Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

5. Vorlesung

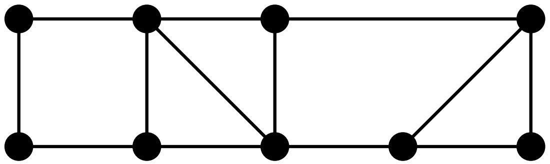
Matchings I

– Kombinatorische Anwendungen des Max-Flow-Min-Cut-Theorems –

Lehrstuhl für Informatik I *Alexander Wolff*

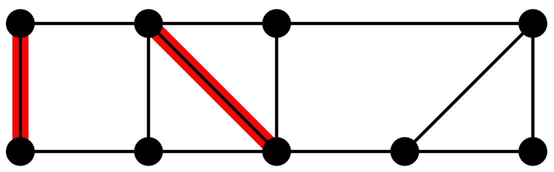
Paarungen (Matchings)

Def. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



Paarungen (Matchings)

Def.

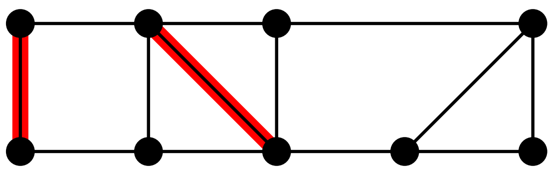


Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

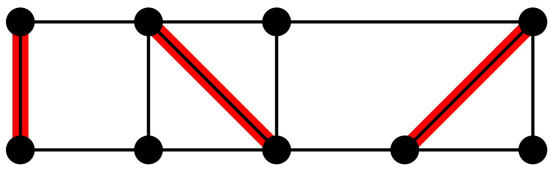
$M \subseteq E$ ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.

Paarungen (Matchings)

Def. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



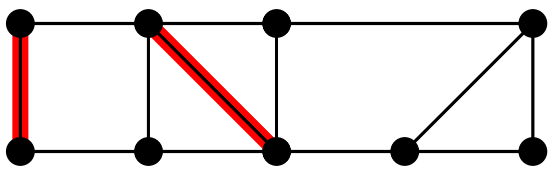
$M \subseteq E$ ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



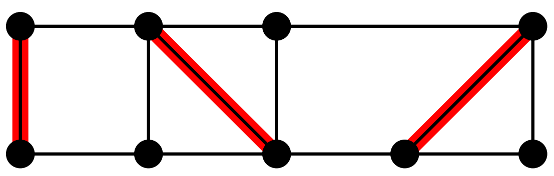
Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).

Paarungen (Matchings)

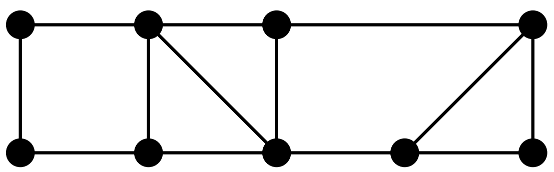
Def. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



$M \subseteq E$ ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



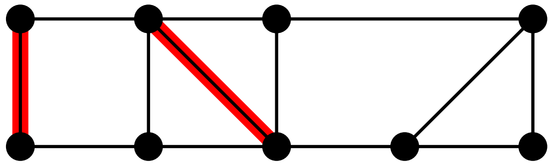
Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).



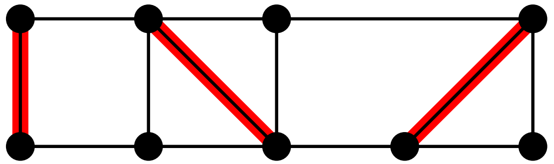
Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine *größte* Paarung (engl. *maximum*).

Paarungen (Matchings)

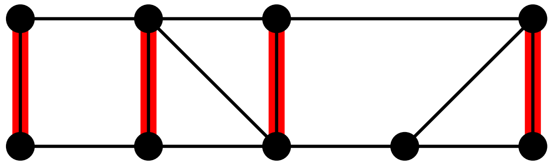
Def. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



$M \subseteq E$ ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



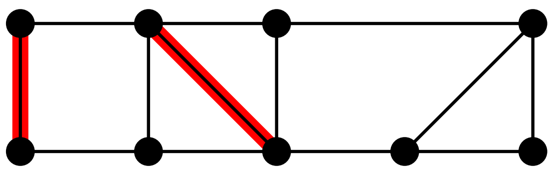
Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).



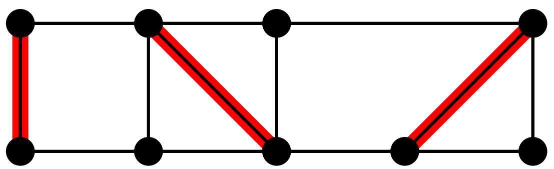
Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine *größte* Paarung (engl. *maximum*).

Paarungen (Matchings)

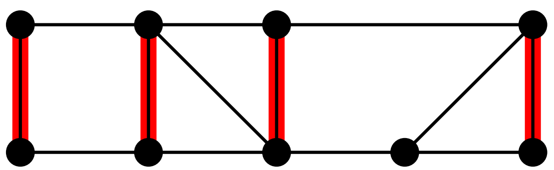
Def. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



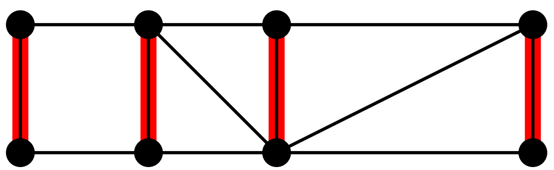
$M \subseteq E$ ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).



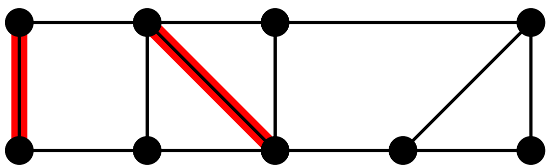
Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine *größte* Paarung (engl. *maximum*).



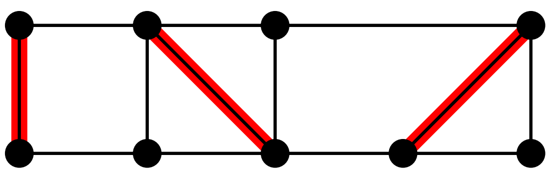
Falls jeder Knoten in G durch M *gepaart* ist, so ist M eine *perfekte* Paarung (engl. *perfect*).

Paarungen (Matchings)

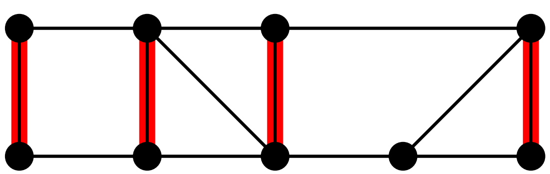
Def. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



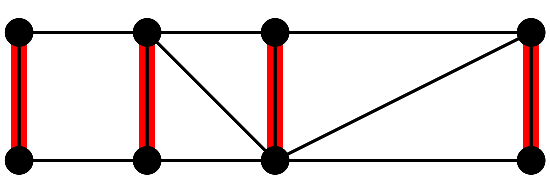
$M \subseteq E$ ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).



Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine *größte* Paarung (engl. *maximum*).



Falls jeder Knoten in G durch M *gepaart* ist, so ist M eine *perfekte* Paarung (engl. *perfect*).

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:

2. Zielfunktion:

3. Nebenbedingungen:

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: für jede Kante e von G

2. Zielfunktion:

3. Nebenbedingungen:

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0, 1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion:

3. Nebenbedingungen:

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0,1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0,1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0,1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

für jeden Knoten v von G

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0, 1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

$\sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1$ für jeden Knoten v von G

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0, 1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

$\sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1$ für jeden Knoten v von G

Bemerkung:

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0, 1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

$\sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1$ für jeden Knoten v von G

Bemerkung:

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen!

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0,1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

$\sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1$ für jeden Knoten v von G

Bemerkung:

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen! [z.B. Blütenalg., Edmonds, 1961]

Größte Paarung kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0, 1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

$\sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1$ für jeden Knoten v von G

Bemerkung:

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen! [z.B. Blütenalg., Edmonds, 1961]

Größte Paarung kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

(Beob.: Für G bipartit ist das fraktionale Matching-Polyeder ganzzahling, d.h. es genügt, das LP mit $x_e \geq 0$ zu lösen, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen.)

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0,1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ inzident.

$\sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1$ für jeden Knoten v von G

Bemerkung:

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen! [z.B. Blütenalg., Edmonds, 1961]
Größte Paarung kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

(Beob.: Für G bipartit ist das fraktionale Matching-Polyeder ganzzahling, d.h. es genügt, das LP mit $x_e \geq 0$ zu lösen, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen.)

https://en.wikipedia.org/wiki/Matching_polytope

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. In einem Flussnetzwerk G mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T) \ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. In einem Flussnetzwerk G mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

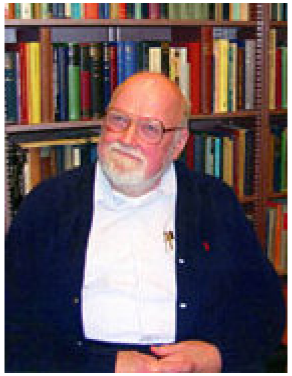
d.h. der Wert eines maximalen s-t-Flusses ist gleich der Kapazität eines minimalen s-t-Schnittes.

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. In einem Flussnetzwerk G mit Kap. $c \colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T) \; s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

d.h. der Wert eines maximalen s-t-Flusses ist gleich der Kapazität eines minimalen s-t-Schnittes.

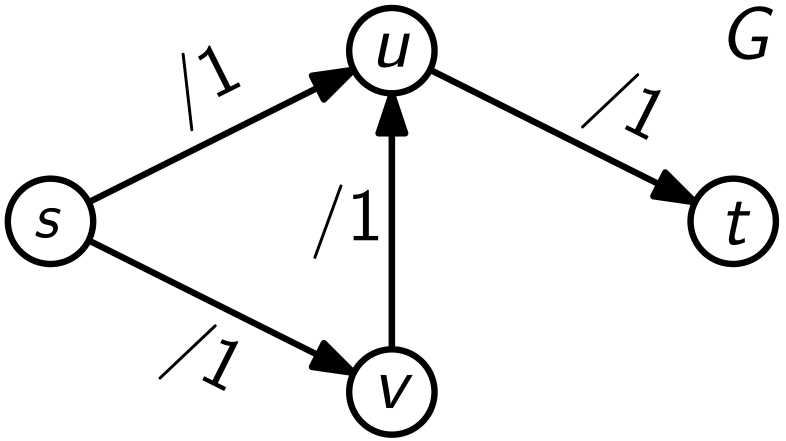


Lester Randolph Ford, Jr.
(1927–2017)

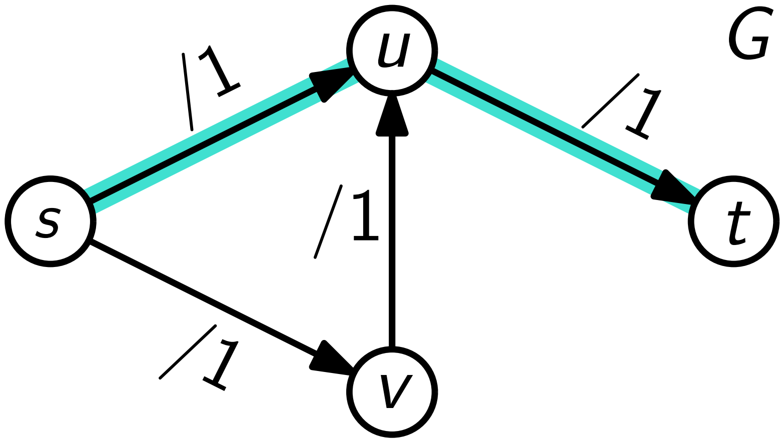
Delbert R. Fulkerson
(1924–1976)

[Ford & Fulkerson 1956]
[Elias, Feinstein, Shannon 1956]
[Kotzig 1956]

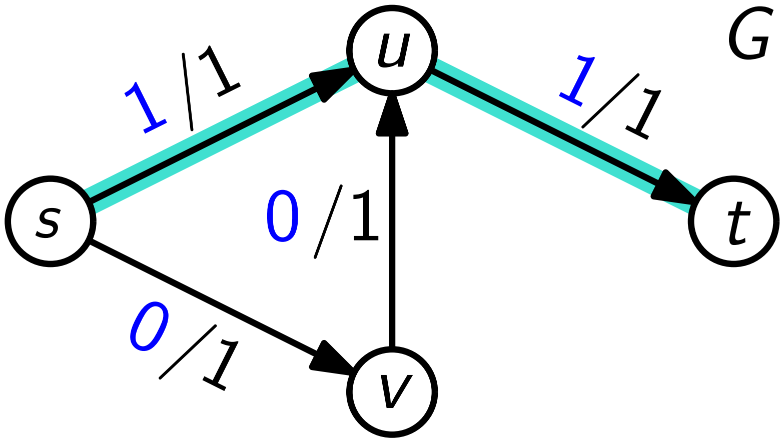
Ganzzahligkeitssatz



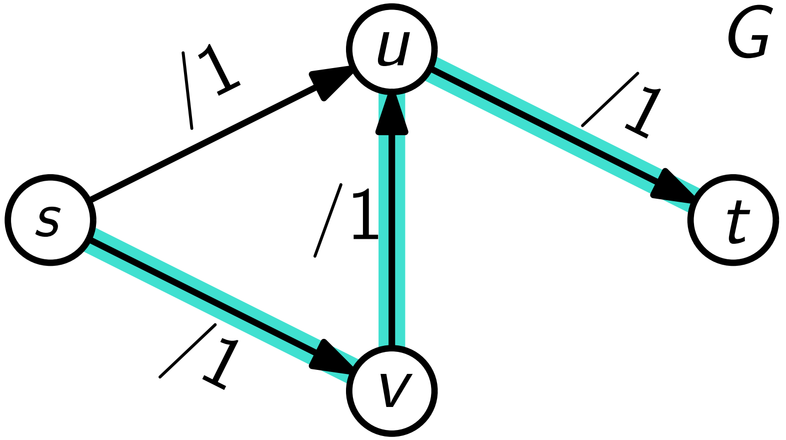
Ganzzahligkeitssatz



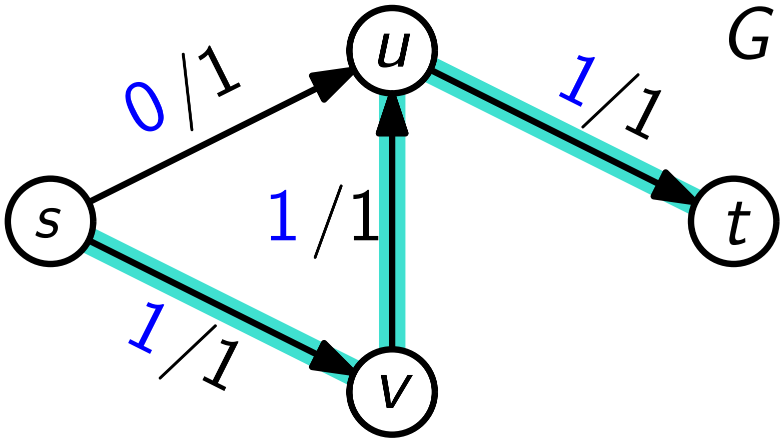
Ganzzahligkeitssatz



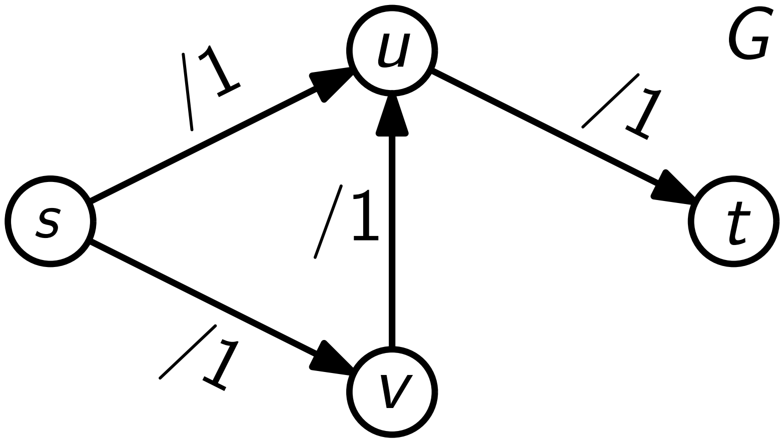
Ganzzahligkeitssatz



Ganzzahligkeitssatz

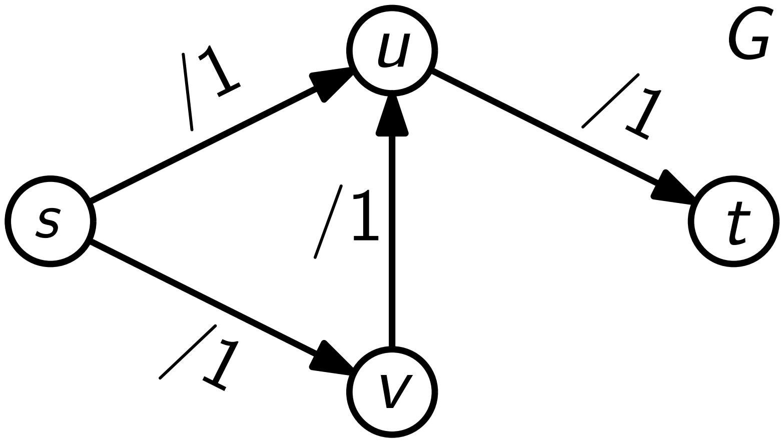


Ganzzahligkeitssatz



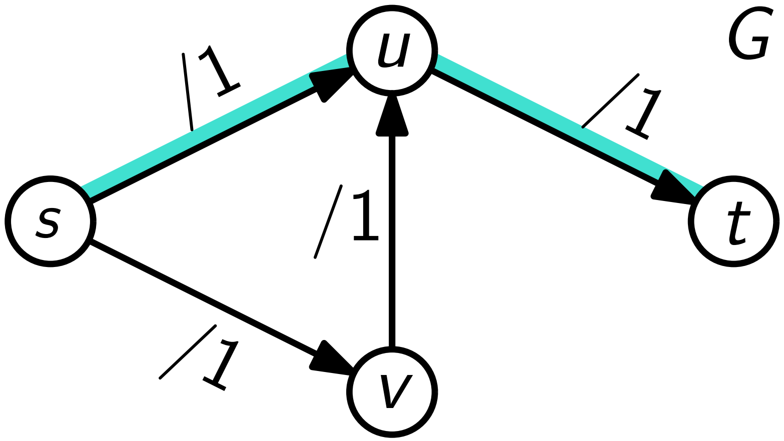
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss?

