

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

5. Vorlesung

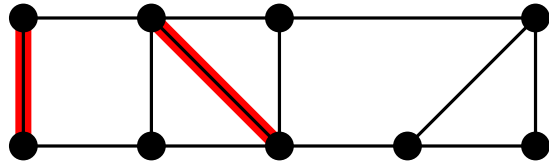
Matchings I

– Kombinatorische Anwendungen des Max-Flow-Min-Cut-Theorems –

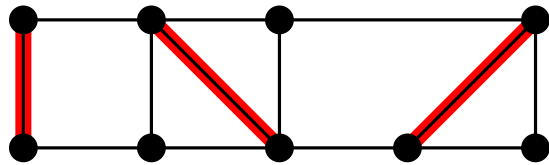
Paarungen (Matchings)

Def.

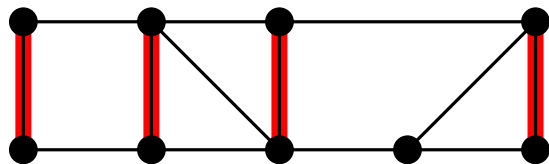
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



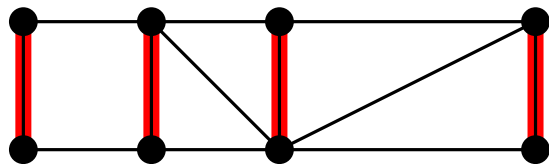
$M \subseteq E$ ist eine **Paarung** (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M **nicht erweiterbar** (engl. *maximal*).



Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine **größte Paarung** (engl. *maximum*).



Falls jeder Knoten in G durch M *gepaart* ist, so ist M eine **perfekte Paarung** (engl. *perfect*).

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0, 1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ inzident.

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$

Bemerkung:

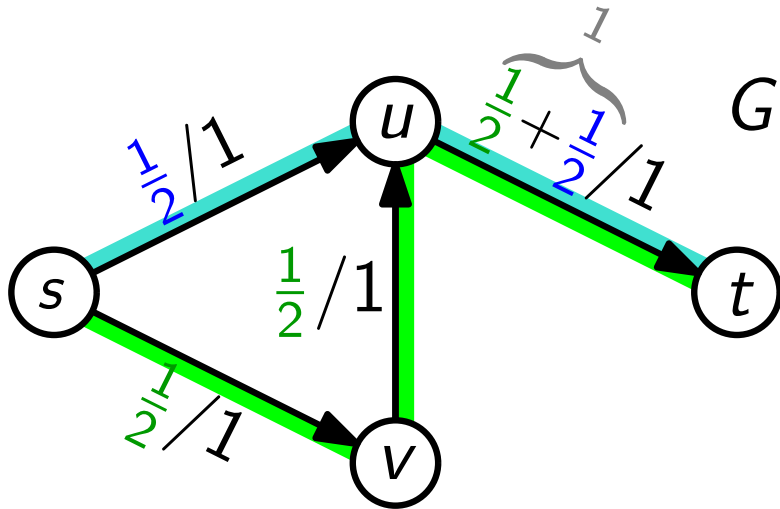
Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen!

[z.B. Blütenalg.,
Edmonds, 1961]

Größte Paarung kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

(Beob.: Für G bipartit ist das fraktionale Matching-Polyeder ganzzahling, d.h. es genügt, das LP mit $x_e \geq 0$ zu lösen, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen.)

Ganzzahligkeitssatz



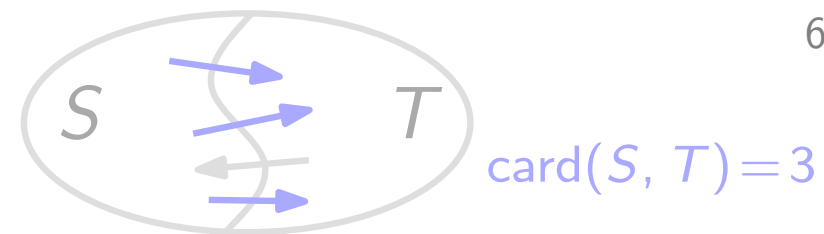
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Korollar. Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

