Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

4. Vorlesung

Flussalgorithmen

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Aufgabe

Indeed, it's an LP!

Gegeben ein gerichteter Graph G mit Knoten s und t sowie einer Kantenkapazitäten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen maximalen s-t-Fluss f konstruiert, also eine Funktion $f\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

Variable

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{u\colon\, v \in \text{Adj}[u]} f(uv) \;-\; \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$ *lineare Beschränkungen!*

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s-t-Flüssen

$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t)$ maximiert.

lineare Zielfunktion!

Flussalgorithmen

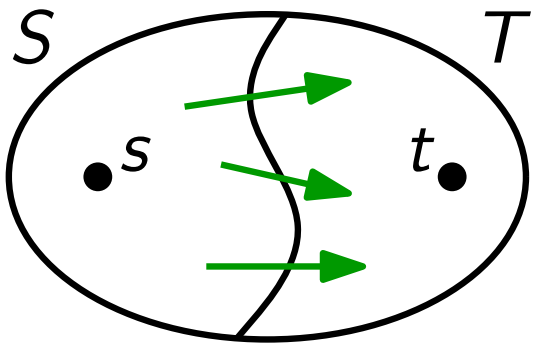
Kann man maximale Flüsse (= Spezialfall eines LPs) auch mit maßgeschneiderten kombinatorischen Algorithmen berechnen?

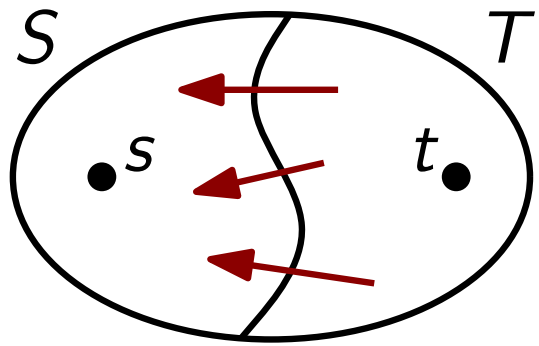
Hoffnung: Das könnte schneller gehen –
und strukturelle Einsichten liefern.

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie

Def. Sei G ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V(G)$.

Eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ ist ein *s-t-Schnitt*, falls $s \in S$ und $t \in T$.





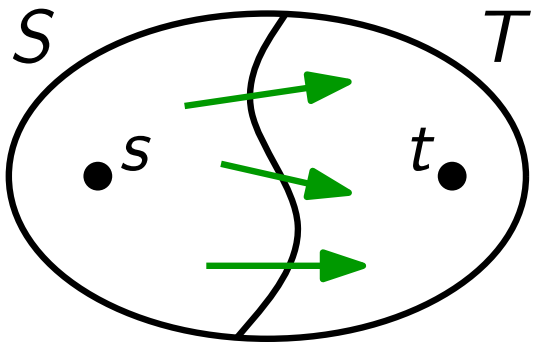
$$\text{Raus}(S) = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$$
$$\{uv \in E(G) \mid u \in T, v \in S\} = \text{Rein}(S)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Zufluss}_f(S) = f(\text{Rein}(S)) \\ \qquad\qquad \textit{minus} \\ \text{Abfluss}_f(S) = f(\text{Raus}(S)) \end{array}\right\} =: \text{Nettozufluss}_f(S)$$

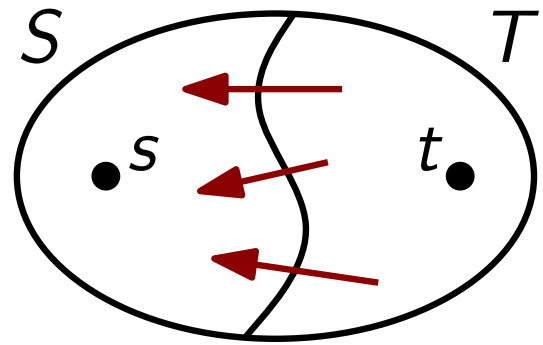
Nettozuflüsse von Schnitten und Knoten

Zur Erinnerung: $\text{Nettozufluss}_f(S) := f(\text{Rein}(S)) - f(\text{Raus}(S))$