Ganzzahligkeitssatz



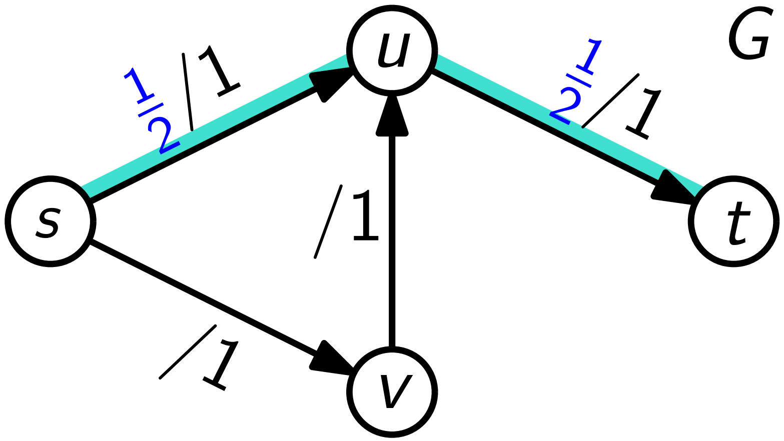
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

Ganzzahligkeitssatz



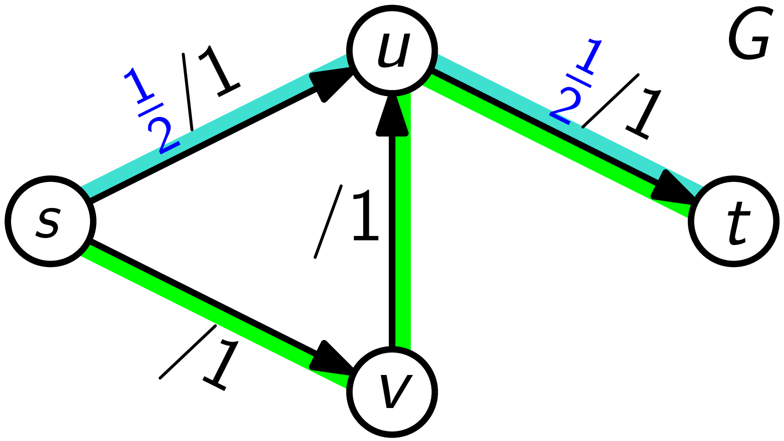
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

Ganzzahligkeitssatz



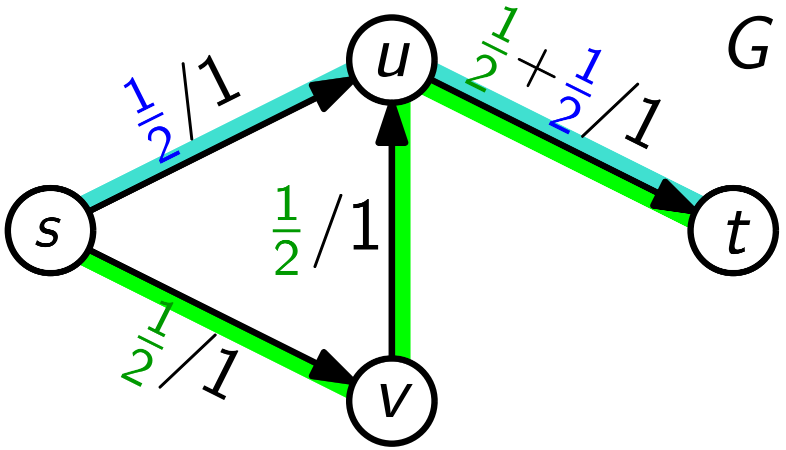
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

Ganzzahligkeitssatz



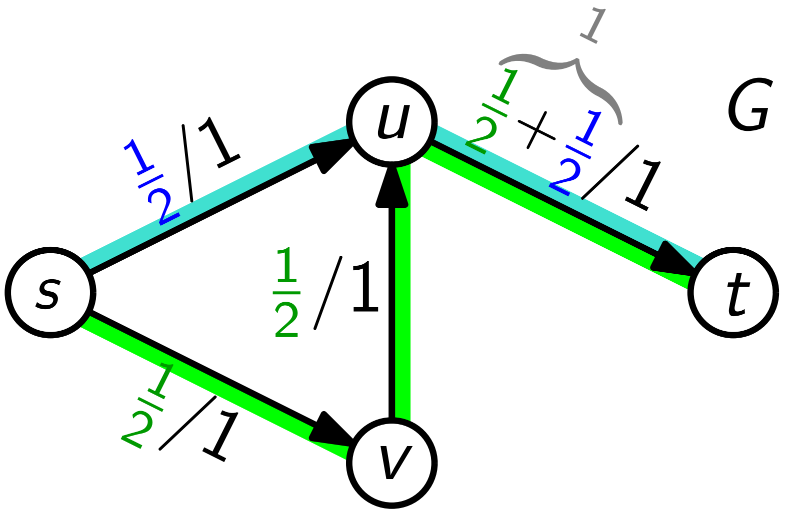
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

Ganzzahligkeitssatz



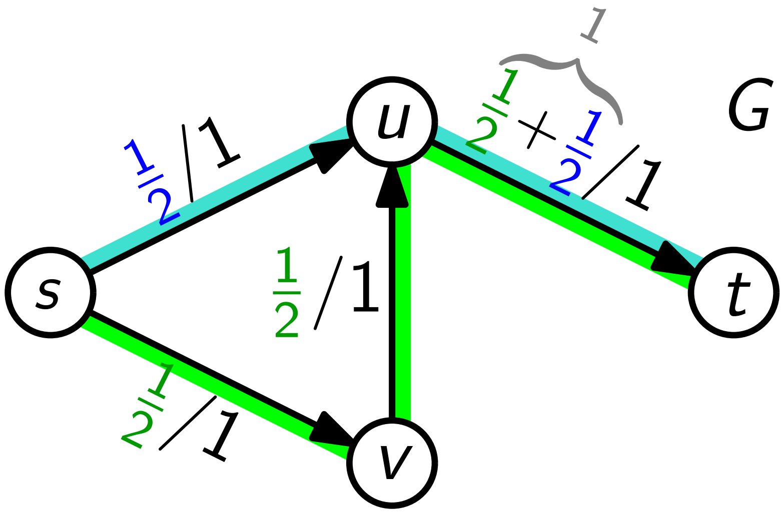
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

Ganzzahligkeitssatz



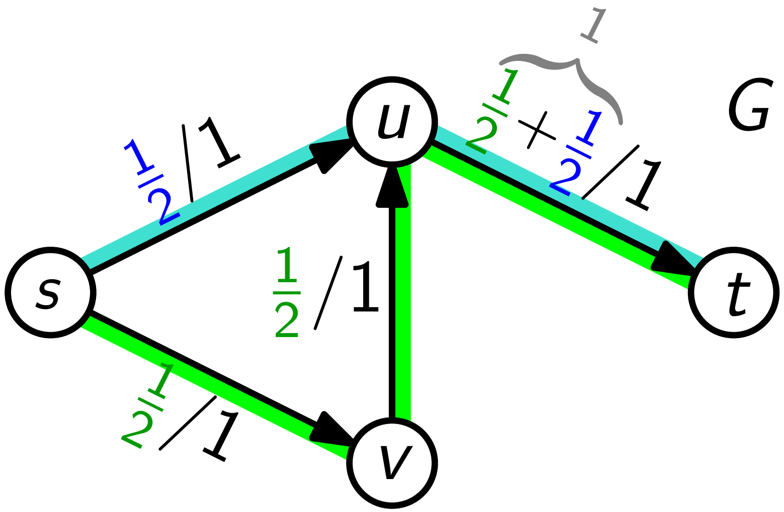
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

Ganzzahligkeitssatz



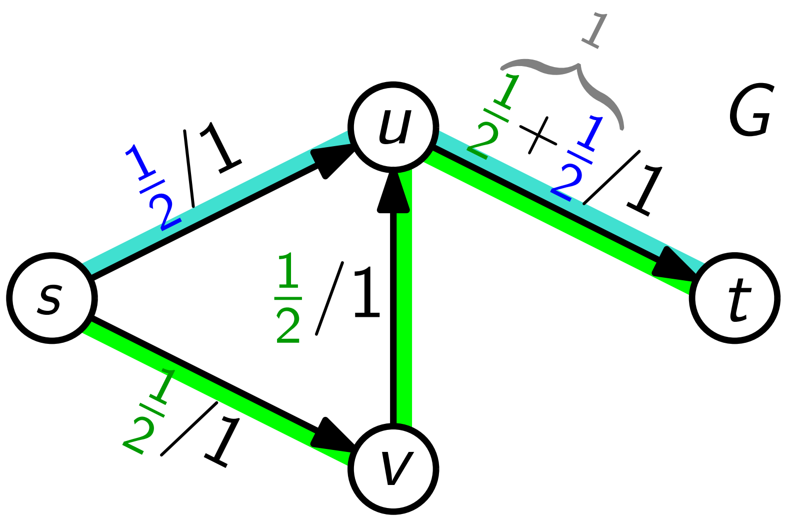
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

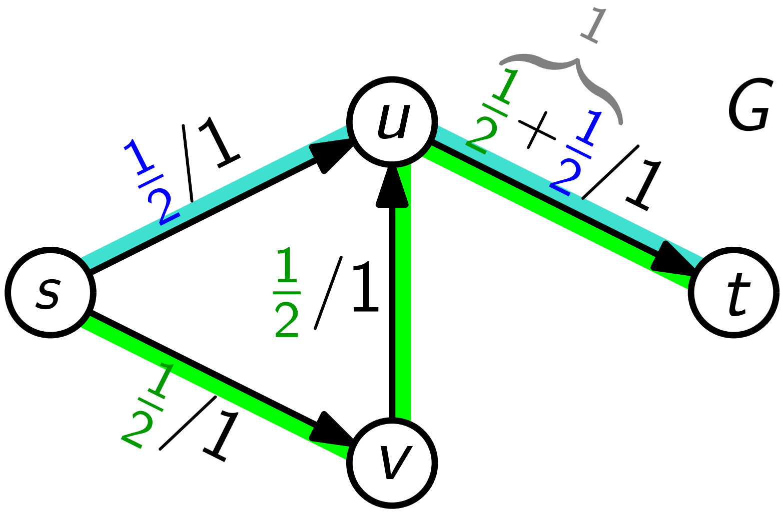
Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.

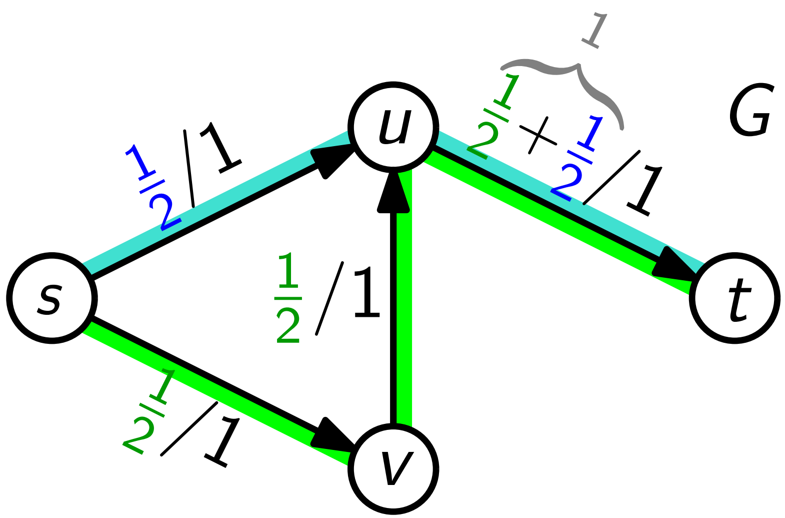
Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Ganzzahligkeitssatz

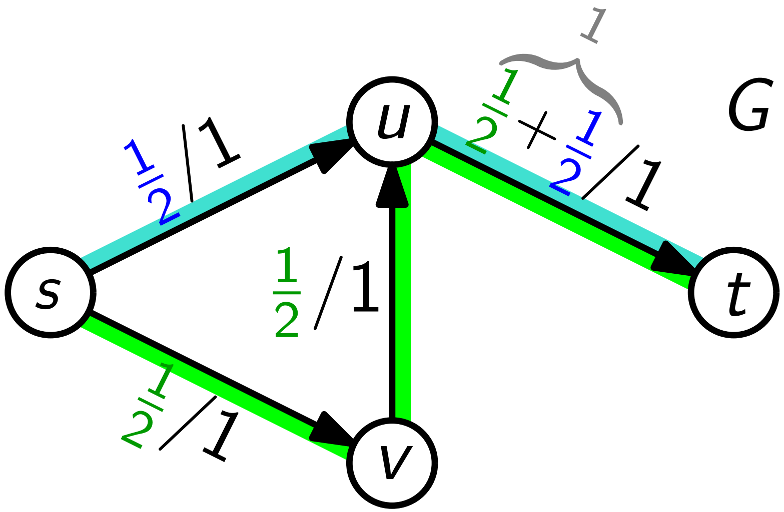


Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Korollar. Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c\colon E(G) \to \mathbb{N}$,

Ganzzahligkeitssatz

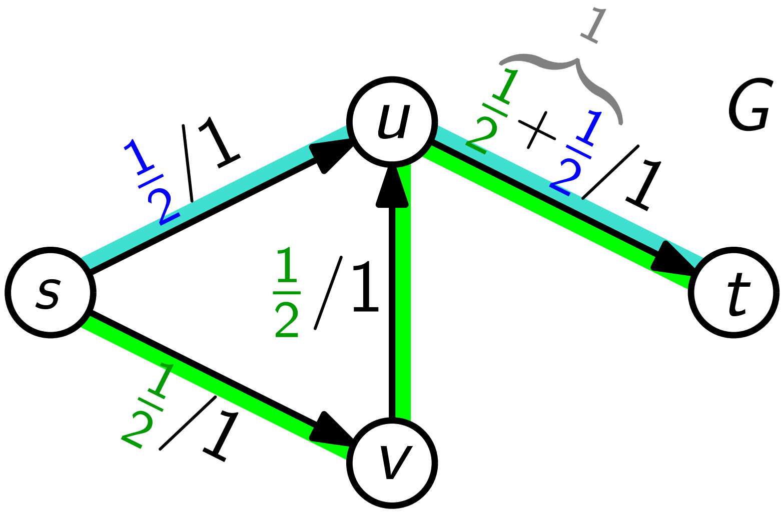


Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Korollar. Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c\colon E(G) \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Ganzzahligkeitssatz



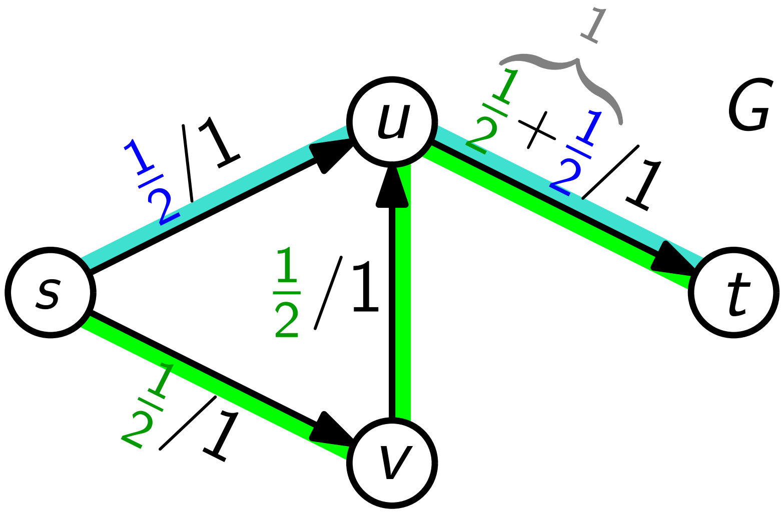
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Korollar. Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c\colon E(G) \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Beweis. **?**

Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Korollar. Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c\colon E(G) \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Beweis. Wende FordFulkerson oder EdmondsKarp an! $\square$

Kantendisjunkte Wege

Satz. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

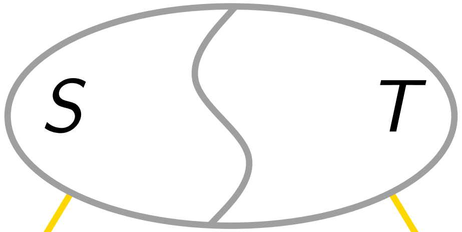
Kantendisjunkte Wege

Satz. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.
Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege

Kantendisjunkte Wege

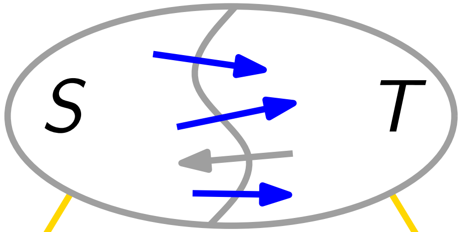
Satz. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Kantendisjunkte Wege



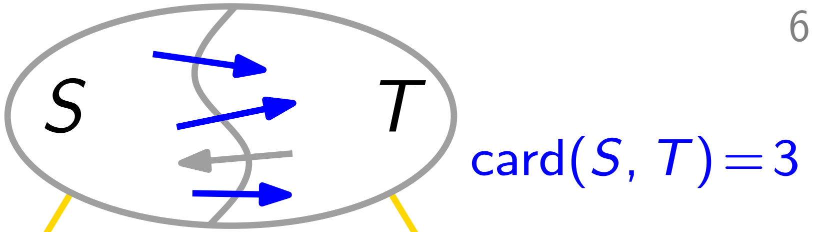
Satz. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Kantendisjunkte Wege



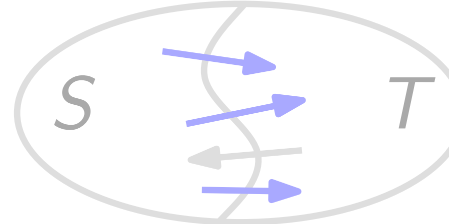
Satz. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Kantendisjunkte Wege



Satz. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Kantendisjunkte Wege



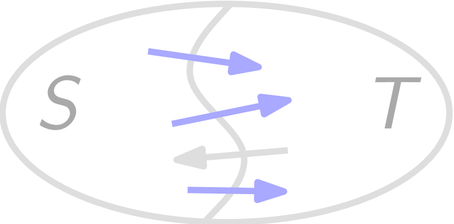
card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege



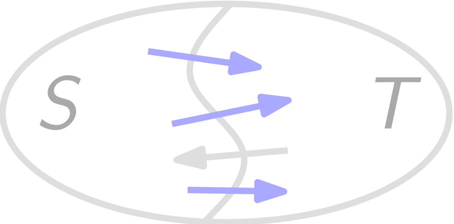
card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss.

