching in  $G$ .

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

*enthält abwechselnd  $M$ - und nicht- $M$ -Kanten*

- Finde einen ( $M$ -) *alternierenden Weg*  $W$ , dessen Endknoten  $M$ -frei sind. So ein Weg heißt ( $M$ -) *augmentierend*.
- Setze  $M' = W \Delta M$ , wobei  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  die *symm. Differenz* von  $A$  und  $B$  ist.

**Beob.** – Augmentierende Wege haben ungerade Länge.  
 –  $M'$  ist um 1 Kante größer als  $M$   
 (da  $M'$  zusätzlich die Endknoten von  $W$  paart).

# Satz von Berge

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  Graph,  
 $M \subseteq E$  Matching in  $G$ .

$M$  ist ein größtes Matching in  $G$

$\Leftrightarrow$  es gibt keinen  $M$ -augmentierenden Weg.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Klar: jeder augm. Weg würde  $M$  vergrößern ⚡  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme:  $M$  ist kein größtes Matching.

$\Rightarrow$  Es gibt ein Matching  $M'$  mit  $|M'| > |M|$ .

Betrachte  $G_{\Delta} = (V, M \Delta M')$ .

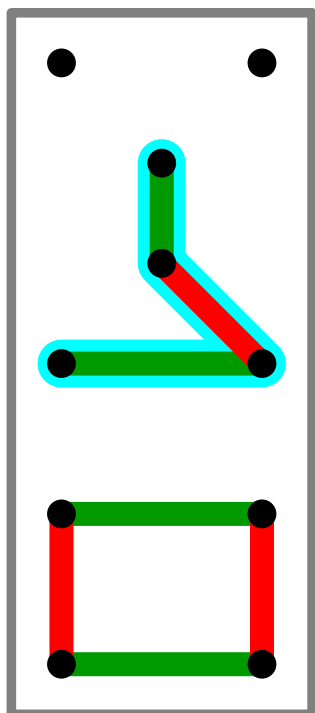
Beobachtung:  $\max_{v \in V} \deg_{G_{\Delta}}(v) \leq 2$ .

$\Rightarrow G_{\Delta}$  besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.

Alle Kreise in  $G_{\Delta}$  haben gerade Länge.

$\Rightarrow$  Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus  $M'$  als aus  $M$ .

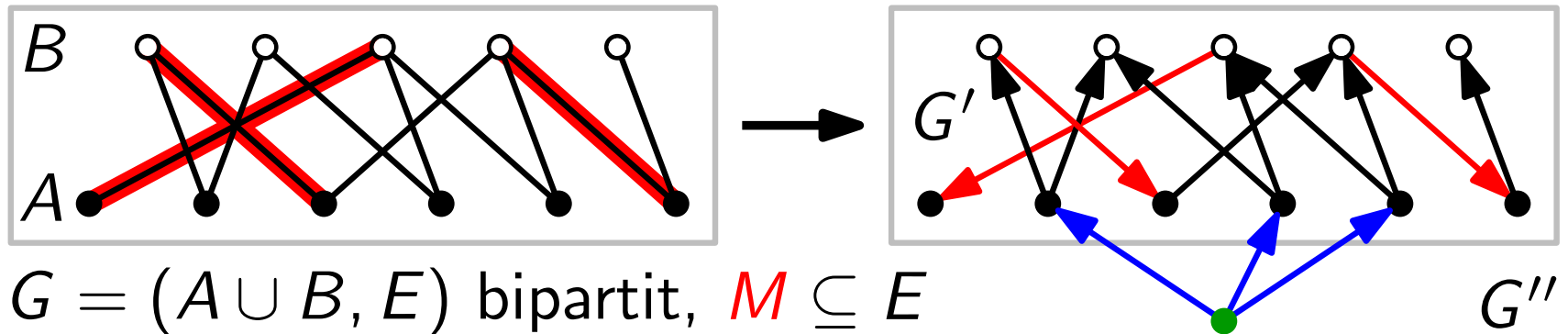
$\Rightarrow$  Dieser Weg ist  $M$ -augm. □



Claude Berge  
(1926–2002)

# Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

**Frage:** Wie finden wir augmentierende Wege?



**Idee:** Richte  $M$ -Kanten nach unten, nicht- $M$ -Kanten nach oben.  $\} \longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in  $G$



gerichtete Wege mit  $M$ -freien Endknoten in  $G'$

Definiere  $G'' = (A \cup B \cup \{s\}, E' \cup \{sa \mid a \in A, M\text{-frei}\})$

Breitensuche  $\text{BFS}(G'', s)$  erreicht einen  $M$ -freien Endknoten in  $B$



$G$  hat  $M$ -augm. Weg.