$\text{Raus}(S) \subseteq E$



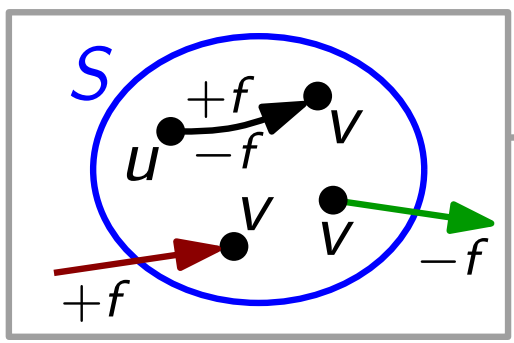
$\text{Rein}(S) \subseteq E$



Lem.[1] Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f : E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:

$$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v).$$

Beweis. $\sum_{v \in S} \text{Nettozufl}_f(v) = \sum_{v \in S} (\text{Zufluss}_f(v) - \text{Abfluss}_f(v))$



$$= \sum_{v \in S} \Big(\sum_{u:\ v \in \text{Adj}[u]} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) \Big)$$

$$= \sum_{e \in \text{Rein}(S)} f(e) - \sum_{e \in \text{Raus}(S)} f(e) \quad = \quad \text{Nettozufluss}_f(S)$$

□

Noch mehr Schnitte

Lemma[1]. Sei G Graph, $S \subseteq V(G)$ und $f : E(G) \to \mathbb{R}$. Dann:
$\text{Nettozufluss}_f(S) = \sum_{v \in S} \text{Nettozufluss}_f(v)$.

Lemma[2]. G Graph, $s, t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T)$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
|f| &=_{\text{Def.}} \text{Nettozufluss}_f(t) \\
&= \sum_{v \in T} \text{Nettozufluss}_f(v) \\
&\quad \text{da } \text{Nettozufluss}_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s, t \\
&= \text{Nettozufluss}_f(T)
\end{aligned}
$$

□

Kapazität von Schnitten

Lemma[2]. *G Graph, $s,t \in V(G)$, f s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt.*
Dann gilt $|f| = \text{Nettozufluss}_f(T) =: \text{Nettoabfluss}_f(S)$.

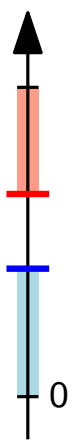
Def. *G Graph mit Kap. $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, (S,T) s-t-Schnitt.*
Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die Kapazität von (S,T).

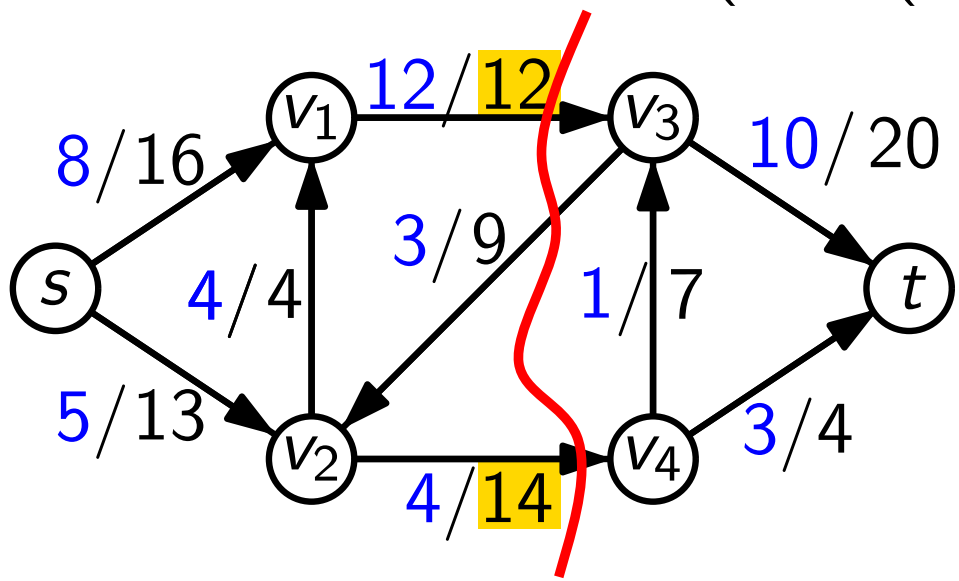
Lemma[3]. *f zuläss. s-t-Fluss, (S,T) s-t-Schnitt $\Rightarrow$ $|f| \le c(S)$.*

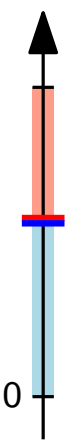
Beweis.
$$\begin{aligned} |f| = \text{Nettoabfluss}_f(S) &= f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S)) \\ &\le f(\text{Raus}(S)) \le c(\text{Raus}(S)) \\ &= c(S) \end{aligned}$$
□

Speziell:

$\min_S c(S)$
$\ge \max_f |f|$







Korollar.
Wenn
$|f| = c(S)$
$\Rightarrow f$ max.,
(S,T) min.