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege



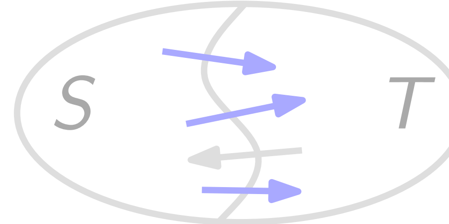
card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

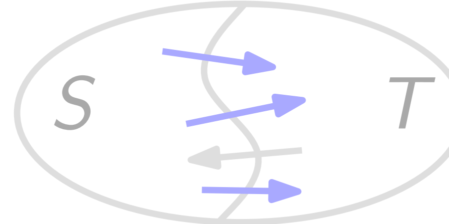


Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege



card$(S, T) = 3$

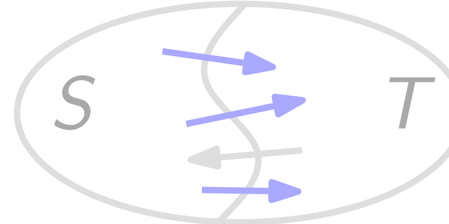
Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f \colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege



card$(S, T) = 3$

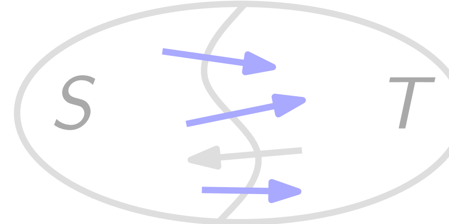
Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f \colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege



card$(S, T) = 3$

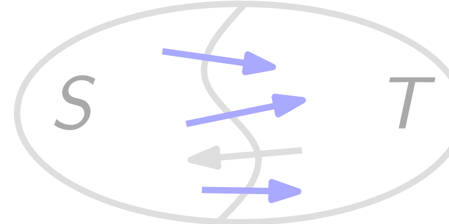
Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

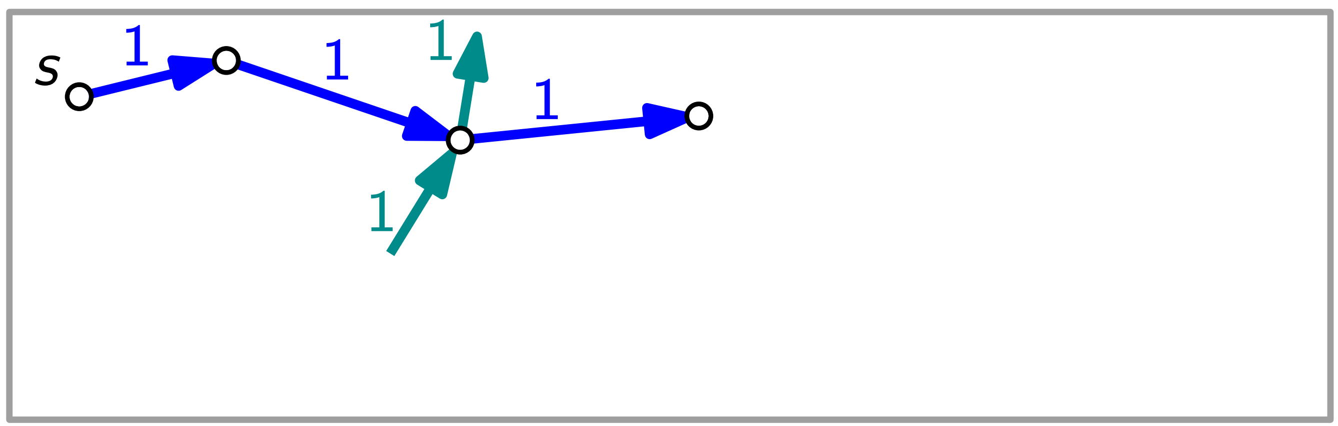


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

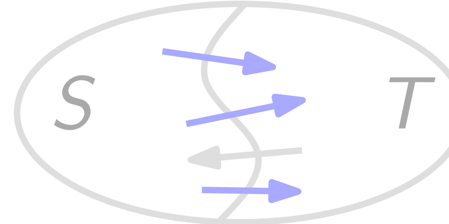
Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

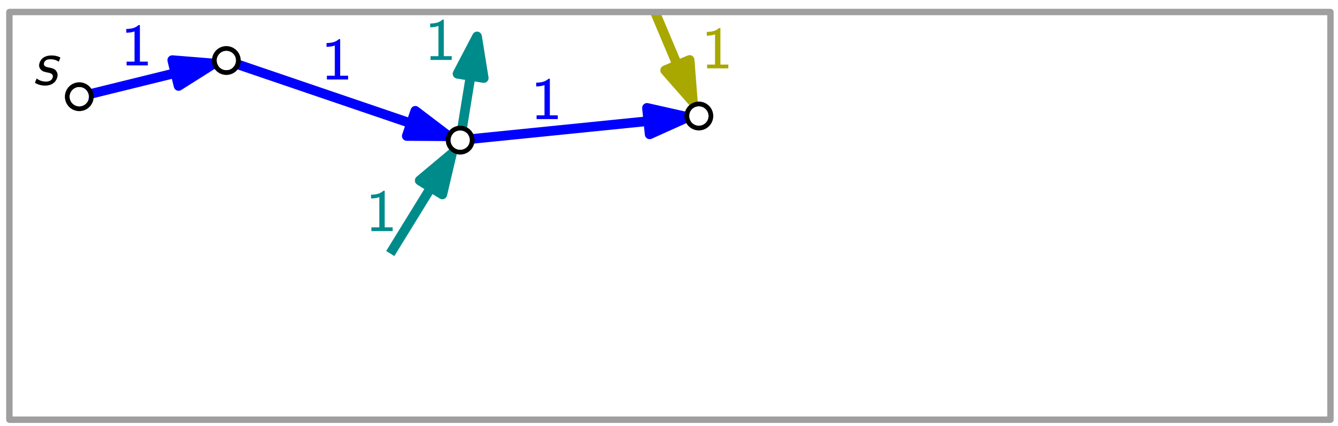


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

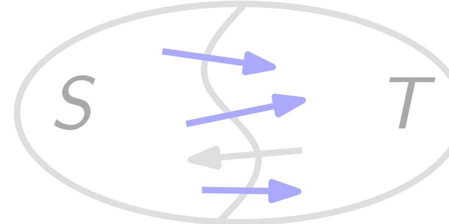
Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

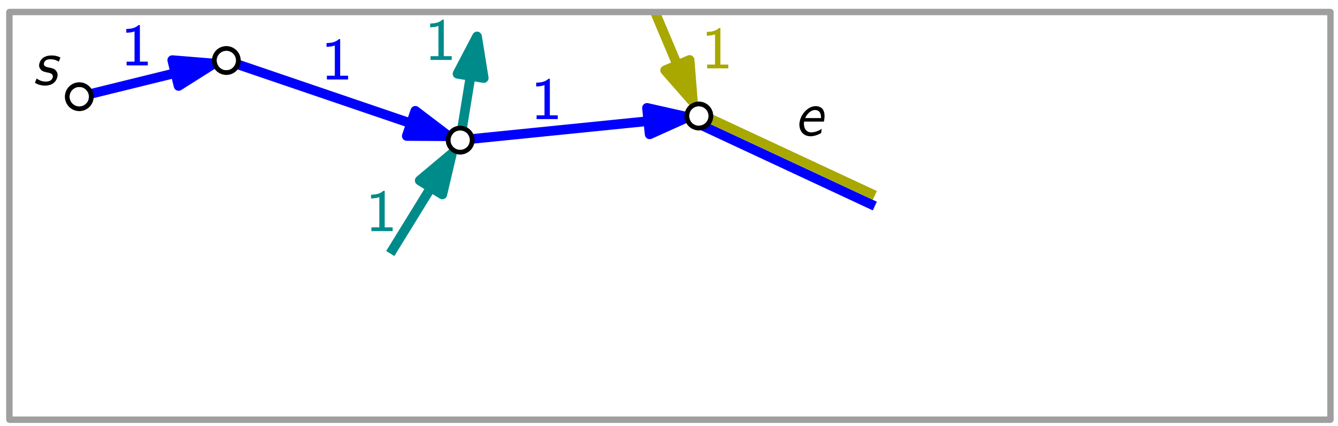


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f \colon E(G) \to \{0, 1\}$.

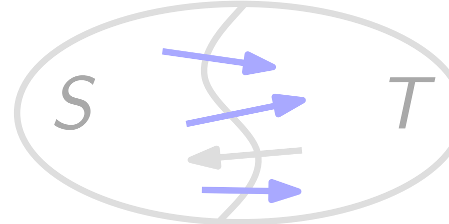
Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

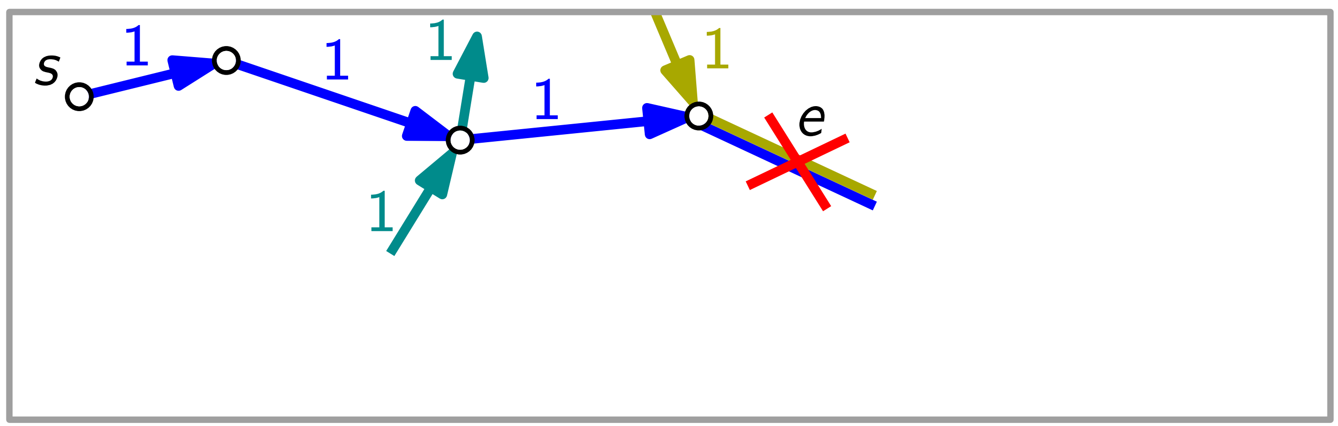


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

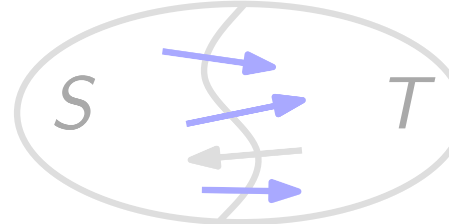
Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege



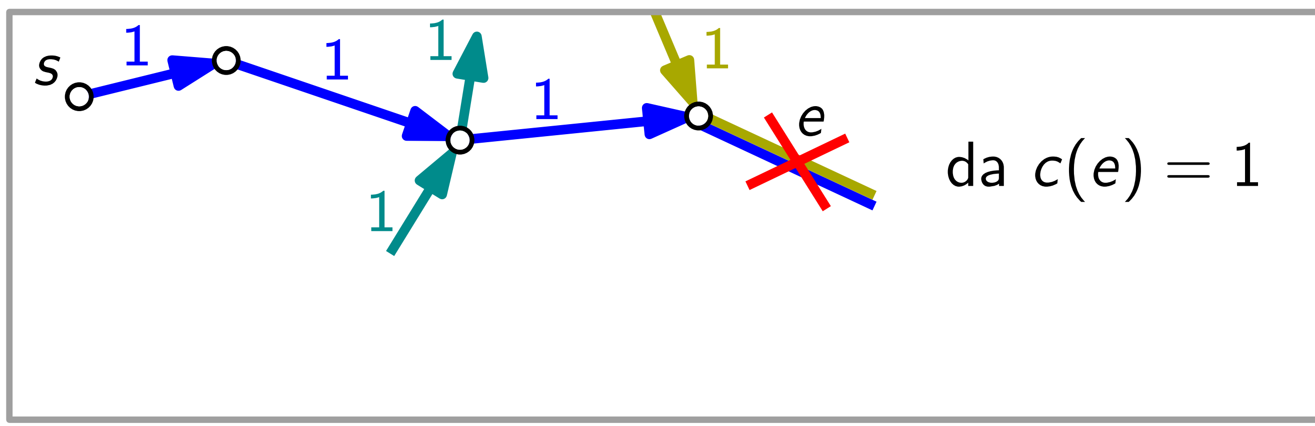
card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

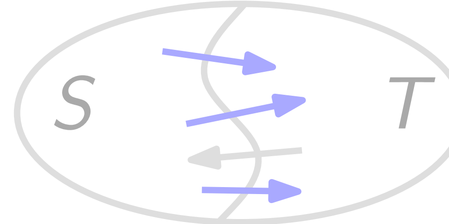
Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f \colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985



Kantendisjunkte Wege

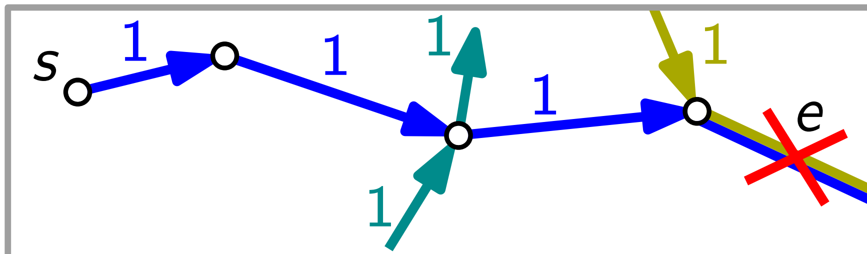


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

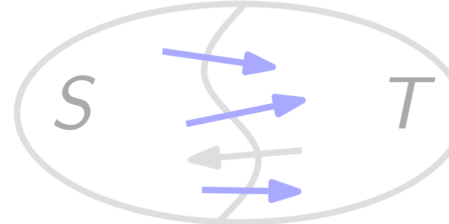
Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



da $c(e) = 1$
und
Flusserhaltung

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

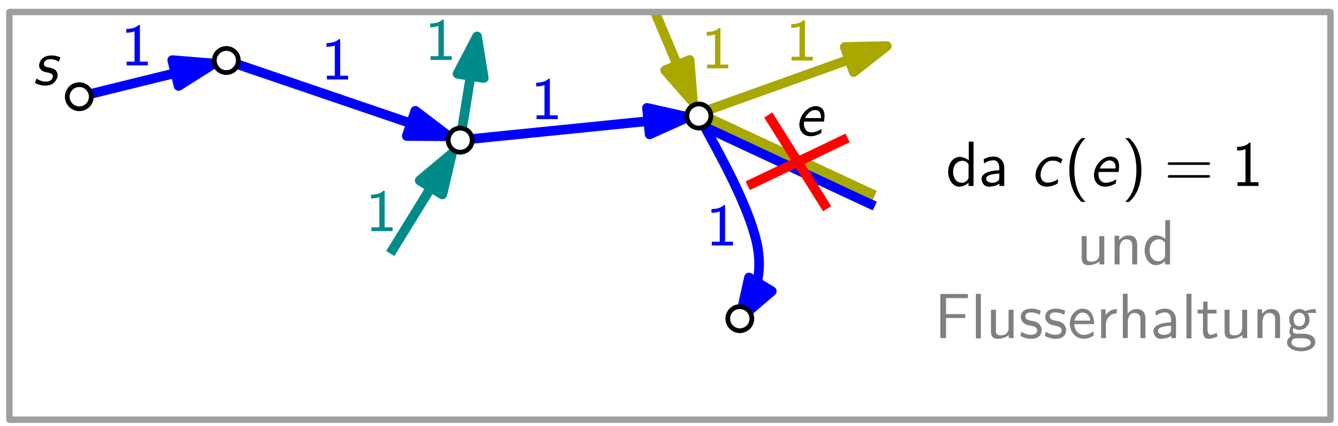


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

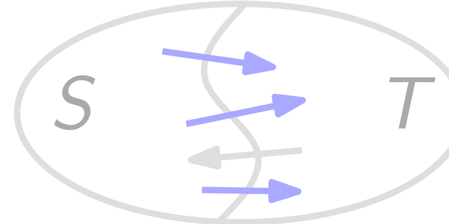
Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