# Ergebnis

**Algo:**  $M := \emptyset$ .

Führe BFS  $\leq |V|/2$  mal aus –

bis kein freier Knoten in  $B$  mehr gefunden wird.

Gib größtes Matching zurück.

**Satz.** In einem bipartiten Graphen  $G = (V, E)$  lässt sich in  $O(VE)$  Zeit ein größtes Matching bestimmen.

**Bem.** Dinic' Fluss-Algorithmus berechnet [KN, Kapitel 9.6]  
 – maximale Flüsse in allg. Graphen in  $O(V^2E)$  Zeit  
 – Matchings in bipartiten Graphen in  $O(\sqrt{VE})$  Zeit.

**Satz.** Selbst in einem beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  lässt sich eine größte Paarung in  $O(\sqrt{VE})$  Zeit berechnen.

[Micali & Vazirani, FOCS'80]

# Wiederholung – Tree-Doubling für $\Delta$ -TSP

**Problem:** *Metrisches Traveling Salesperson Problem ( $\Delta$ -TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph  $G = (V, E)$   
 mit Kantenkosten  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  
 die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in  $G$  mit minimalen Kosten.

**Satz.** Es gibt eine 2-Approximation für  $\Delta$ -TSP.

*Beweis.*

*2. Analyse*

$$\begin{aligned} c(\text{ALG}) &\leq c(\text{EK}) \\ &= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT} \end{aligned}$$

*1. Algorithmus*

Berechne **MSB** von  $G$ .

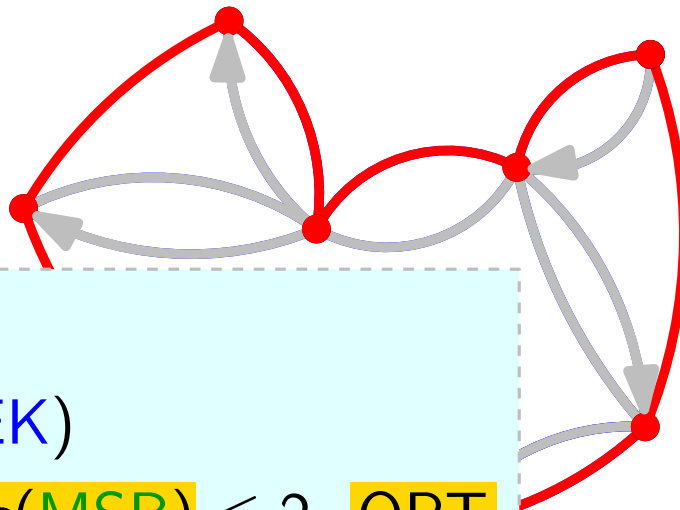
Verdopple MSB  $\Rightarrow$  eulersch!

Durchlaufe **Eulerkreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Opt. TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!  
 „Die Kunst der unteren Schranke“



# Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum  $B$  für  $G$ .
- Sei  $U$  die Menge der Knoten ungeraden Grades in  $B$ .
- Ermittle *kostenminimales perfektes Matching*  $M$  für  $G[U]$   
(existiert, da  $|U|$  gerade und  $G[U]$  vollständig).