!!

Residualnetz

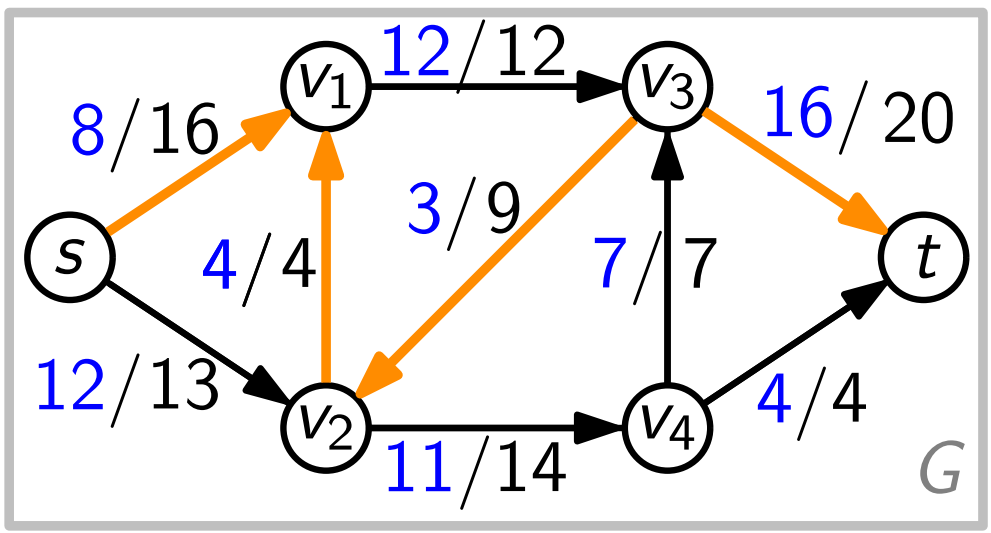
Beob. Falls es einen s-t-Weg gibt, bei dem auf keiner Kante die Kapazität ausgeschöpft ist, können wir f vergrößern.

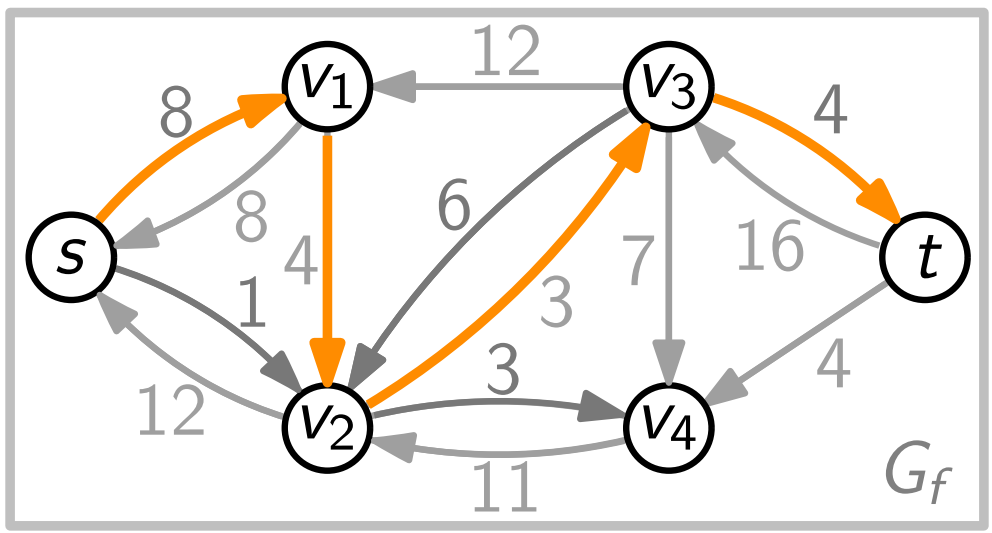
Aber: Falls es keinen solchen s-t-Weg gibt, so ist f nicht unbedingt maximal.