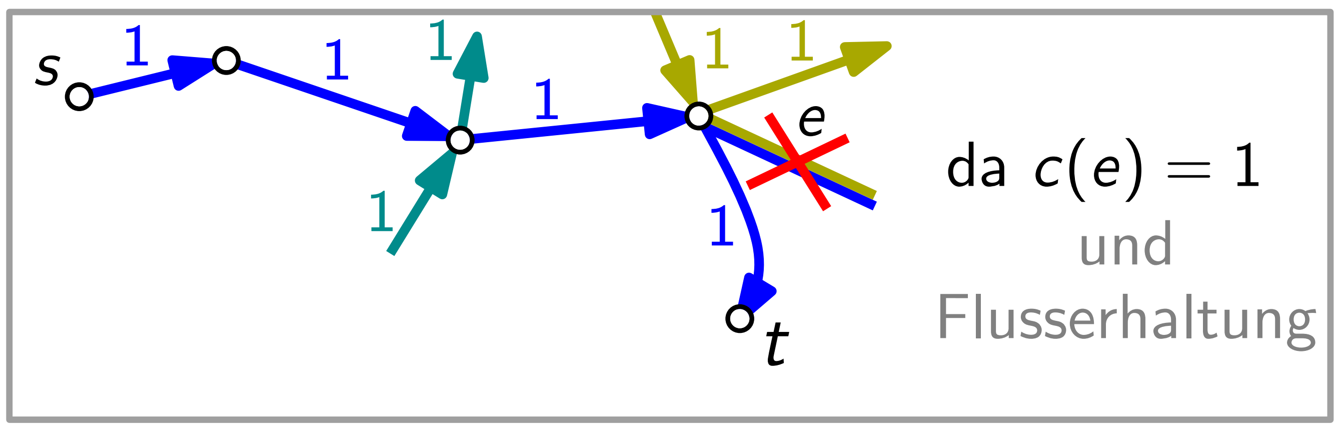


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

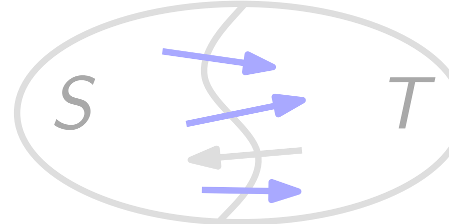
Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

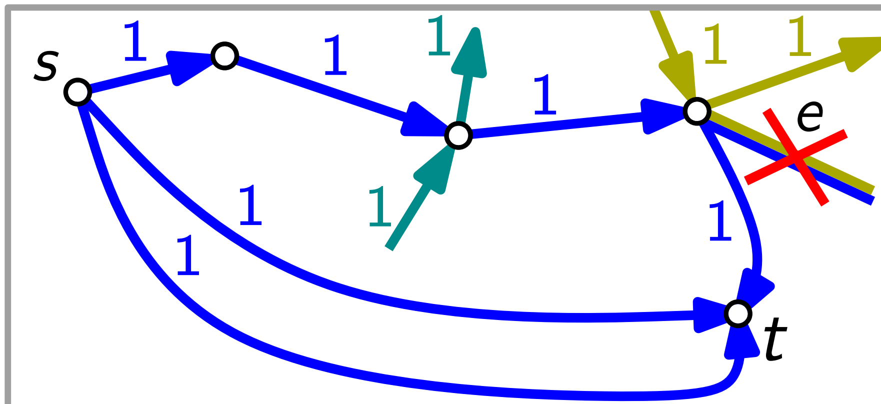


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

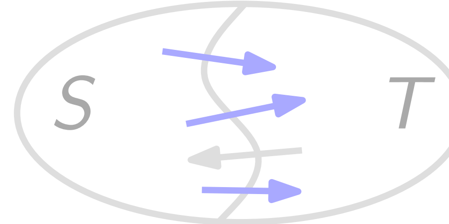
Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



da $c(e) = 1$
und
Flusserhaltung

Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

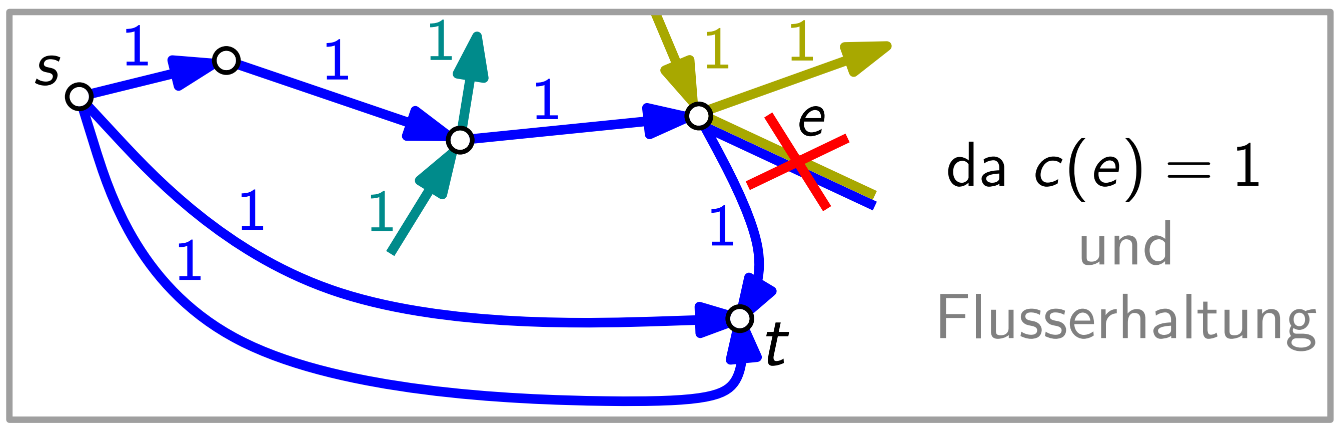


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

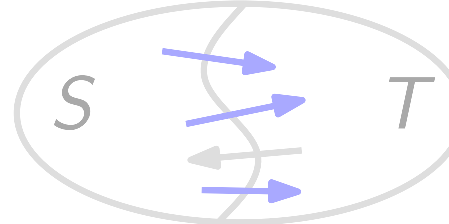
Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege


Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege



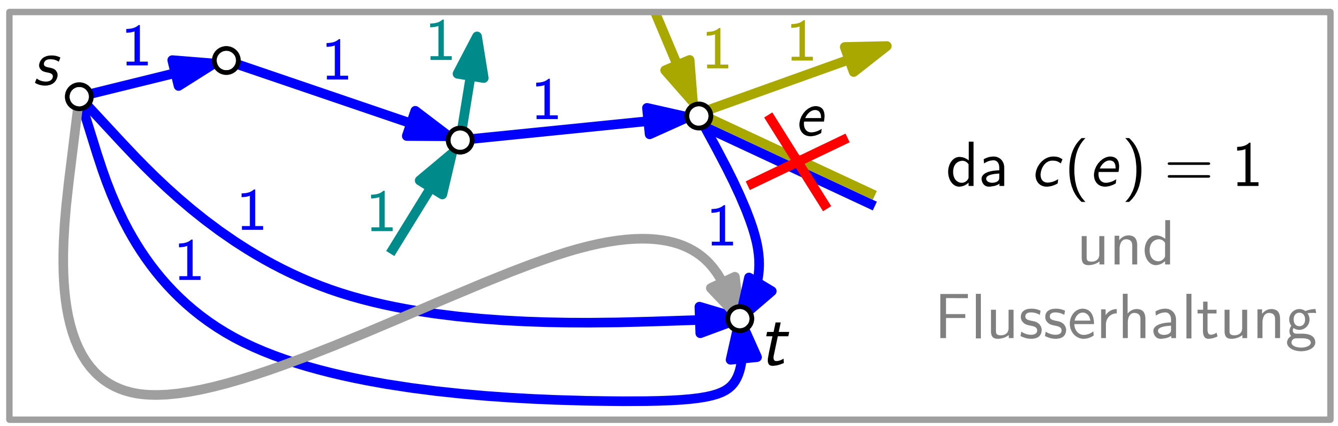
card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

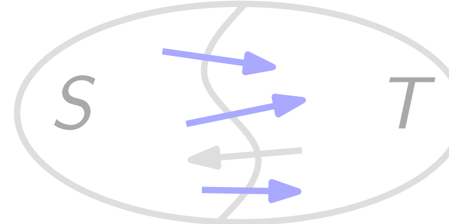
Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:


Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985



$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege $\geq |f|$

Kantendisjunkte Wege

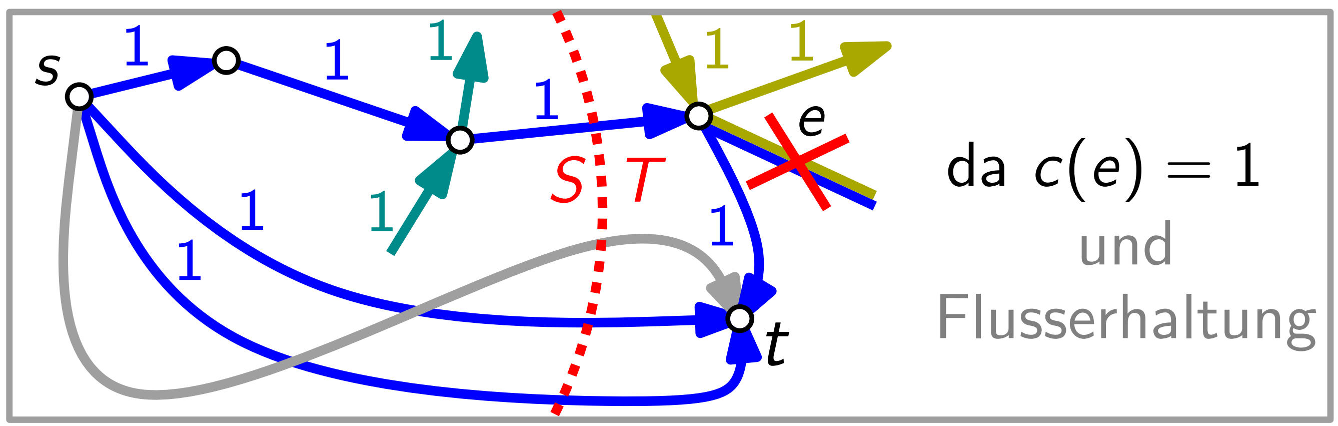


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



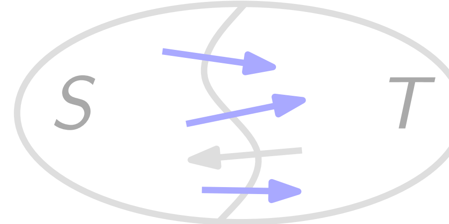
$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s-t-Schnitt.

Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

Kantendisjunkte Wege

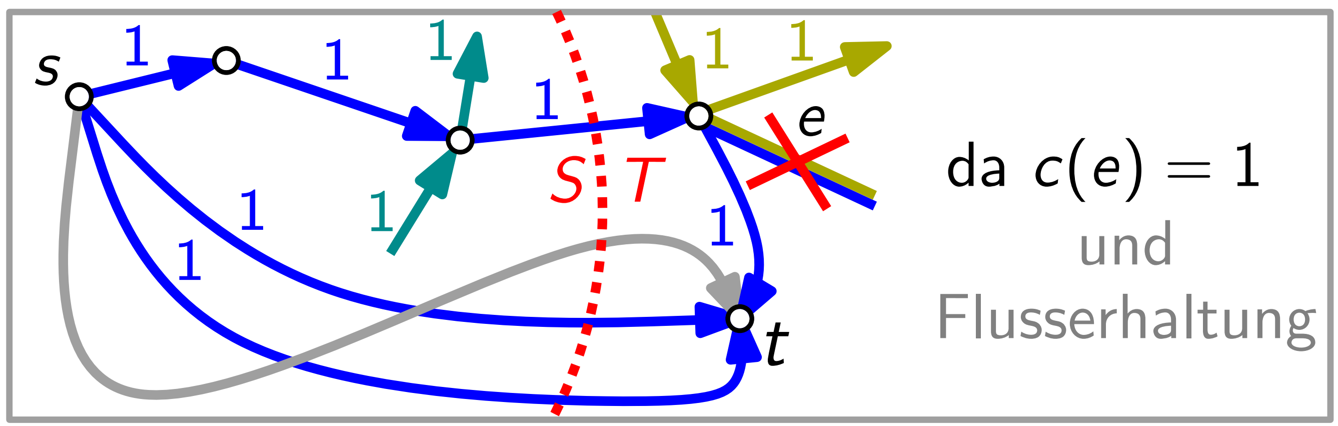


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



da $c(e) = 1$
und
Flusserhaltung

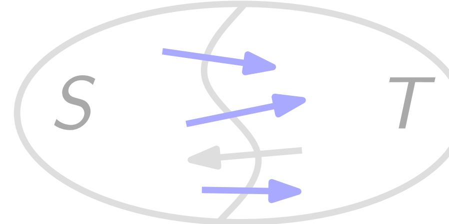
Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s-t-Schnitt.

$\Rightarrow$ jeder s-t-Weg trägt ≥ 1 Kante zu Raus(S) bei.

Kantendisjunkte Wege

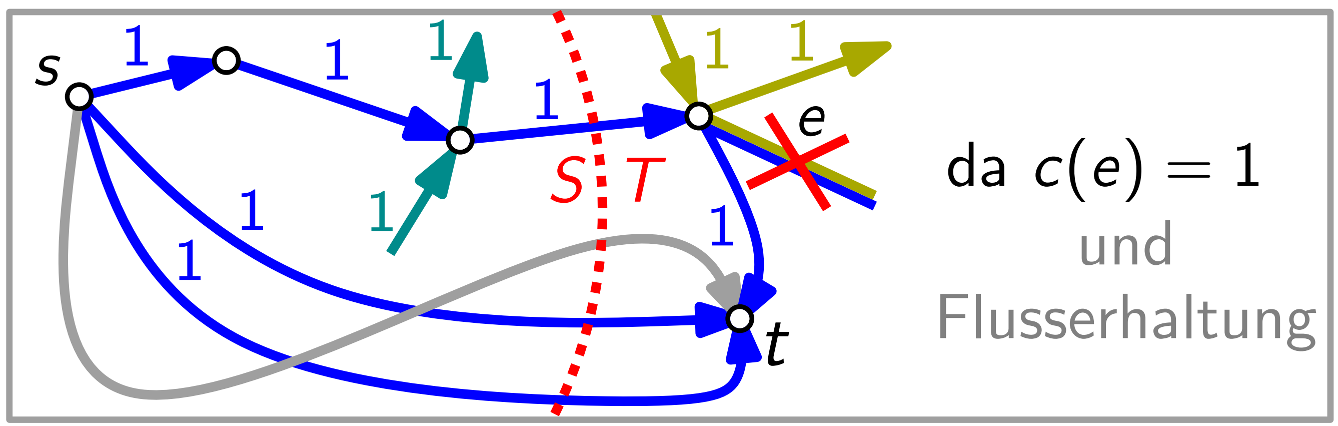


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

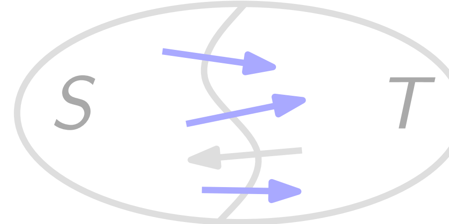
$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s-t-Schnitt.

$\Rightarrow$ jeder s-t-Weg trägt ≥ 1 Kante zu Raus(S) bei.

$\Rightarrow$ card$(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A$

Kantendisjunkte Wege

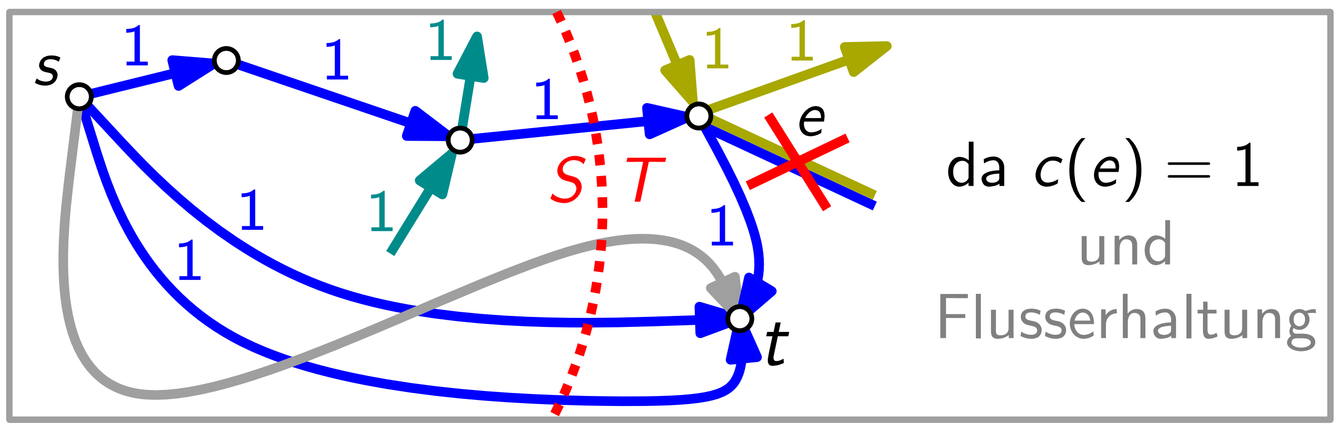


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f \colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

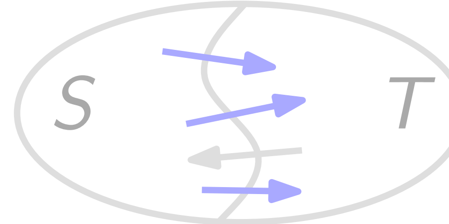
$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s-t-Schnitt.

$\Rightarrow$ jeder s-t-Weg trägt ≥ 1 Kante zu Raus(S) bei.

$\Rightarrow$ card$(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A$

Kantendisjunkte Wege

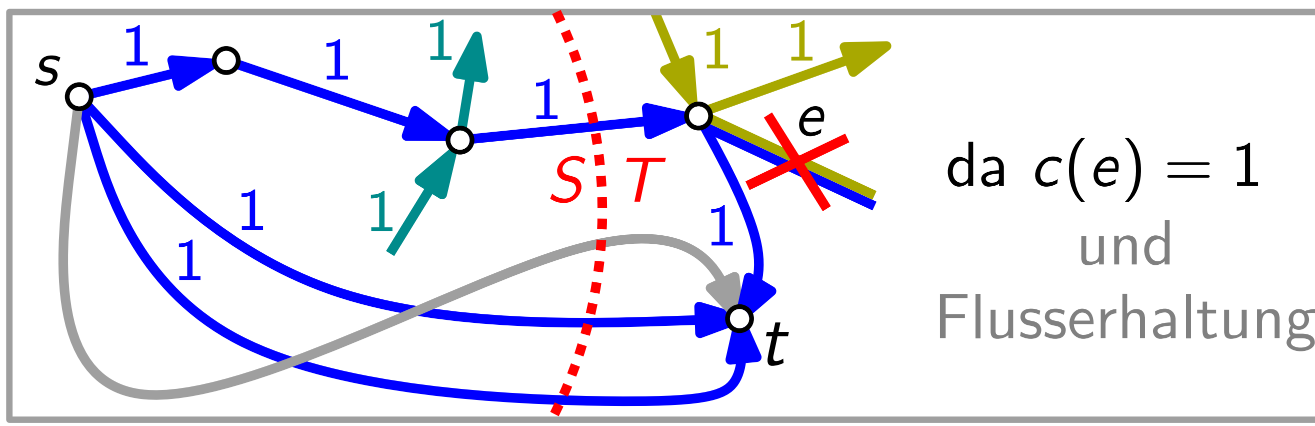


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E(G) \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s-t-Schnitt.