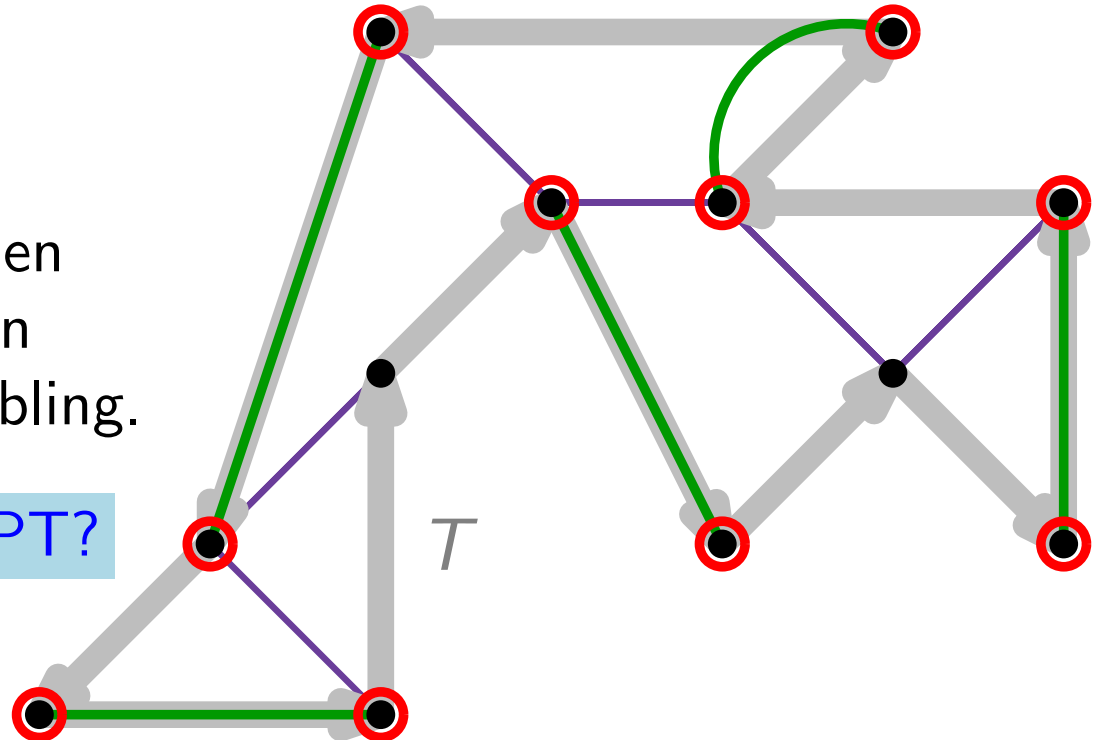
$M$  ist unter allen perfekten Matchings in  $G$  eines mit minimalen Kosten  
 $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von  $U$  induzierte Graph  
 $(U, \{vw \in E(G) : v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen  $B \cup M$  erst Eulertour und dann Rundtour  $T$  wie bei Tree-Doubling.

Wie gut ist  $T$  im Vergleich zu OPT?