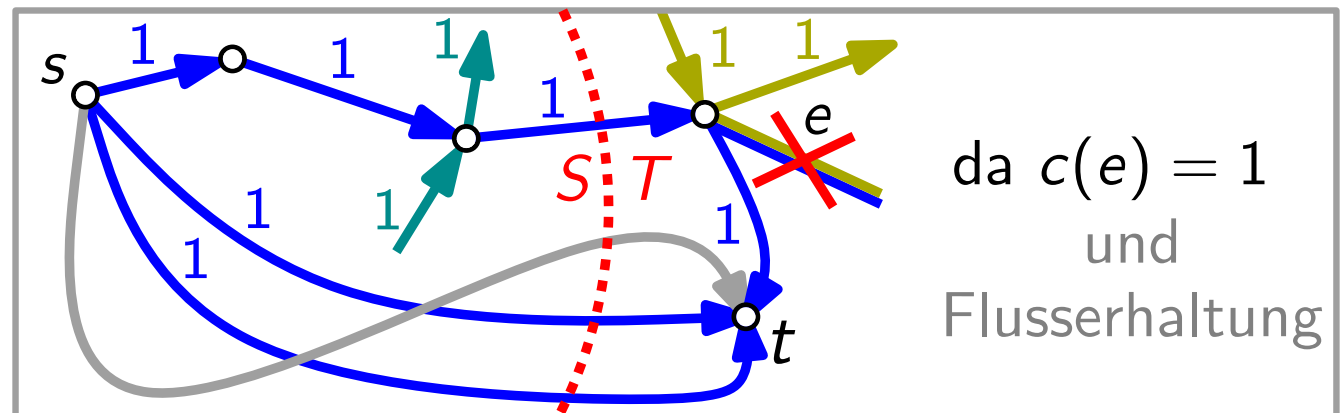
Beweis. Wende FordFulkerson oder EdmondsKarp an! \square

Kantendisjunkte Wege



Satz. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s - t -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s - t -Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s - t -Fluss. \Rightarrow oBdA. $f: E(G) \rightarrow \{0, 1\}$.
 Ganzz.-Satz
 Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



$\Rightarrow A := \max.$ Anz. kantendisj. s - t -Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s - t -Schnitt.

\Rightarrow jeder s - t -Weg trägt ≥ 1 Kante zu $\text{Raus}(S)$ bei.

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Satz von Menger

Wir wissen nun $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines
min. Schnittes

=

Wert eines
max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|.$

\Rightarrow Minimale Kardinalität eines s - t -Schnitts

= maximale Anzahl kantendisjunkter s - t -Wege □

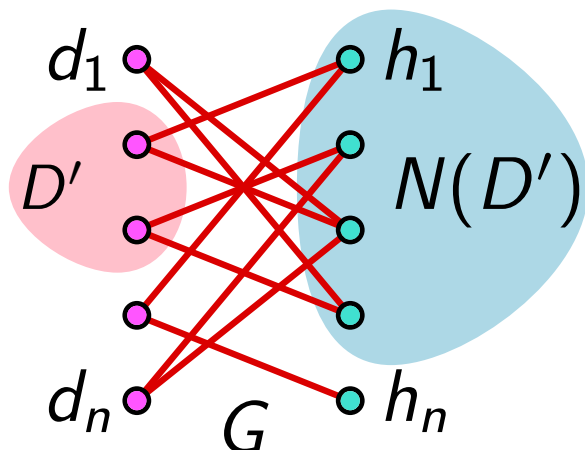
Satz. Sei G gerichteter Graph, $s, t \in V(G)$, $st \notin E(G)$.
Dann ist die max. Anzahl *knotendisjunkter* s - t -Wege
gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge,
die s und t trennt. [Menger, 1927]

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ von n Damen und eine Menge $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ von n Herren mit $D \cap H = \emptyset$, sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit, d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist
 $N(v) := \text{Adj}[v]$

Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist
 $N(D') := \bigcup_{v' \in D'} N(v')$

Der Heiratssatz

[Hall 1935]

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot{\cup} H, E)$!

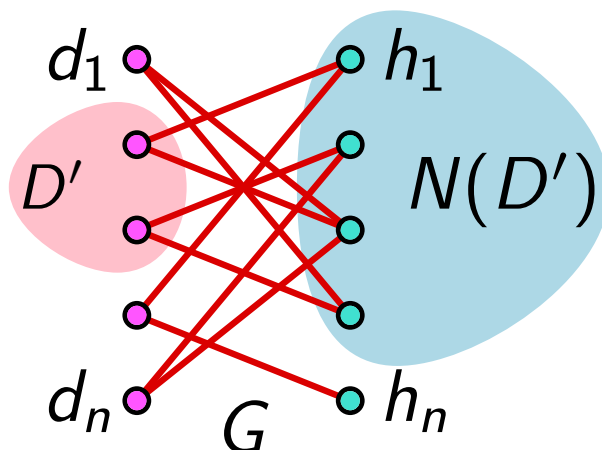
Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Satz. Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

G hat eine perfekte Paarung \Leftrightarrow
für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Modell.



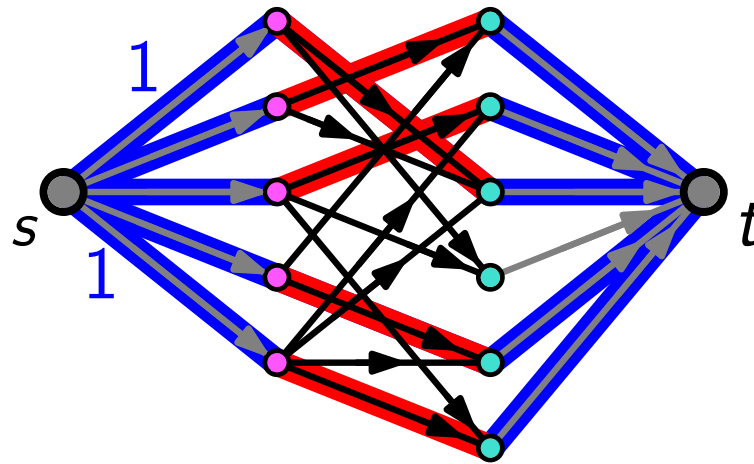
Beweis
später!

Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge



Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E(G') \rightarrow \{1\}$$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen **größte** Paarungen berechnet.

Beob.

<i>größter</i>		<i>größte</i>
Ganzzahl. s - t -Fluss in G'	$\xleftrightarrow{1\text{-zu-1}}$	Paarung in G
\updownarrow		\updownarrow
<i>größte</i>		<i>größte</i>
Menge <i>kantendisjunkter</i> s - t -Wege in G'	\longleftrightarrow	Menge <i>unabhängiger</i> Kanten in G

Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**
 in Linearzeit *reduziert*
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

sehr speziellen

mit Kap. $\equiv 1$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten.
 Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$
 Zeit bestimmen.

ausnutzen!

Beweis.

- Konstruktion von G' : *Laufzeit* $O(n + m)$
- Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G' : $O(n \cdot (m')^2)$

Berechnet höchstens n s - t -Wege in je $O(m')$ Zeit $= O(nm^2)$

$O(nm^2)$

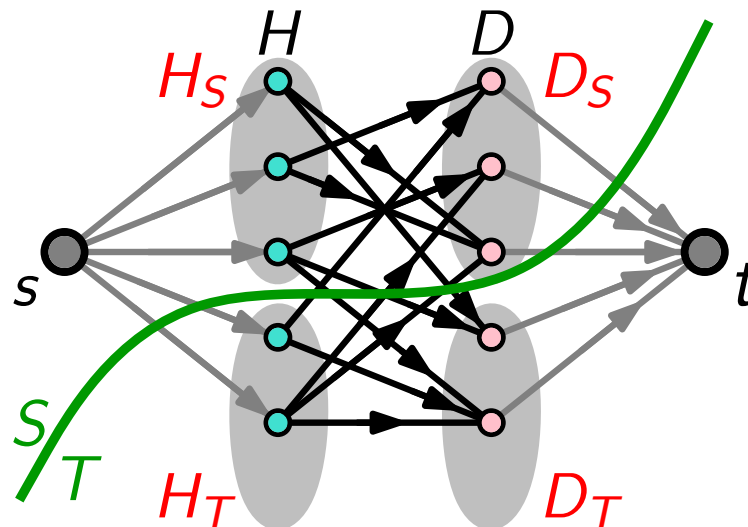
Anmerkungen

- Bem.** Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
- maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(n^2m)$ Zeit
 - Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{nm})$ Zeit.

[KN, Kapitel 9.6]

Satz. Selbst in einem beliebigen Graphen mit n Knoten und m Kanten lässt sich eine größte Paarung in $O(\sqrt{nm})$ Zeit berechnen. [Micali & Vazirani, FOCS'80]

Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$$

$$c: E(G') \rightarrow \{1\}$$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung \Leftrightarrow für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis.
 „ \Leftarrow “

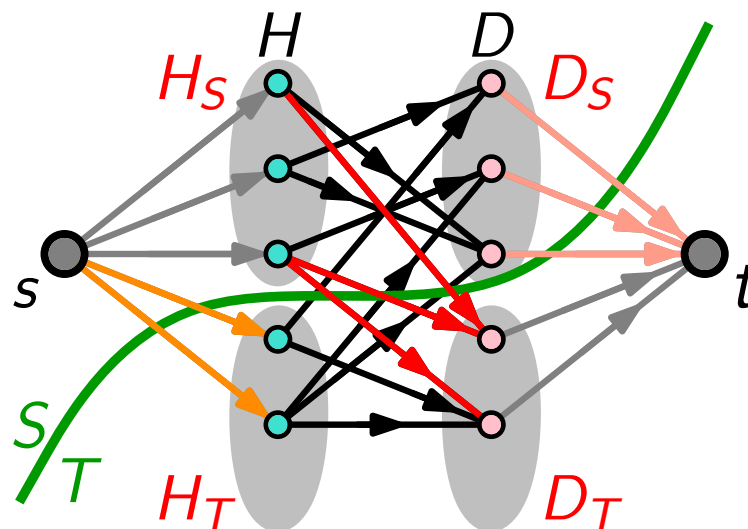
G hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$ hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

\Leftarrow für jeden s - t -Schnitt (S, T) in G' gilt $c(S) \geq |D|$

zu zeigen!

Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$$

$$c: E(G') \rightarrow \{1\}$$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung \Leftrightarrow für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis.
 „ \Leftarrow “

z.z.: (S, T) s - t -Schnitt in $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$$\geq |D_T| + |D_S| = |D|$$

□