$\Rightarrow$ jeder s-t-Weg trägt ≥ 1 Kante zu Raus(S) bei.

$\Rightarrow$ card$(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Satz von Menger

Wir wissen nun $\mathrm{card}(S, T) = c(\mathrm{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Satz von Menger

Wir wissen nun $\mathrm{card}(S,T) = c(\mathrm{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Satz von Menger

Wir wissen nun $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = \underbrace{c(S)}_{\text{Kapazität eines min. Schnittes}} \geq A \geq \underbrace{|f|}_{\text{Wert eines max. Flusses}}$

Satz von Menger

Wir wissen nun $\mathrm{card}(S, T) = c(\mathrm{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines min. Schnittes

Wert eines max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz von Menger

Wir wissen nun $\mathrm{card}(S, T) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \boxed{c(S)} \geq A \geq \boxed{|f|}$

Kapazität eines min. Schnittes = Wert eines max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz von Menger

Wir wissen nun $\operatorname{card}(S, T) = c(\mathrm{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines min. Schnittes $=$ Wert eines max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow \operatorname{card}(S, T) = c(S) = A = |f|.$

Satz von Menger

Wir wissen nun $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines min. Schnittes $=$ Wert eines max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow$ $\text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|$.

$\Rightarrow$ Minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts
$=$ maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Wege $\square$

Satz von Menger

Wir wissen nun $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines min. Schnittes $=$ Wert eines max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow$ $\text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|$.

$\Rightarrow$ Minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts
$=$ maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Wege $\square$

Satz. Sei G gerichteter Graph, $s, t \in V(G)$, $st \notin E(G)$. Dann ist die max. Anzahl *knotendisjunkter s-t-Wege* gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt. [Menger, 1927]

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ von n Damen und

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ von n Damen und
eine Menge $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ von n Herren

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ von n Damen und
eine Menge $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ von n Herren
mit $D \cap H = \emptyset$,

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ von n Damen und
eine Menge $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ von n Herren
mit $D \cap H = \emptyset$,
sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ von n Damen und eine Menge $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ von n Herren mit $D \cap H = \emptyset$, sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit,

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ von n Damen und eine Menge $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ von n Herren

mit $D \cap H = \emptyset$,

sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit,

d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ von n Damen und eine Menge $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ von n Herren

mit $D \cap H = \emptyset$,

sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit,

d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \ldots, d_n\}}$ von n Damen und eine Menge $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ von n Herren

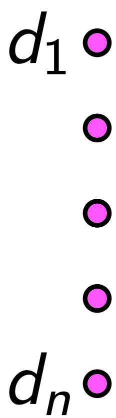
mit $D \cap H = \emptyset$,

sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit,

d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.

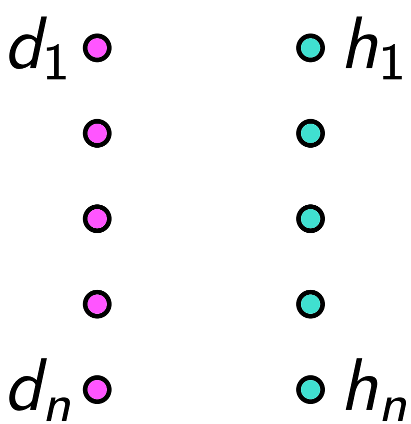


Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \dots, d_n\}}$ von n Damen und eine Menge $\boxed{H = \{h_1, \dots, h_n\}}$ von n Herren mit $D \cap H = \emptyset$, sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit, d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.



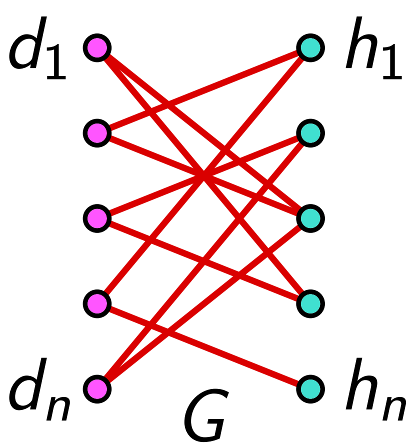
Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \dots, d_n\}}$ von n Damen und eine Menge $\boxed{H = \{h_1, \dots, h_n\}}$ von n Herren mit $D \cap H = \emptyset$, sowie ein $\boxed{\text{unger. Sympathiegraph } G = (D \cup H, E).}$

Gesucht: eine Massenhochzeit,

d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.

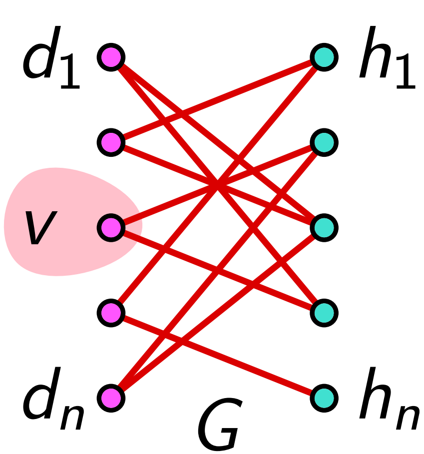


Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \dots, d_n\}}$ von n Damen und
eine Menge $\boxed{H = \{h_1, \dots, h_n\}}$ von n Herren
mit $D \cap H = \emptyset$,
sowie ein $\boxed{\text{unger. Sympathiegraph } G = (D \cup H, E).}$

Gesucht: eine Massenhochzeit,
d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist

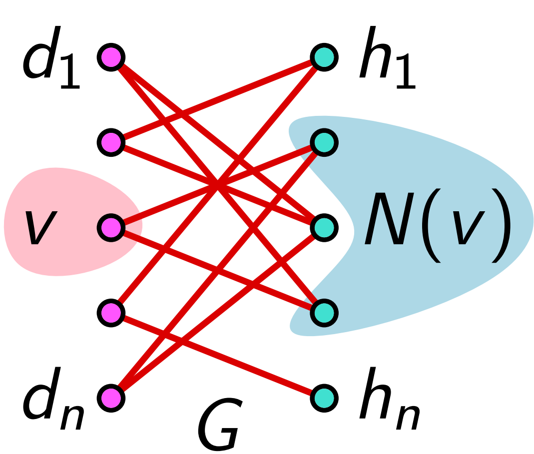
Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \dots, d_n\}}$ von n Damen und eine Menge $\boxed{H = \{h_1, \dots, h_n\}}$ von n Herren mit $D \cap H = \emptyset$, sowie ein $\boxed{\text{unger. Sympathiegraph } G = (D \cup H, E).}$

Gesucht: eine Massenhochzeit,

d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.



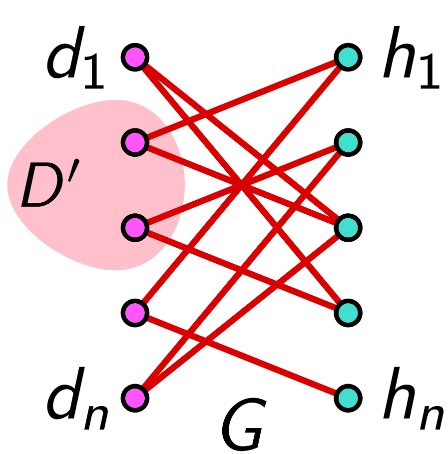
Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[u]$

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \dots, d_n\}}$ von n Damen und
eine Menge $\boxed{H = \{h_1, \dots, h_n\}}$ von n Herren
mit $D \cap H = \emptyset$,
sowie ein $\boxed{\text{unger. Sympathiegraph } G = (D \cup H, E).}$

Gesucht: eine Massenhochzeit,
d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[u]$

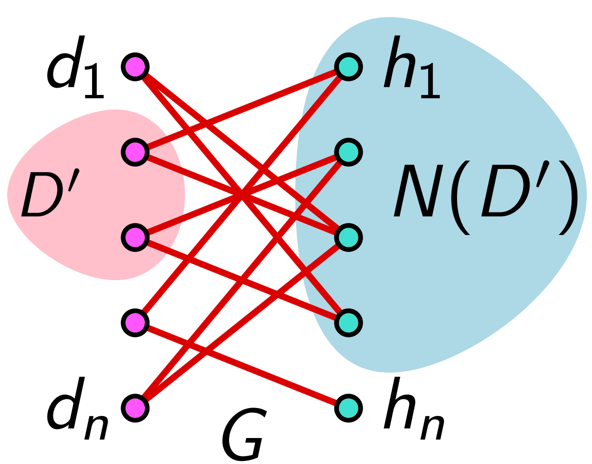
Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \dots, d_n\}}$ von n Damen und
eine Menge $\boxed{H = \{h_1, \dots, h_n\}}$ von n Herren
mit $D \cap H = \emptyset$,
sowie ein $\boxed{\text{unger. Sympathiegraph } G = (D \cup H, E).}$

Gesucht: eine Massenhochzeit,
d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.



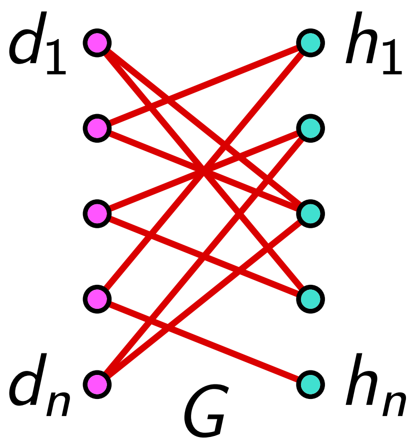
Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[u]$

Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist
$N(D') := \bigcup_{v' \in D'} N(v')$

Der Heiratssatz

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[v]$

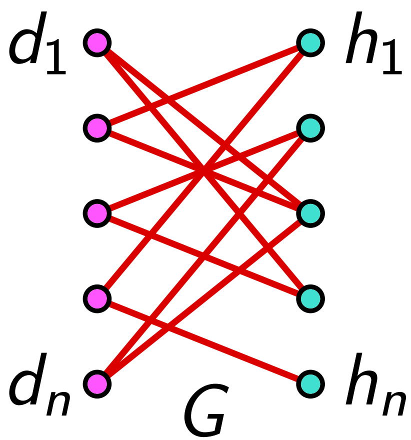
Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist
$N(D') := \bigcup_{v' \in D'} N(v')$

Der Heiratssatz

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten:

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[v]$

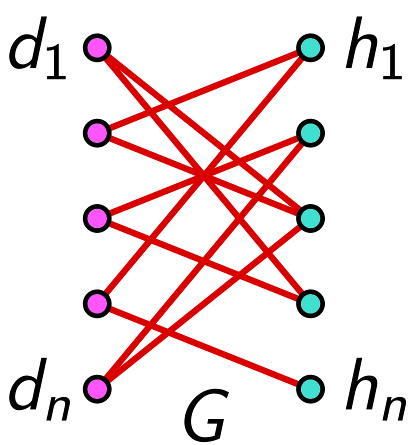
Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist
$N(D') := \bigcup_{v' \in D'} N(v')$

Der Heiratssatz

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[v]$

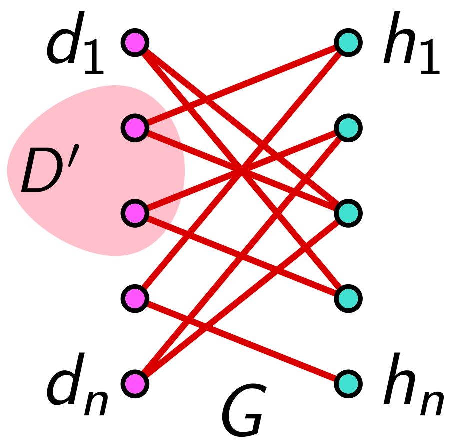
Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist
$N(D') := \bigcup_{v' \in D'} N(v')$

Der Heiratssatz

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[v]$

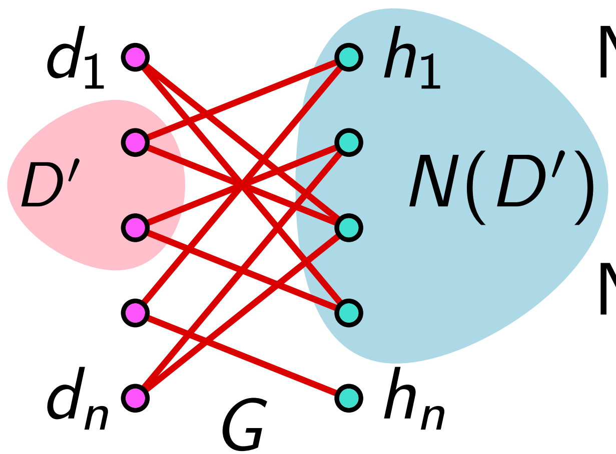
Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist
$N(D') := \bigcup_{v' \in D'} N(v')$

Der Heiratssatz

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot{\cup} H, E)$!

Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in D$ ist
$N(v) := \mathrm{Adj}[v]$

Nachbarschaft von $D' \subseteq D$ ist
$N(D') := \bigcup_{v' \in D'} N(v')$

Der Heiratssatz

[Hall 1935]

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

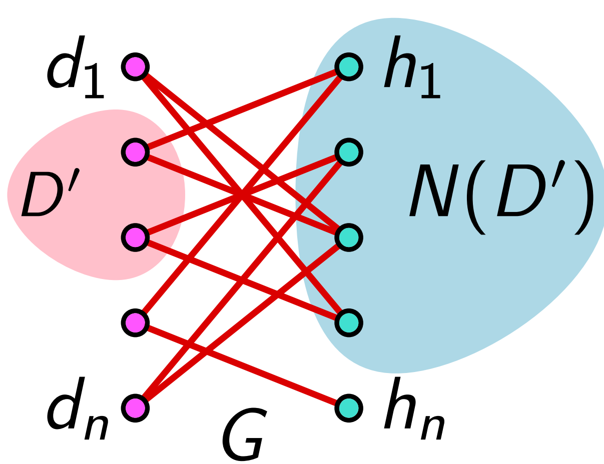
Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Satz.

Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge

Modell.



Der Heiratssatz [Hall 1935]

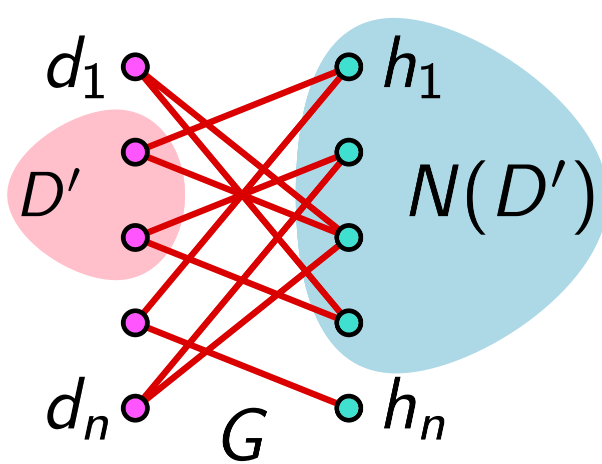
Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Satz. Dies ist auch hinreichend.

Philip Hall
1904 London – 1982 Cambridge

Modell.



Der Heiratssatz

[Hall 1935]

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

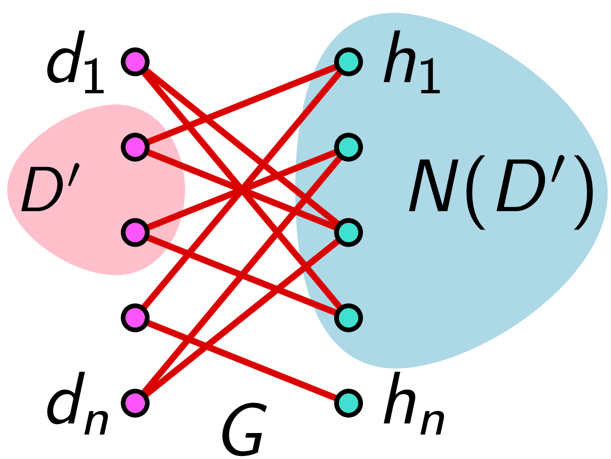
Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Satz. Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

G hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Modell.



Philip Hall
1904 London – 1982 Cambridge

Der Heiratssatz

[Hall 1935]

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

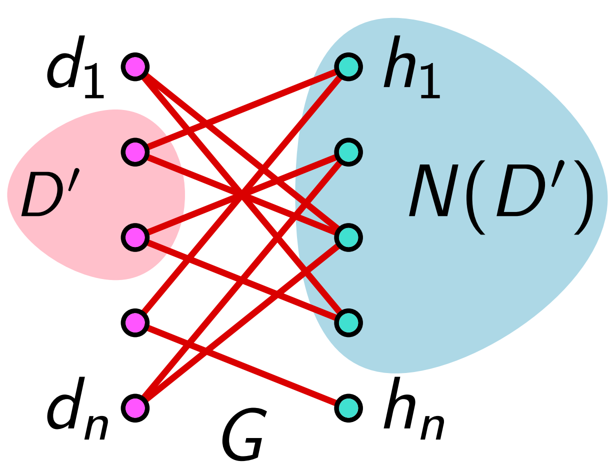
Satz. Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

G hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$
für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

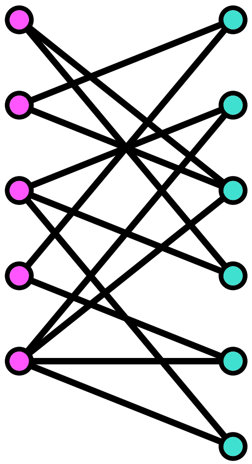
Beweis später!

Modell.