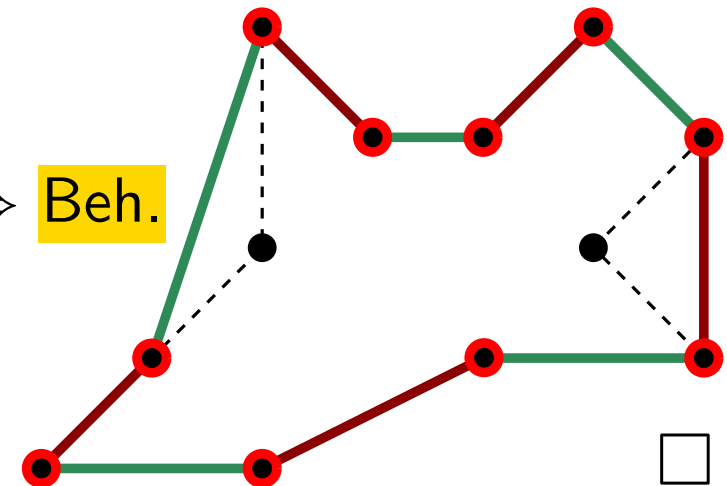


# Analyse von Christofides

**Satz.** Christofides liefert eine  $3/2$ -Approximation für  $\Delta$ -TSP.

## Beweis.

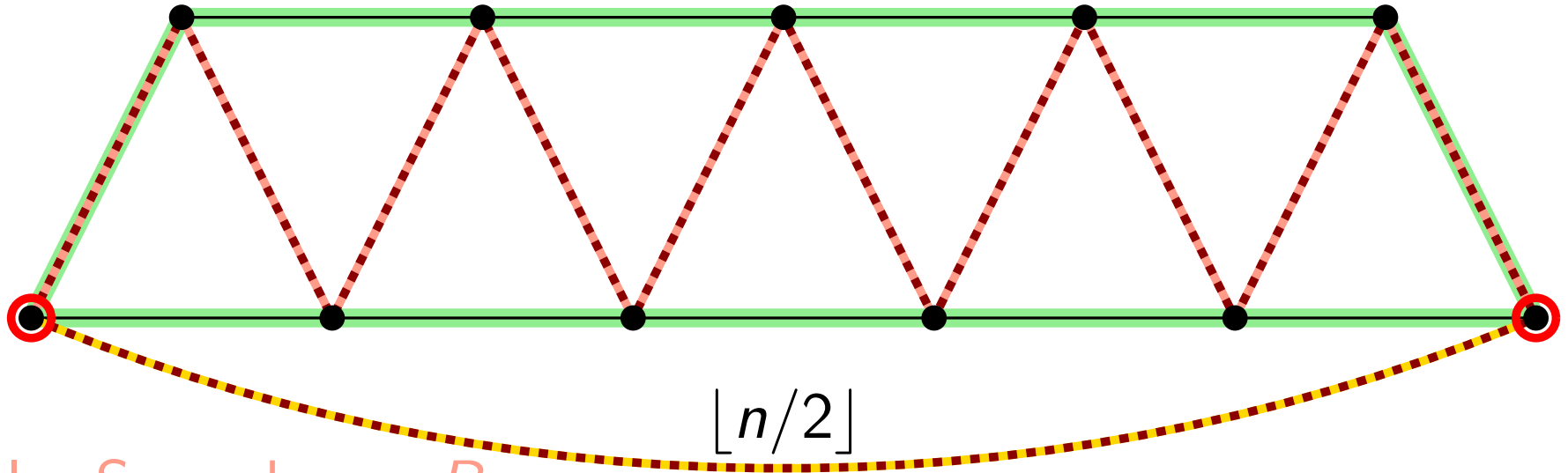
- Genügt zu zeigen, dass  $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \text{OPT}$ , da  $c(T) \leq c(B \cup M)$ .
- Da  $c(B) \leq \text{OPT}$ , genügt es zu zeigen, dass  $c(M) \leq \text{OPT}/2$ .
- Betrachte optimale Tour  $T^*$ .
- Abkürzen von  $T^*$  liefert Tour  $T^{**}$  in  $G[U]$  mit  $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \text{OPT}$ .
- Zerlege in  $T^{**}$  in zwei disjunkte perfekte Matchings  $M'$ ,  $M''$  für  $G[U]$ .
- O.B.d.A.  $c(M') \leq c(M'')$ .
- Also gilt  $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \text{OPT}/2$ .
- Außerdem gilt  $c(M) \leq c(M')$ , da
  - $M'$  perfektes Matching in  $G[U]$
  - $M$  kostenminimales perfektes Matching in  $G[U]$



# Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz  $G$ , für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante  $uv$  hat Kosten...  
Länge eines kürzesten  $u$ - $v$ -Weges ( $\Rightarrow G$  metrisch!)



minimaler Spannbaum  $B$

perfektes Matching  $M$  in  $G[U]$

Christofides-Tour  $T$  mit Kosten  $ALG = n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

$OPT = n$

$ALG / OPT = (n + \lfloor n/2 \rfloor - 1) / n \rightarrow 3/2$

Also:

Nicht die Analyse ist schlecht –  
sondern der Algorithmus!

# Kostenminimale perfekte Matchings

**Def.** Gegeben: vollständiger Graph  $G = (V, E)$  mit Kantenkosten  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  
Gesucht: perfektes Matching  $M$  mit minimalen Kosten  $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$ .

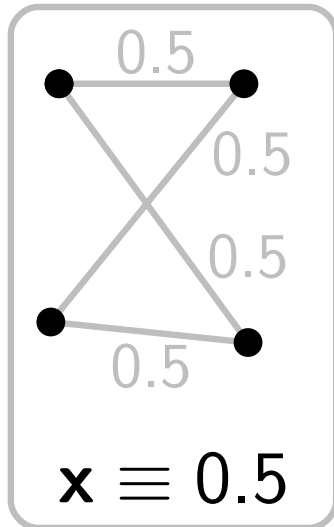
**Satz.** Ein kostenminimales perfektes Matching kann in  $O(V^3)$  Zeit berechnet werden.