Residual-kapazitäten

Def. Der *Residualgraph* $G_f = (V, E_f)$ enthält für jede Kante $e = uv$ von $G = (V, E)$ die Kante(n)

- $+e := uv$ falls $f(e) < c(e)$ mit $c_f(+e) := c(e) - f(e)$
- $-e := vu$ falls $f(e) > 0$ mit $c_f(-e) := f(e)$





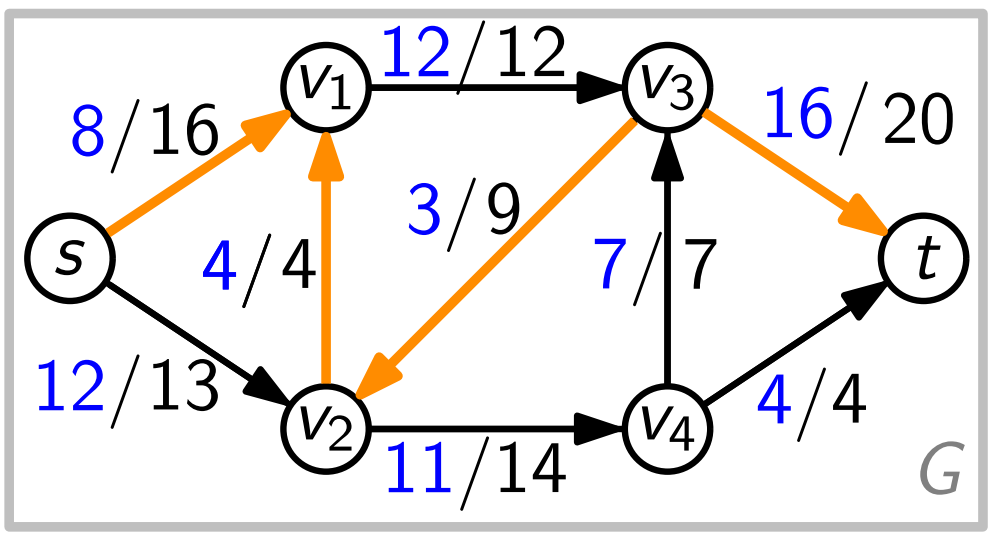
Augmentierende Wege

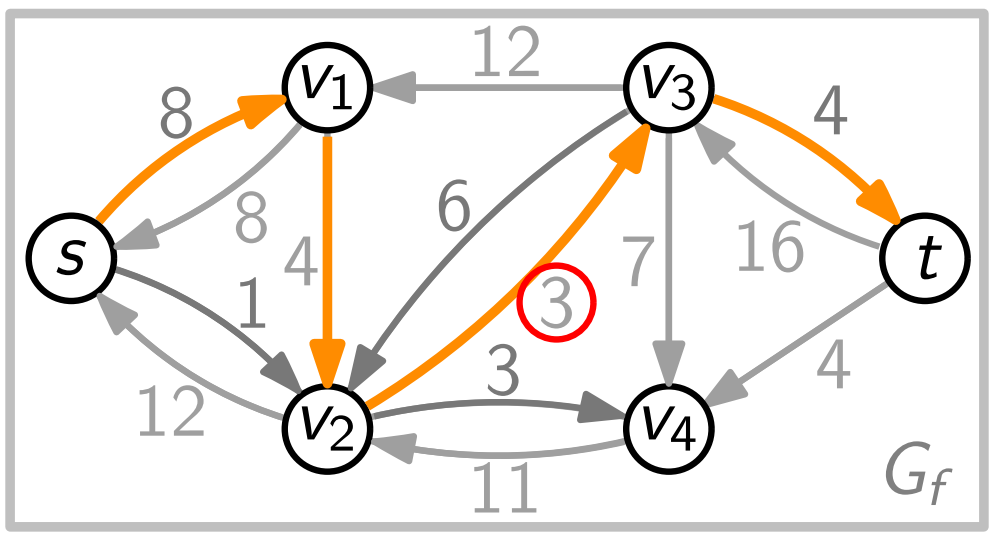
Def. Ein s-t-Weg W in G_f heißt *augmentierender Weg* für f.
Die Residualkapazität von W ist

$$\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e).$$

Satz (*vom augmentierenden [flussvergrößernden] Weg*).
Ein zulässiger s-t-Fluss f in G ist maximal $\Leftrightarrow$
es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

(Wir beweisen ihn nicht; er folgt direkt aus dem nächsten Satz.)





Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G.
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

Kurz:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T)\ s\text{-}t\text{-Schnitt}} c(S)$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2):
Ang. G_f enthält augmentierenden Weg.
Aber dann könnte f erhöht werden.
Widerspruch zu $|f|$ maximal.

(3) $\Rightarrow$ (1): Korollar $\Rightarrow$ $|f|$ maximal.

Erinnerung:

Korollar.
$|f| = c(S)$
$\Downarrow$
f maximal

Zu zeigen:

2. G_f enthält keine augmentierenden Wege.

$\Downarrow$

3. Es gibt einen Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gibt keinen augmentierenden Weg in G_f.

$\Rightarrow$ In G_f ist t von s aus nicht erreichbar.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} S = \{v \mid v \text{ von } s \text{ erreichbar}\} \\ T = \{v \mid v \text{ von } s \textit{ nicht} \text{ erreichbar}\} \end{cases}\right\} \text{ist } s\text{-}t\text{-Schnitt.}$$

Sei $e = uv \in \text{Raus}(S)$.

$\Rightarrow f(e) = c(e)$, sonst wäre v von s in G_f erreichbar.

$\overset{\Sigma}{\Rightarrow} f(\text{Raus}(S)) = c(\text{Raus}(S))$

Nun sei $e = uv \in \text{Rein}(S) \Rightarrow f(e) = 0$

$\overset{\Sigma}{\Rightarrow} f(\text{Rein}(S)) = 0$

Also: $c(S) \underset{\text{Def.}}{=} c(\text{Raus}(S)) = f(\text{Raus}(S)) - f(\text{Rein}(S))$

$= \text{Nettoabfluss}_f(S) \underset{\text{Lem. 2}}{=} |f|$ $\square$

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
} Initialisierung mit Null-Fluss

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$ } Residualkapazität von W

  Schreiben Sie Ihren eigenen Code, der bei Abbruch der **while**-Schleife in f einen maximalen Fluss liefert.

return f } Rückgabe eines max. Flusses

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

```
foreach uv ∈ E do                                  } Initialisierung mit Null-Fluss
    f_uv = 0
while G_f enthält s-t-Weg W do
    Δ_W = min_{uv∈W} c_f(uv)                       } Residualkapazität von W
    foreach uv ∈ W do                              } Flussvergrößerung entlang W
        if uv ∈ E then
            f_uv = f_uv + Δ_W
        else
            f_vu = f_vu − Δ_W
return f                                           } Rückgabe eines max. Flusses
```

Der Algorithmus von Ford & Fulkerson

FordFulkerson(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$

while G_f enthält s-t-Weg W **do**
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$