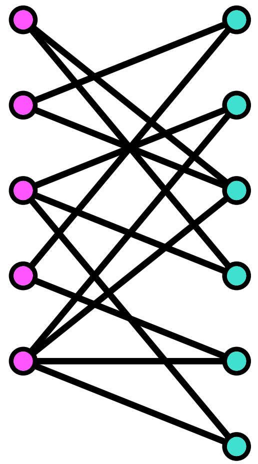
Philip Hall
1904 London – 1982 Cambridge

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



G

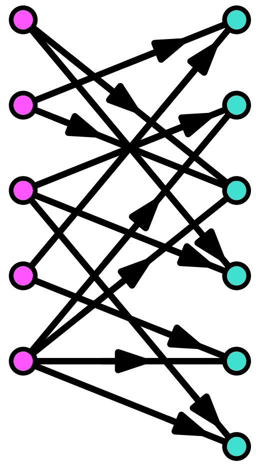
Größte Paarungen in bipartiten Graphen



G

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

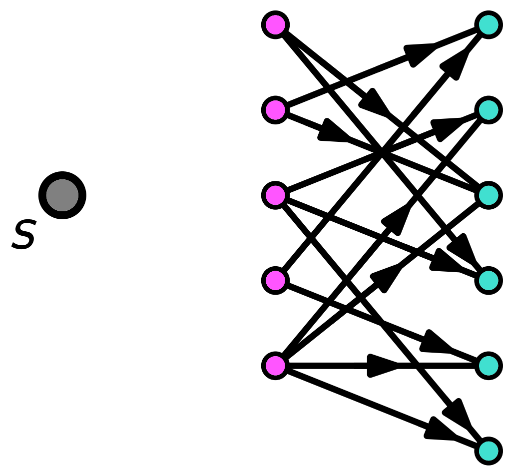
Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \rightarrow G'$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

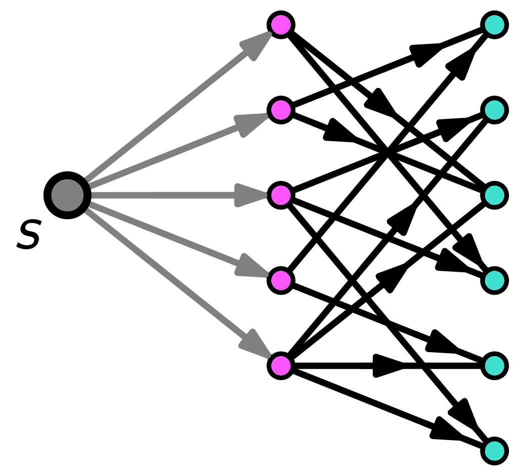
Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \rightarrow G'$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

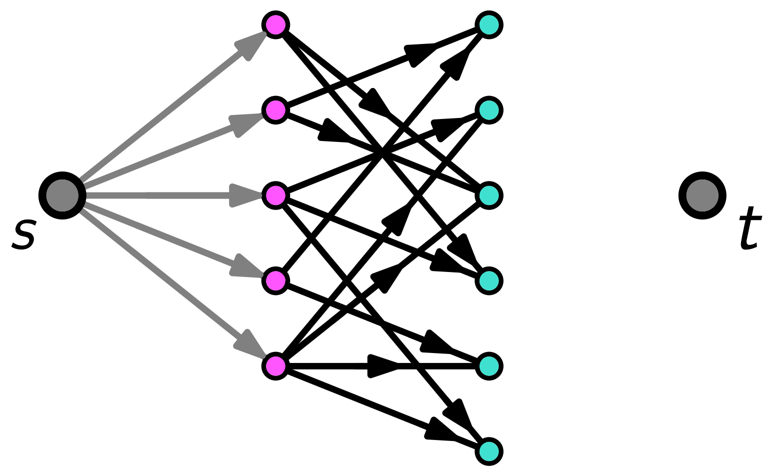
Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \rightarrow G'$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

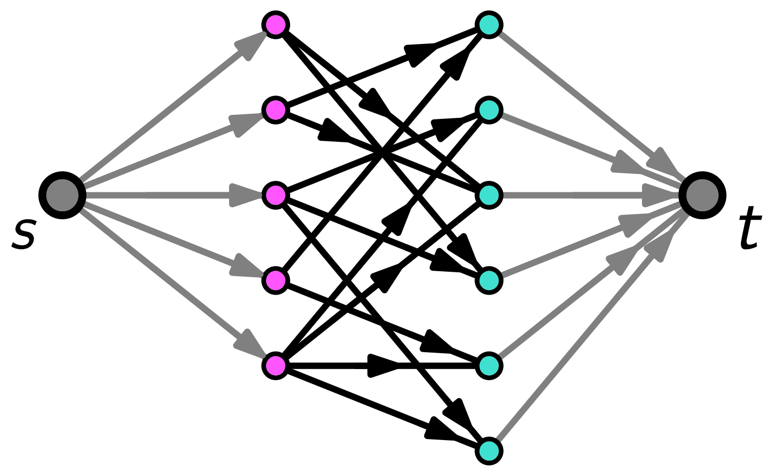
Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \rightarrow G'$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

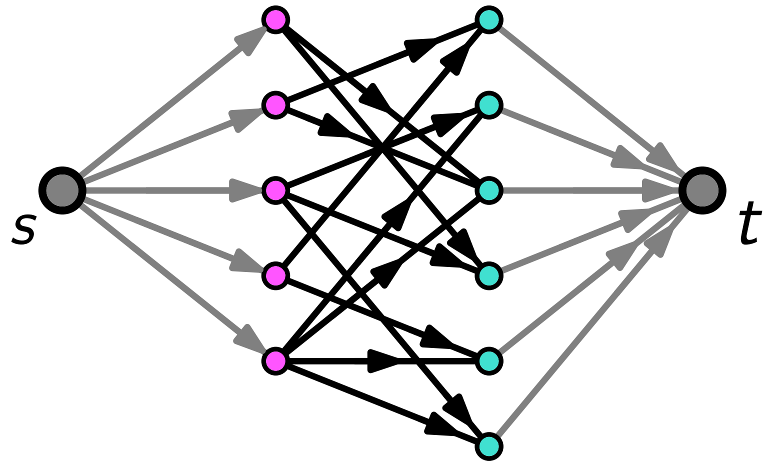
Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \;\rightarrow\; G'$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

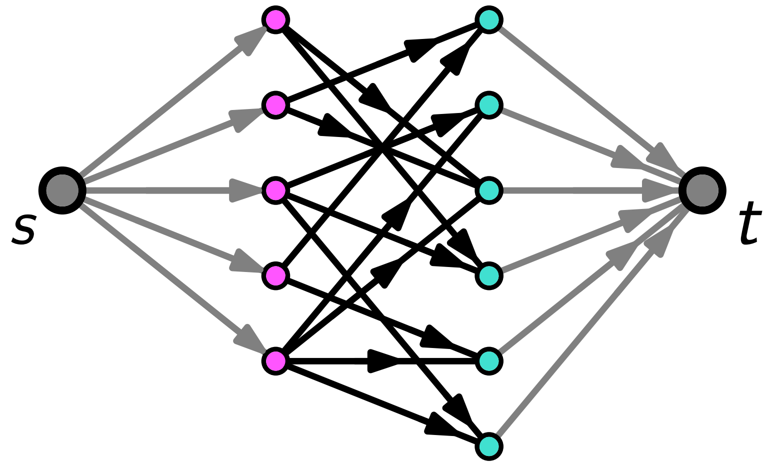
Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \to G', \quad c\colon E(G') \to \{1\}$$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Größte Paarungen in bipartiten Graphen

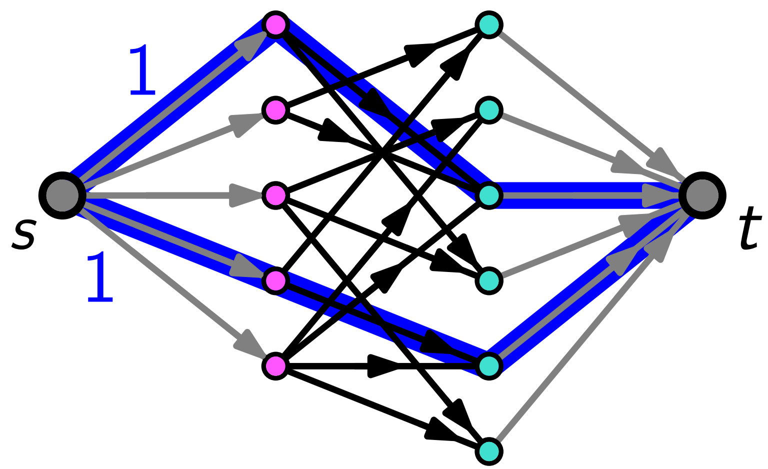


$G \;\to\; G', \quad c\colon E(G') \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Beob. Ganzzahl. s-t-Fluss in G'

Größte Paarungen in bipartiten Graphen

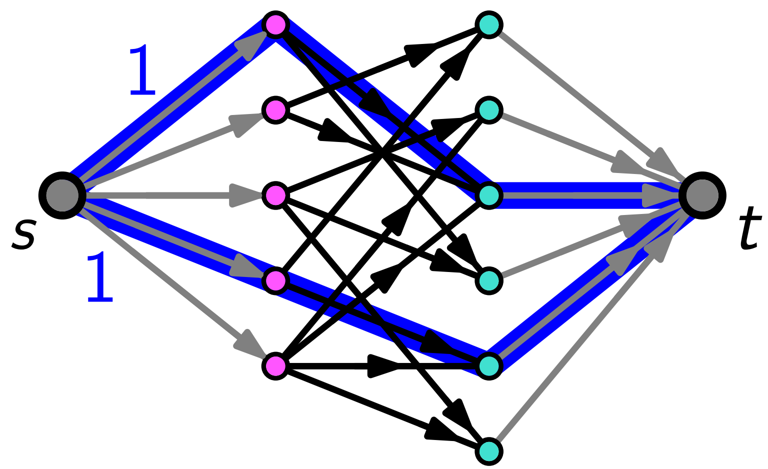


$G \;\to\; G',\quad c\colon E(G') \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Beob. Ganzzahl. s-t-Fluss in G'

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \;\to\; G', \quad c\colon E(G') \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

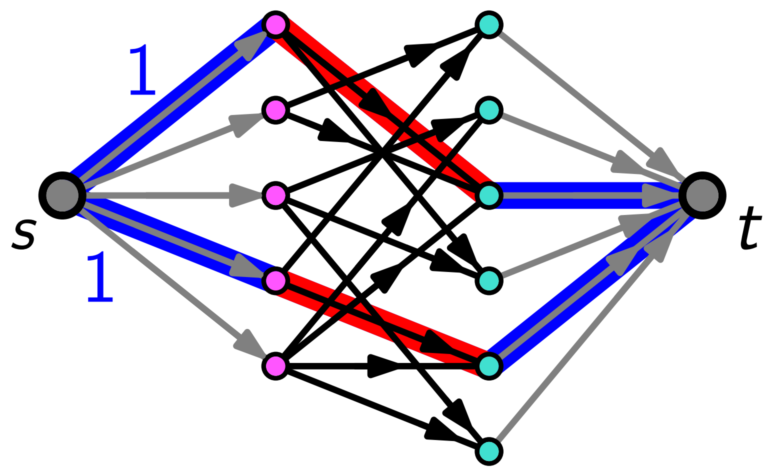
Beob.

Ganzzahl. s-t-Fluss in G'

$\updownarrow$

Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G'

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \;\to\; G', \quad c\colon E(G') \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

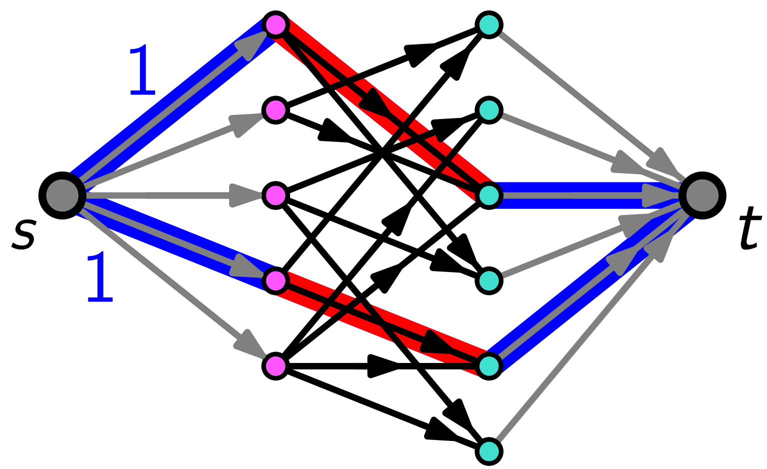
Beob.

Ganzzahl. s-t-Fluss in G'

$\updownarrow$

Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G' $\leftrightarrow$ Menge *unabhängiger* Kanten in G

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



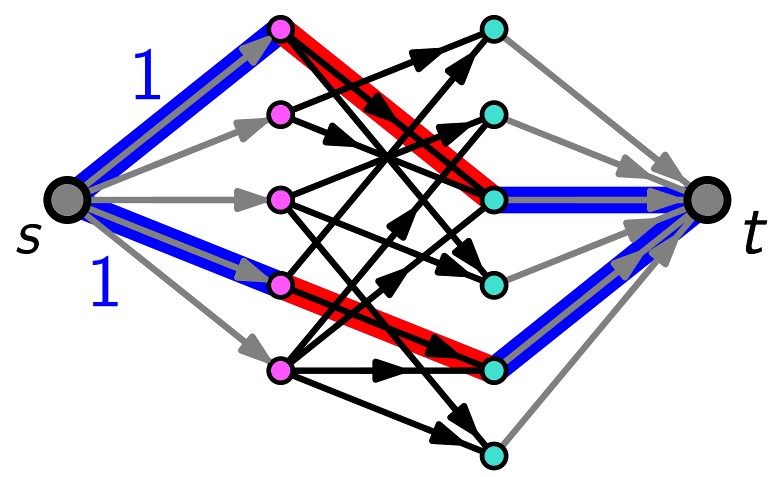
$G \;\to\; G', \quad c\colon E(G') \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Beob.

Ganzzahl. s-t-Fluss in G' ↕ Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G' ↔ Menge *unabhängiger* Kanten in G ↕ Paarung in G

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \;\to\; G', \quad c\colon E(G') \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

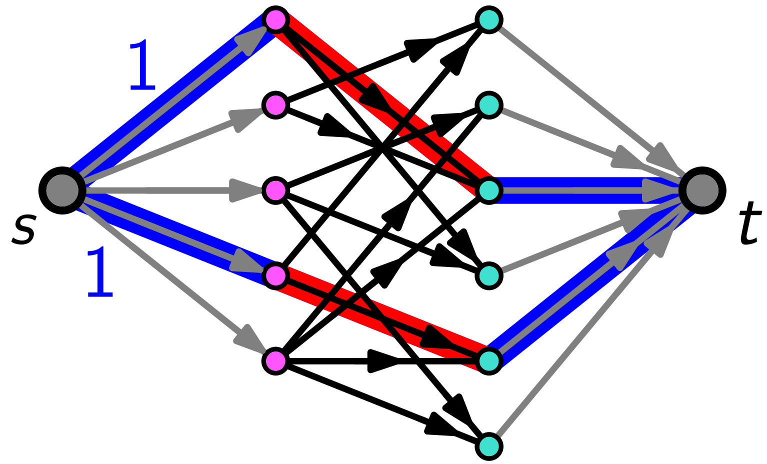
Beob.

Ganzzahl. s-t-Fluss in G' $\xleftrightarrow{\text{1-zu-1}}$ Paarung in G

$\updownarrow$ $\updownarrow$

Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G' $\leftrightarrow$ Menge *unabhängiger* Kanten in G

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \;\to\; G', \qquad c\colon E(G') \to \{1\}$$

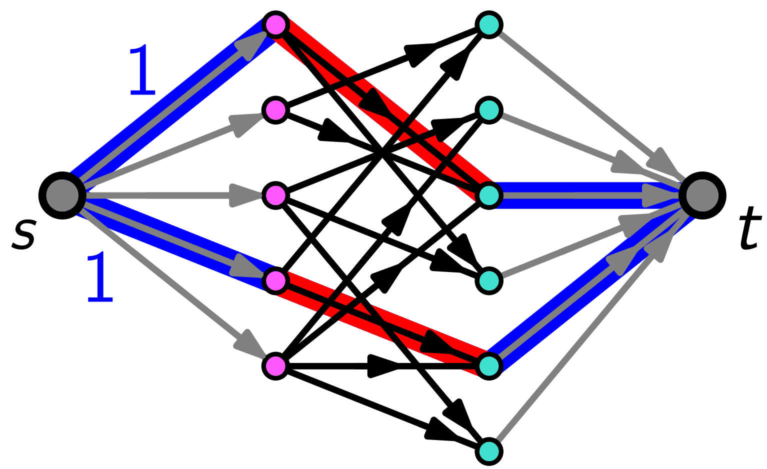
Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Beob.

Ganzzahl. s-t-Fluss in G' $\xleftrightarrow{\text{1-zu-1}}$ Paarung in G

Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G' $\leftrightarrow$ Menge *unabhängiger* Kanten in G

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \;\to\; G', \quad c\colon E(G') \to \{1\}$

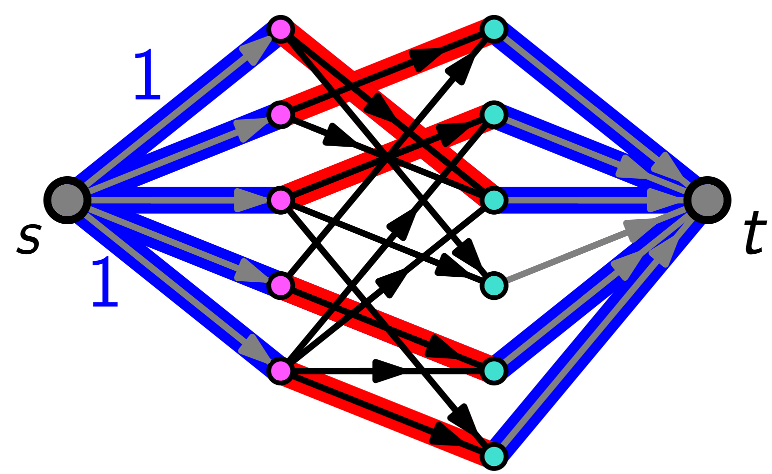
Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Beob.

größter Ganzzahl. s-t-Fluss in G' ⟷ (1-zu-1) *größte* Paarung in G

größte Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G' ⟷ *größte* Menge *unabhängiger* Kanten in G

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \to G'$, $\quad c\colon E(G') \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Beob.

größter Ganzzahl. s-t-Fluss in G' $\longleftrightarrow$ (1-zu-1) *größte* Paarung in G

größte Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G' $\longleftrightarrow$ *größte* Menge *unabhängiger* Kanten in G

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen

reduziert

auf das Problem maximale Flüsse in gerichteten Graphen.