**Beweis.** Siehe [Edmonds '65]; ziemlich kompliziert :- ( □

Im Folgenden betrachten wir das Problem nur in *bipartiten* Graphen  $G = (A \cup B, E)$ .

# Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für  $G = (A \dot{\cup} B, E)$  bipartit!



Minimiere

$$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$$

unter den Nebenbed.

$$\sum_{v \in \text{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$

~~$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \text{für } uv \in E$$~~

$$x_{uv} \geq 0$$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.
- Betrachte sogenannte *LP-Relaxierung*  $\Rightarrow$  effizient lösbar!  
Bei Minimierungsproblemen gilt  $\text{OPT}_{\text{LP}} \leq \text{OPT}_{\text{ILP}}$ .
- Problem: *fraktionale* Lösungen!

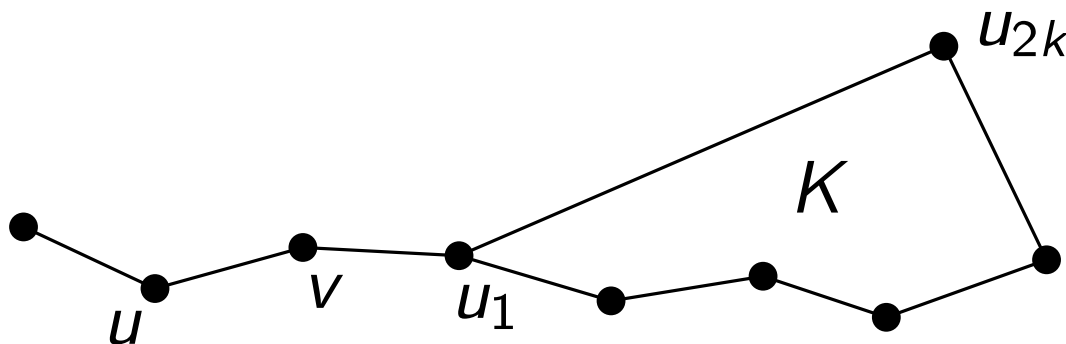
# LP-Runden

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \text{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$

Betrachte *fraktionale* Kante  $uv$  (d.h.  $0 < x_{uv} < 1$ ):

$u$  und  $v$  sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis  $K = (u_1, \dots, u_{2k})$  gefunden.



Kreis gerade, da Graph bipartit.

# LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \text{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$

Zerlege  $K$  in disjunkte Matchings  $M_1, M_2$ . Sei  $c(M_1) \leq c(M_2)$ .

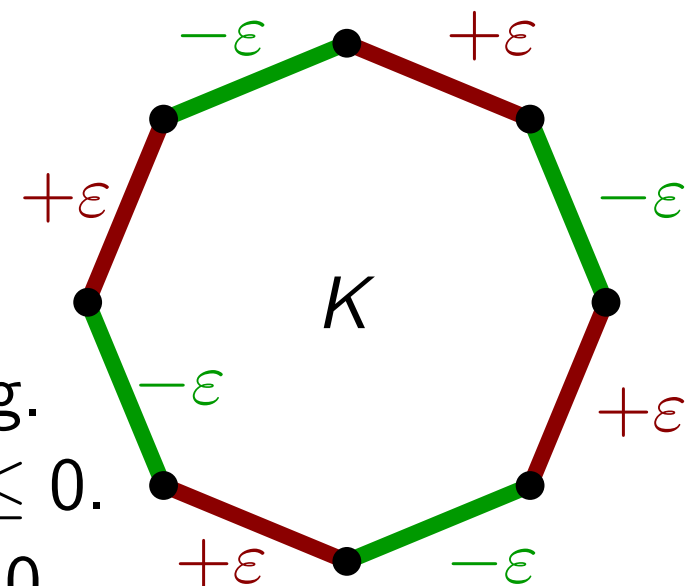
Wähle  $\varepsilon := \min\{x_e \mid e \in M_2\}$ .

Setze

$x'_e := x_e + \varepsilon$	für $e \in M_1$ ,
$x'_e := x_e - \varepsilon$	für $e \in M_2$ ,
$x'_e := x_e$	für $e \in E \setminus K$ .