return f

Berechnung von s-t-Wegen

- Breitensuche
- Tiefensuche

} $O(E)$ Zeit

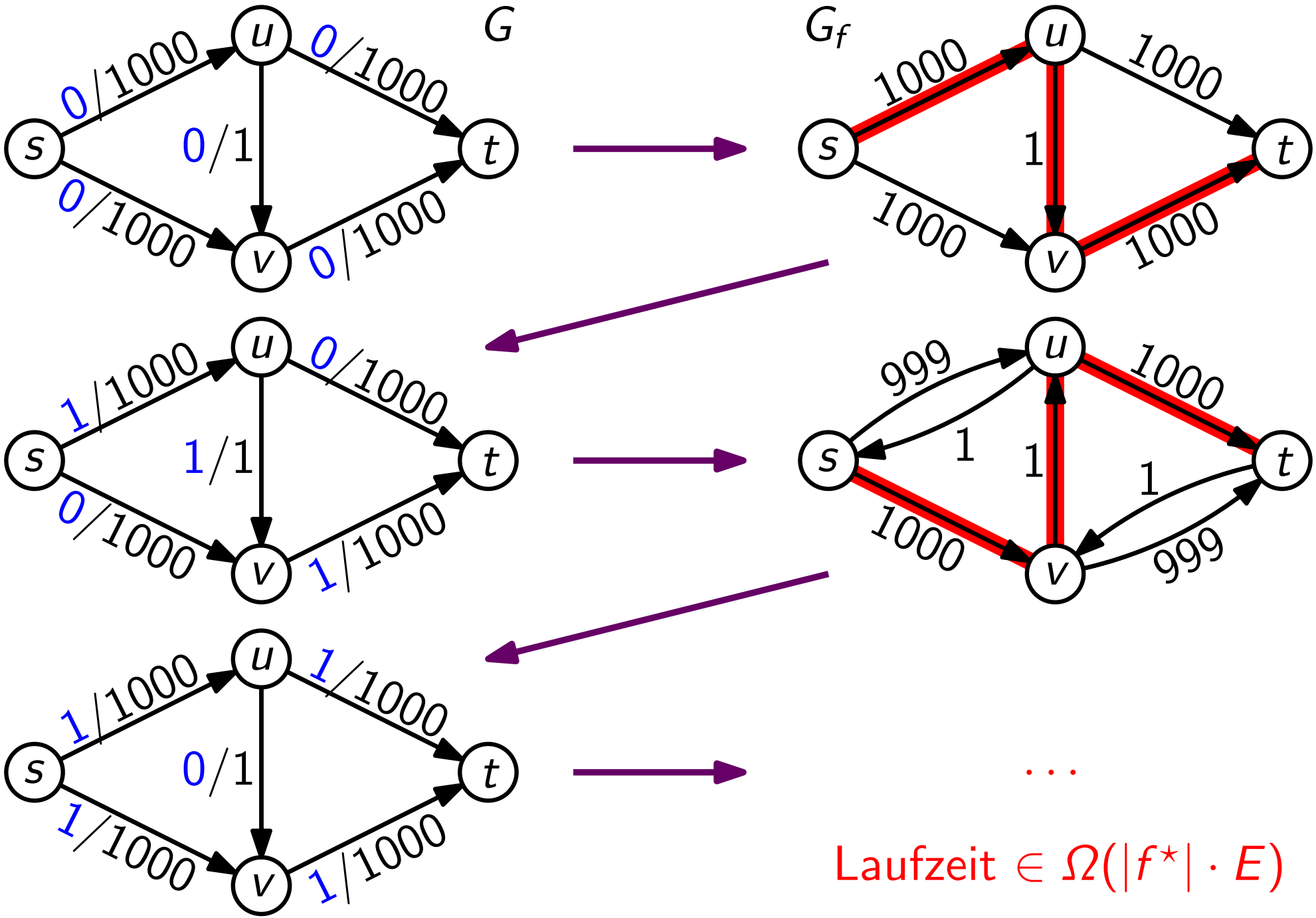
Anz. Schleifendurchläufe

- in jedem Durchlauf wird f um ≥ 1 vergrößert
- max. $|f^*|$ Durchläufe, wobei f^* ein max. Fluss

Korrektheit?
Folgt aus Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Laufzeit?
1. $c\colon E \to \mathbb{N}$: $O(|f^*| \cdot E)$
2. $\mathbb{Q}_{>0}$: erweitern...
3. $\mathbb{R}_{>0}$: problematisch!

Beispiel


G
G_f
s
u
v
t
0/1000
0/1
1/1000
1/1
1000
1
999
...
Laufzeit $\in \Omega(|f^\star| \cdot E)$

Der Algorithmus von Edmonds & Karp

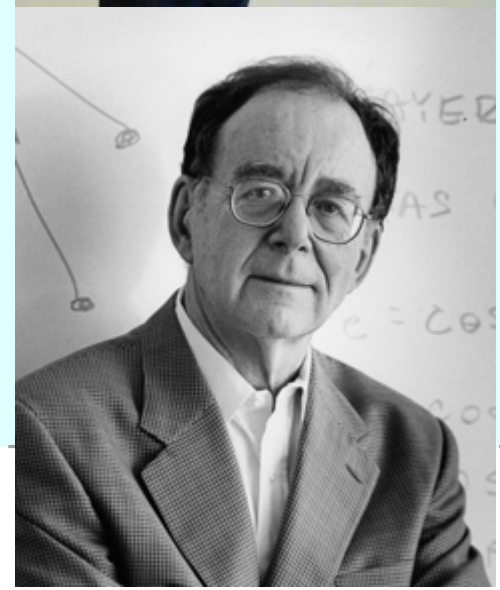
EdmondsKarp

~~FordFulkerson~~(DirectedGraph $G = (V, E; c)$, Vertex s, Vertex t)