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen

reduziert

auf das Problem maximale Flüsse in gerichteten Graphen.

sehr speziellen

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen

reduziert

auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$.

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen in Linearzeit *reduziert* auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$.

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen in Linearzeit *reduziert* auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{in gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten.

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen
in Linearzeit *reduziert*
auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen
in Linearzeit *reduziert*
auf das Problem maximale Flüsse in gerichteten Graphen.

sehr speziellen   mit Kap. $\equiv 1$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

Beweis.

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen
in Linearzeit *reduziert*
auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

Beweis. – Konstruktion von G':

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen
in Linearzeit *reduziert*
auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

Laufzeit

Beweis. – Konstruktion von G':

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen in Linearzeit *reduziert* auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

Beweis. – Konstruktion von G': *Laufzeit* $O(n + m)$

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen in Linearzeit *reduziert* auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap. } \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

		Laufzeit
Beweis.	– Konstruktion von G':	$O(n + m)$
	– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G':	

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen

in Linearzeit *reduziert*

auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap. } \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

Laufzeit

Beweis.
- Konstruktion von G': $O(n+m)$
- Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G': $O(n' \cdot (m')^2)$

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen in Linearzeit *reduziert* auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$.

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

Beweis.

	Laufzeit
– Konstruktion von G':	$O(n+m)$
– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G':	$O(n' \cdot (m')^2)$
	$= O(nm^2)$

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen in Linearzeit *reduziert* auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

	Laufzeit
Beweis. – Konstruktion von G':	$O(n+m)$
– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G':	$O(n' \cdot (m')^2)$
	$= O(nm^2)$
	$O(nm^2)$

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen
in Linearzeit *reduziert*
auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$.

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

ausnutzen!

Beweis.

	Laufzeit
– Konstruktion von G':	$O(n + m)$
– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G':	$O(n' \cdot (m')^2)$
	$= O(nm^2)$
	$O(nm^2)$

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen
in Linearzeit *reduziert*
auf das Problem maximale Flüsse in $\underbrace{\text{gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$.

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^2)$ Zeit bestimmen.

ausnutzen!

Beweis.

	Laufzeit
– Konstruktion von G':	$O(n+m)$
– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G':	$O(n' \cdot (m')^2)$
Berechnet höchstens n s-t-Wege in je $O(m')$ Zeit	$= O(nm^2)$
	$O(nm^2)$

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen
in Linearzeit *reduziert*
auf das Problem maximale Flüsse in gerichteten Graphen.

sehr speziellen — mit Kap. $\equiv 1$

Satz. Sei G ein bipartiter Graph mit n Knoten u. m Kanten. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(nm^{\cancel{2}})$ Zeit bestimmen.

ausnutzen!

		Laufzeit
Beweis.	– Konstruktion von G':	$O(n+m)$
	– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G':	$O(n^{\cancel{\prime}} \cdot (m')^{\cancel{2}})$
	Berechnet höchstens n s-t-Wege in je $O(m')$ Zeit	$= O(nm^{\cancel{2}})$
		$O(nm^{\cancel{2}})$

Anmerkungen

Bem. Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
– maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(n^2 m)$ Zeit
– Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{n}m)$ Zeit.

[KN, Kapitel 9.6]

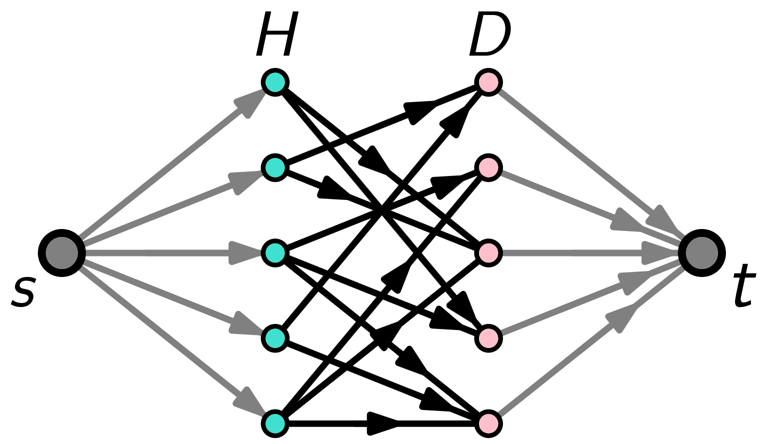
Anmerkungen

Bem. Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
– maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(n^2 m)$ Zeit
– Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{n}m)$ Zeit.

[KN, Kapitel 9.6]

Satz. Selbst in einem beliebigen Graphen mit n Knoten und m Kanten lässt sich eine größte Paarung in $O(\sqrt{n}m)$ Zeit berechnen. [Micali & Vazirani, FOCS'80]

Beweis des Heiratssatzes



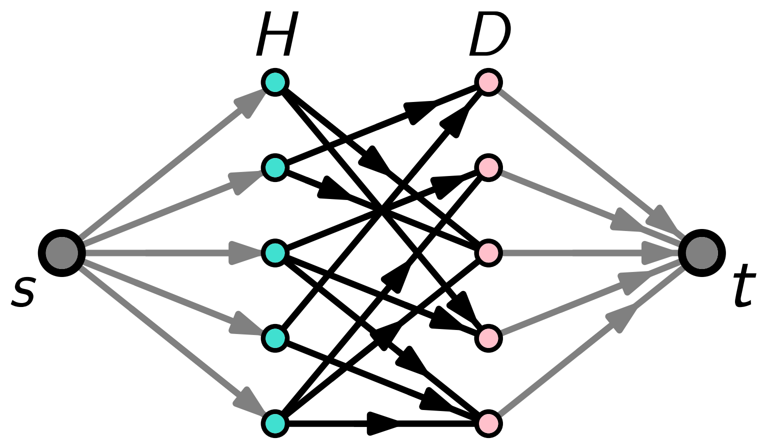
$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c \colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

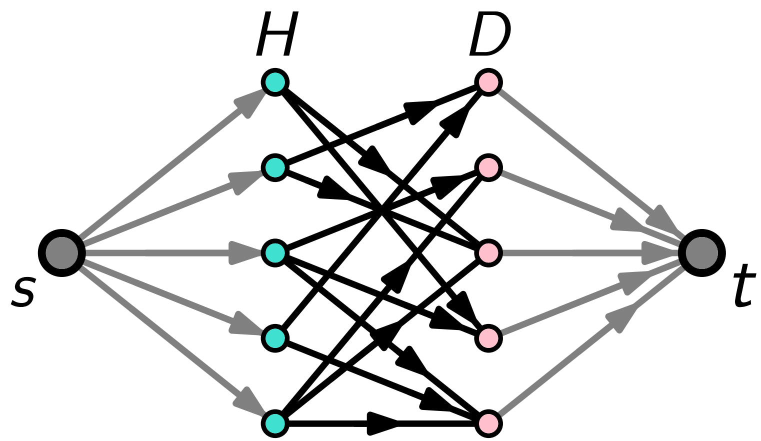
$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis.
„$\Leftarrow$“

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

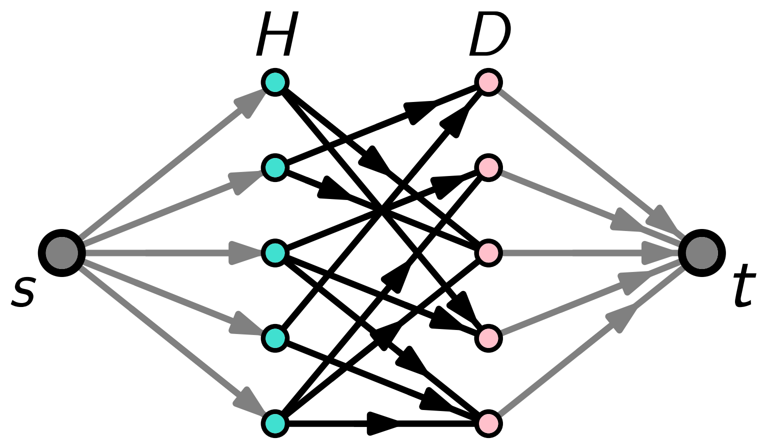
$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ G hat eine perfekte Paarung
$\Leftarrow$ G' hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c \colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

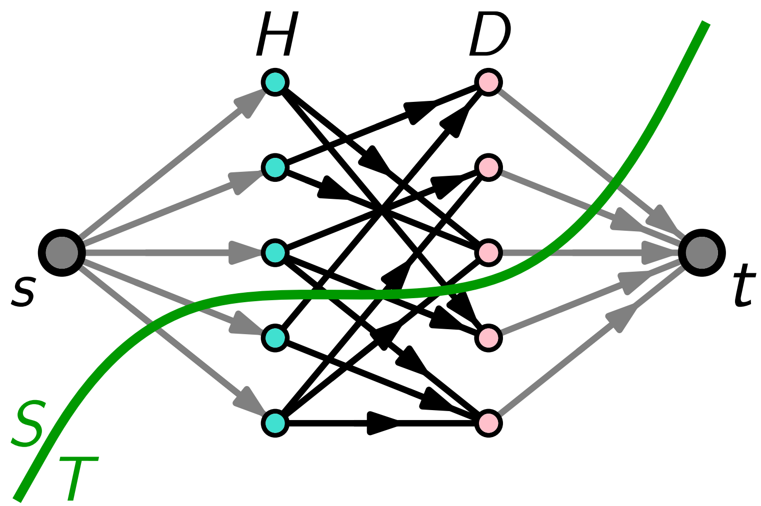
Beweis. „$\Leftarrow$“

G hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow$ G' hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$ für jeden s-t-Schnitt (S, T) in G' gilt $c(S) \geq |D|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

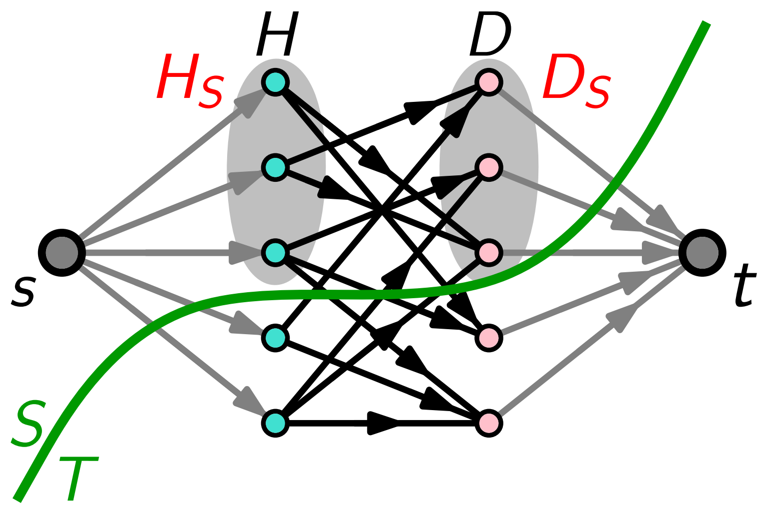
Beweis. „$\Leftarrow$“

G hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow$ G' hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$ für jeden s-t-Schnitt (S, T) in G' gilt $c(S) \geq |D|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c \colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

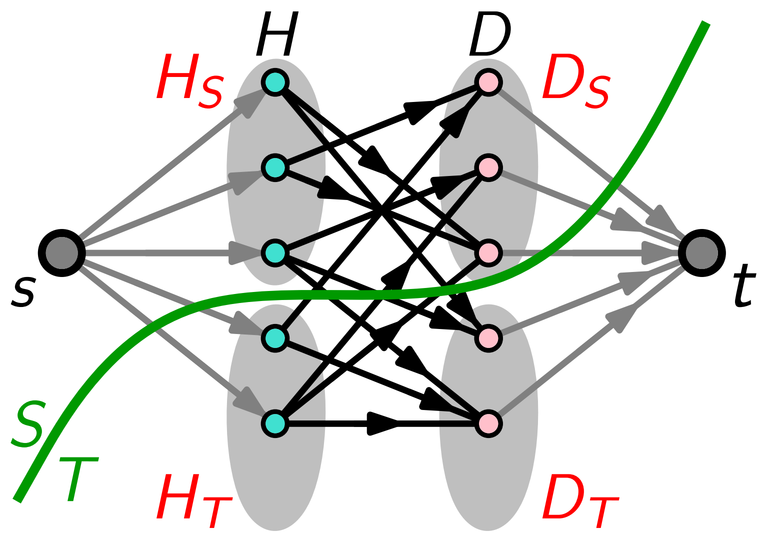
Beweis. „$\Leftarrow$“

G hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow$ G' hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$ für jeden s-t-Schnitt (S, T) in G' gilt $c(S) \geq |D|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c \colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

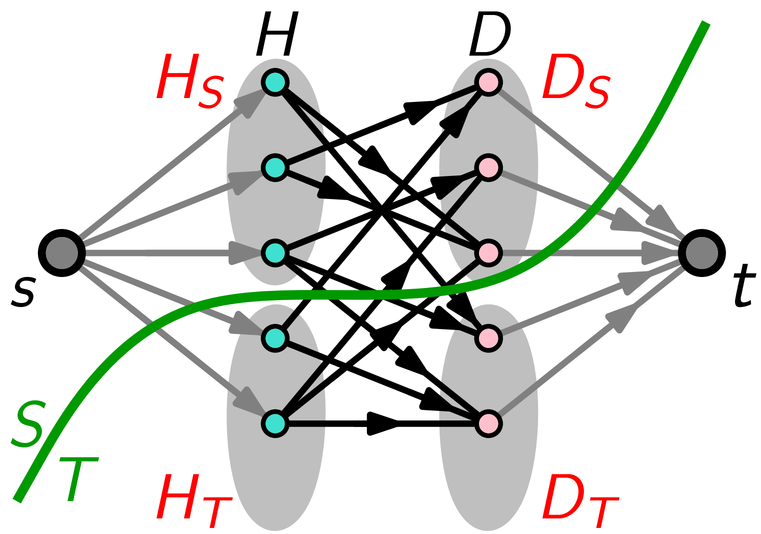
Beweis. „$\Leftarrow$"

G hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow$ G' hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$ für jeden s-t-Schnitt (S, T) in G' gilt $c(S) \geq |D|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \le |N(D')|$.

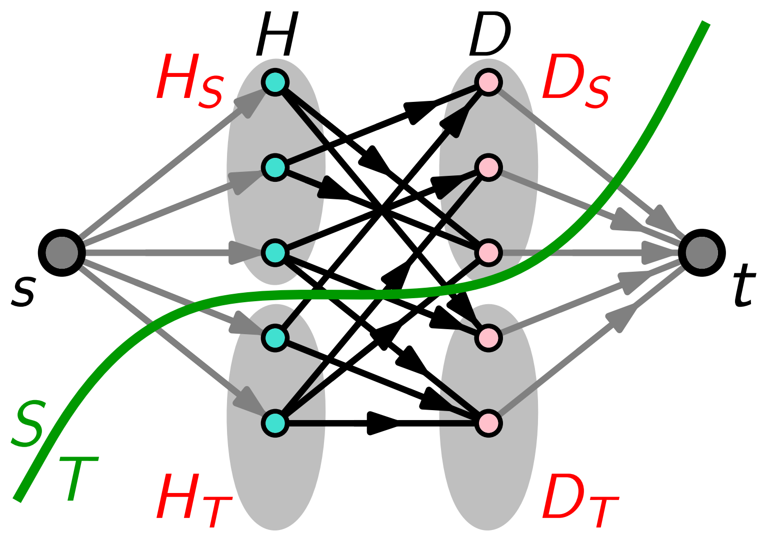
Beweis. „$\Leftarrow$"

G hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow$ G' hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$ $\underbrace{\text{für jeden } s\text{-}t\text{-Schnitt } (S, T) \text{ in } G' \text{ gilt } c(S) \ge |D|}_{\text{zu zeigen!}}$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

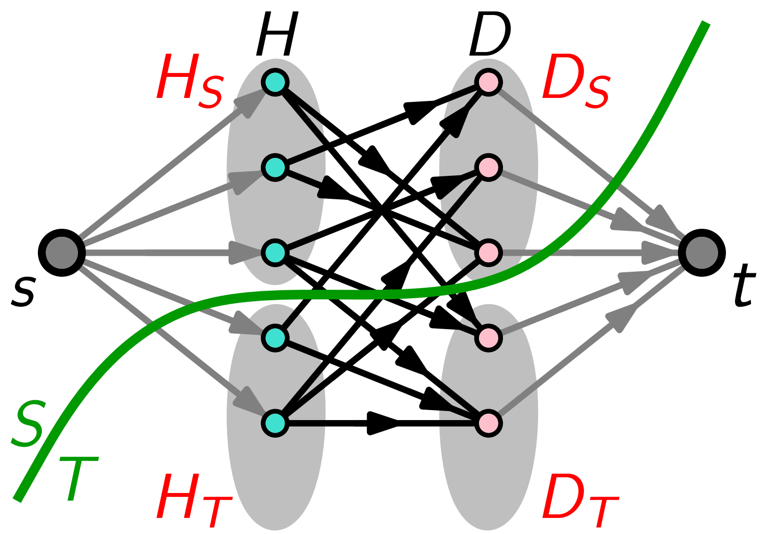
$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c \colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