- Resultierender Lösungsvektor  $\mathbf{x}'$  zulässig.
- Kostenänderung:  $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$ .
- Für mind. eine Kante  $e \in M_2$  gilt  $x'_e = 0$ .

$\Rightarrow \mathbf{x}'$  ist auch optimal – und hat mehr integrale Variablen als  $\mathbf{x}$ !!



# LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \text{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

**Beob.** – Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.  
– Zielfunktion erhöht sich nicht.

$\Rightarrow$  Algorithmus terminiert nach  $\leq |E|$  Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

**Satz.** In bipartiten Graphen kann man kostenminimale perfekte Matchings in Polynomialzeit ermitteln.

# Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \text{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$

Zerlege  $K$  in disjunkte Matchings  $M_1, M_2$ .

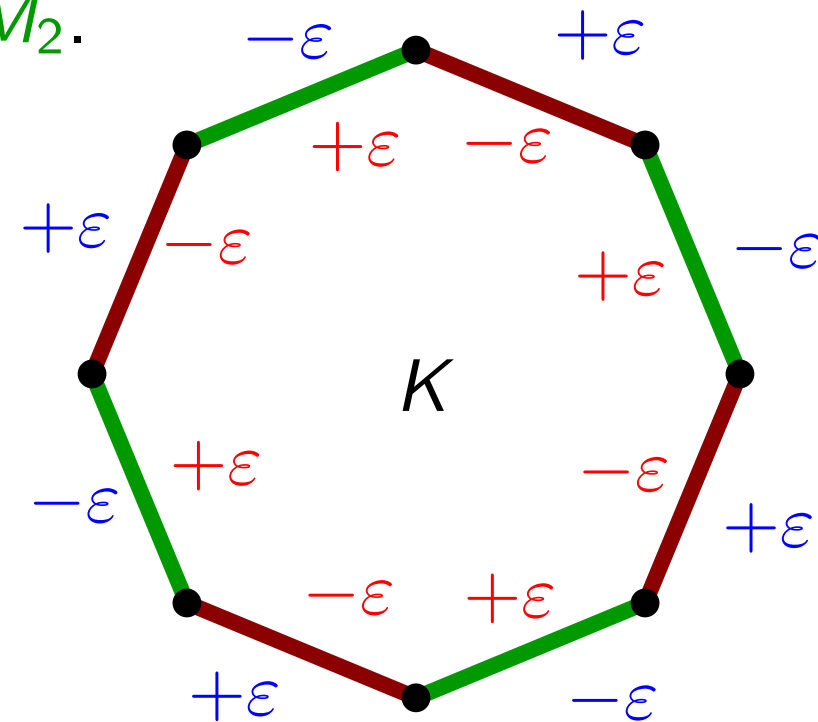
Wähle  $\varepsilon := \min\{x_e \mid e \in K\}$ .

Setze

$x'_e := x_e + \varepsilon$	für $x_e \in M_1$ ,
$x'_e := x_e - \varepsilon$	für $x_e \in M_2$ ,
$x'_e := x_e$	für $e \in E \setminus K$ .

Setze

$x''_e := x_e - \varepsilon$	für $x_e \in M_1$ ,
$x''_e := x_e + \varepsilon$	für $x_e \in M_2$ .
$x''_e := x_e$	für $e \in E \setminus K$ .



Beob.: Lösungen  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{x}''$  sind beide zulässig und  $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$ !

# Extrempunkt-Lösungen (II)

$$\begin{array}{l}
 \text{Minimiere} \\
 \text{unter den Nebenbed.}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} \\
 \sum_{v \in \text{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B \\
 x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E
 \end{array}
 \right\} (*)$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$  liegt auf der Strecke  $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{x}''}$ .

Außerdem sind  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  und  $\mathbf{x}''$  paarweise verschieden.

$\Rightarrow$  Die fraktionale Lösung  $\mathbf{x}$  ist *kein* Extrempunkt des Lösungsraums (konvexes Polytop) von  $(*)$ .

**Satz.** Polytop  $(*)$  für bipartite Matchings hat nur *ganzzahlige* Extrempunkte.

**Bem.** Gängige LP-Algorithmen terminieren mit Extrempunkt-Lösungen (sofern existent) und erfordern für obiges LP *kein* anschließendes LP-Runden!!