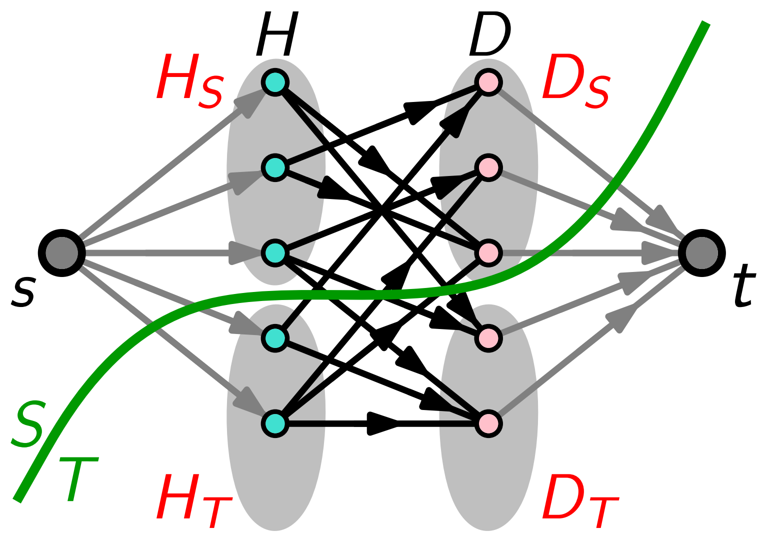
$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) =$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

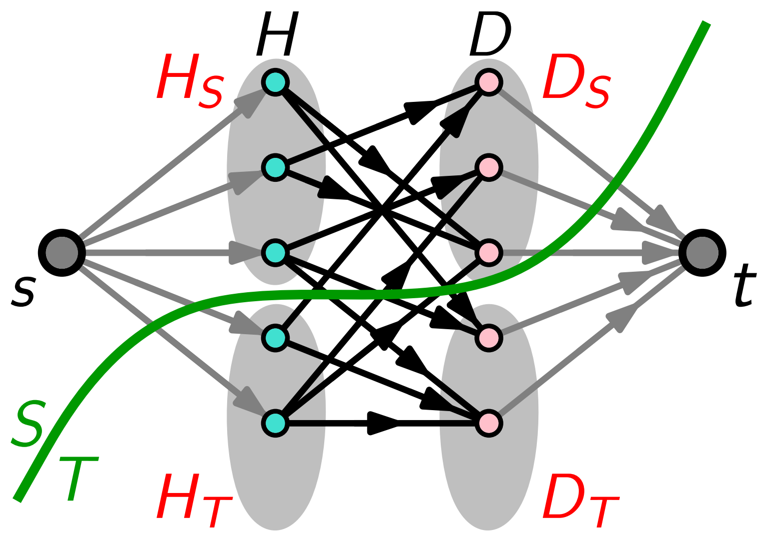
$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) =$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

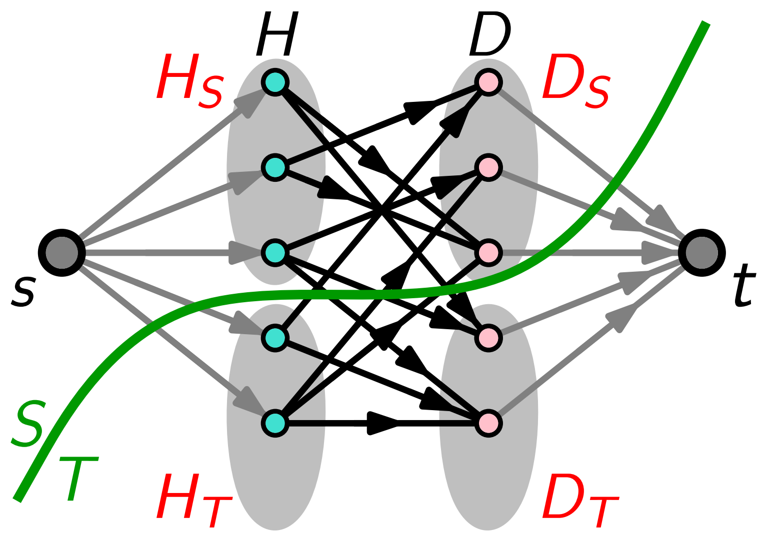
$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e)$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

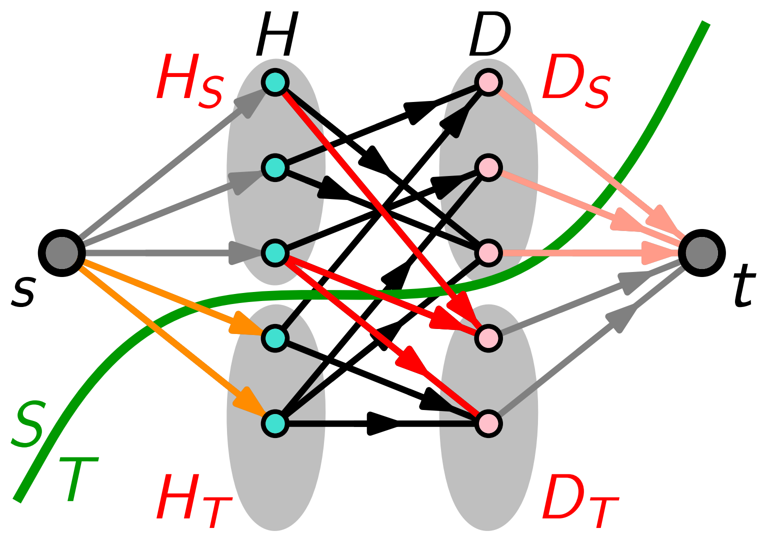
$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

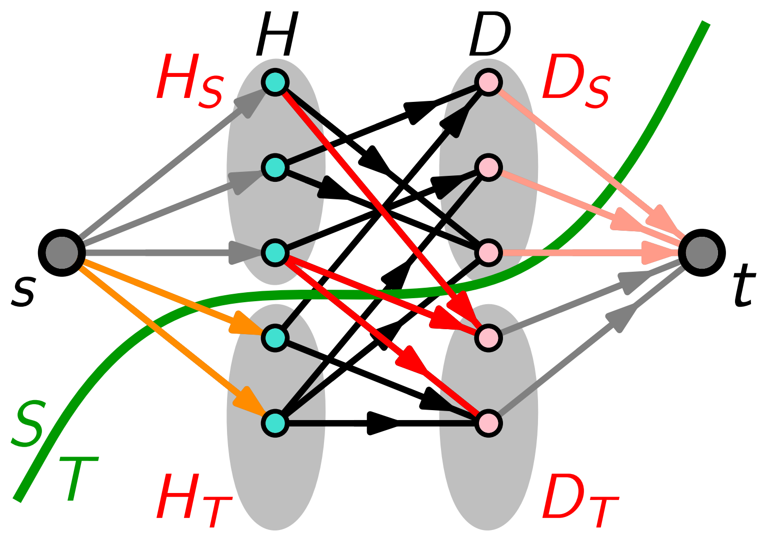
Beweis. „$\Leftarrow$“

z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

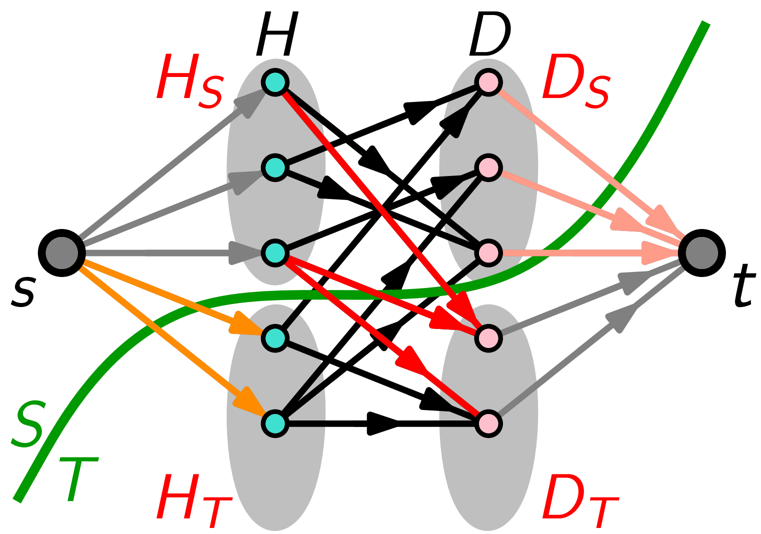
Beweis. „$\Leftarrow$" z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c \colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$" z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

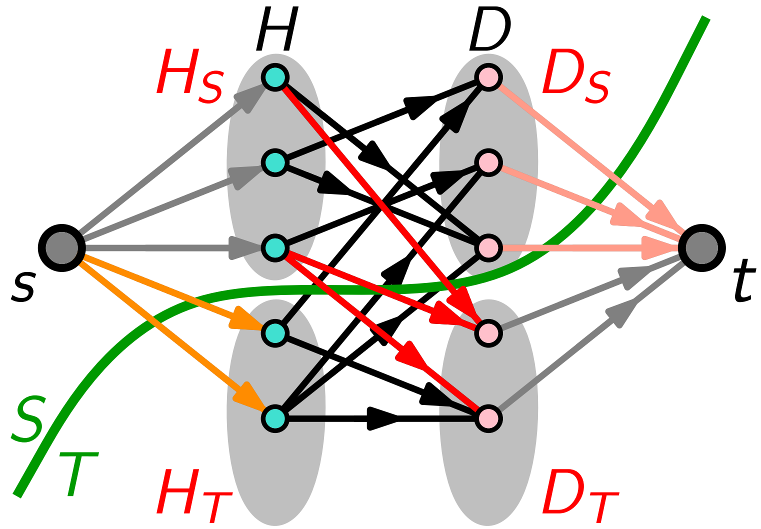
Es gilt $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$H_T \supseteq N_G(D_T) \cap H_T$

$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \le |N(D')|$.

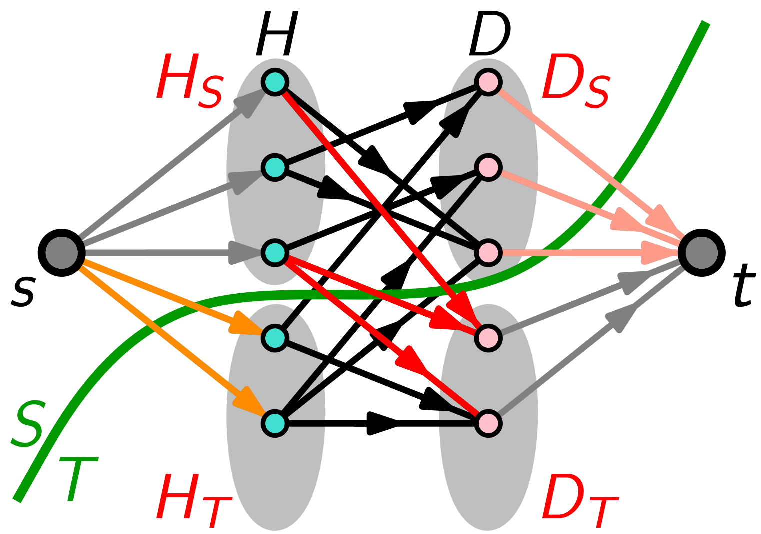
Beweis. „$\Leftarrow$"

z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \ge |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$$
\begin{aligned}
&\ge |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S| \\
&\ge |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S| \\
&= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S|
\end{aligned}
$$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \le |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \ge |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

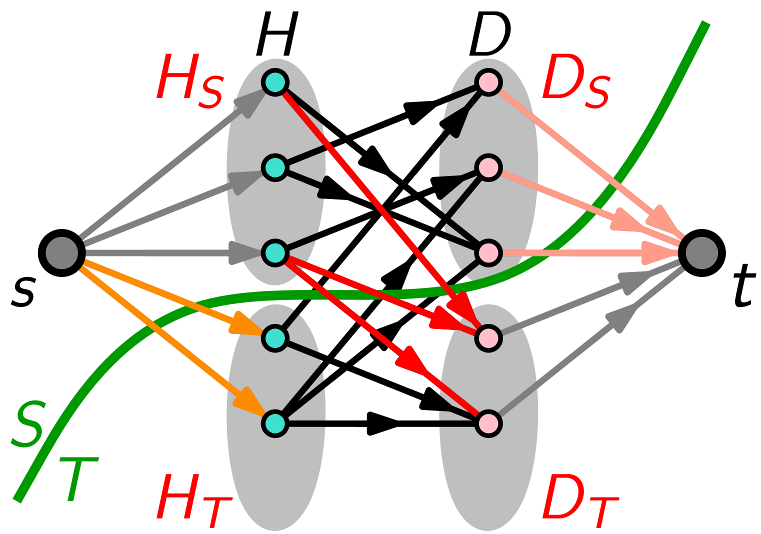
$$\ge |H_T| \qquad + \qquad |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\ge |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$H = H_T \,\dot\cup\, H_S$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S|$$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$" z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

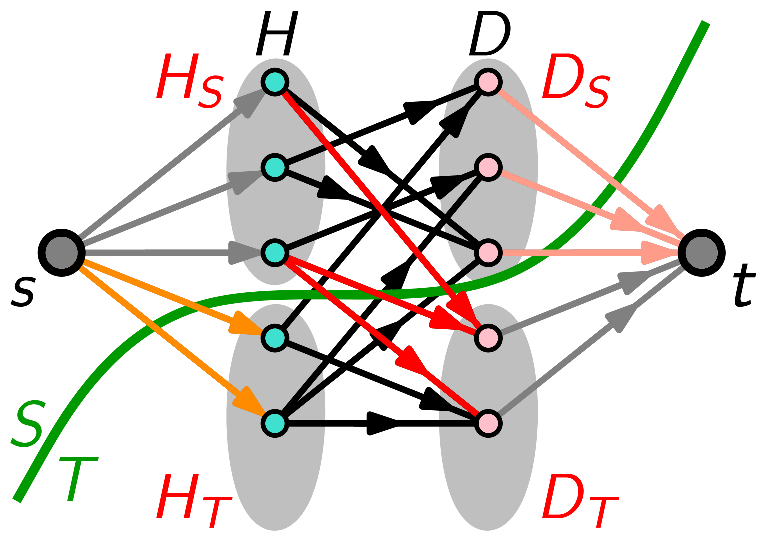
Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

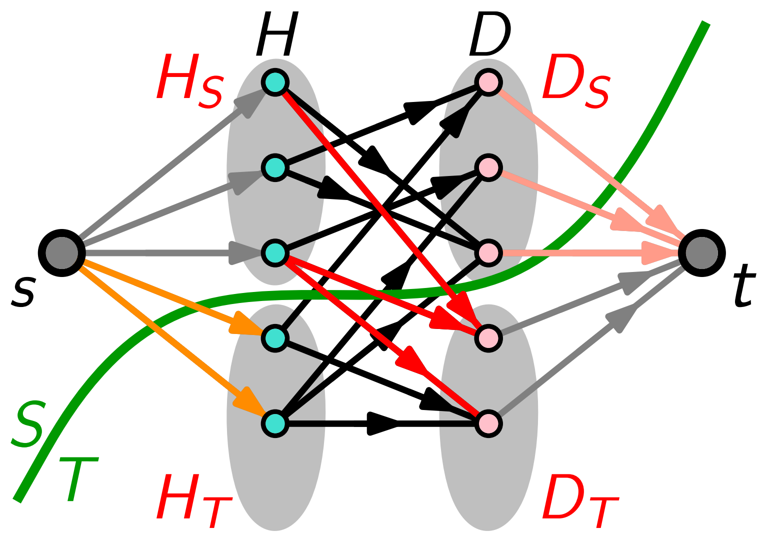
Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$
$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$
$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$N_G(D_T) \subseteq H$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c \colon E(G') \to \{1\}$

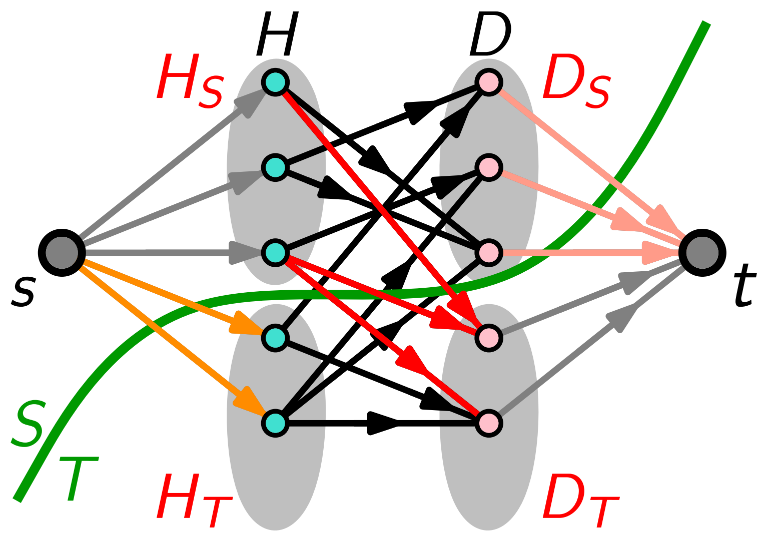
Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$" z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$
$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$
$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$
$$\geq |D_T| + |D_S|$$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

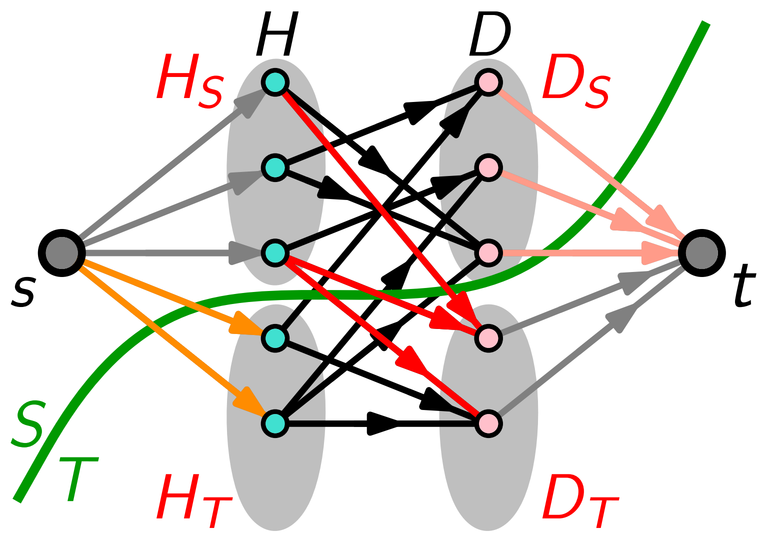
$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$

$\geq |D_T| + |D_S|$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V(G') = V(G) \cup \{s, t\}$

$c\colon E(G') \to \{1\}$

Satz. Graph G mit Bipartition (D, H) hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$

$\geq |D_T| + |D_S| = |D|$ $\square$