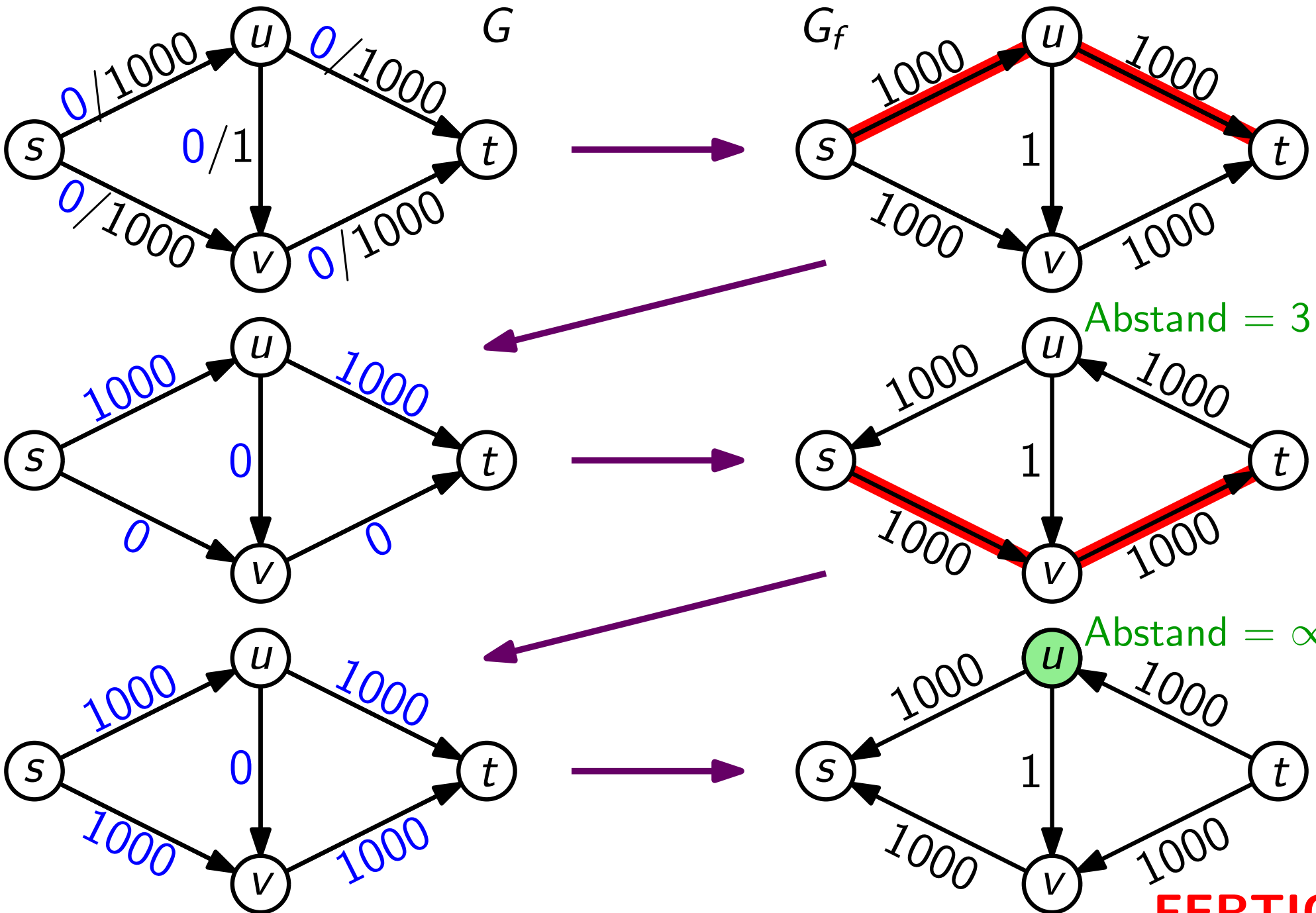
foreach $uv \in E$ **do**
  $f_{uv} = 0$
while G_f enthält s-t-Weg **do**
  $W =$ kürzester s-t-Weg in G_f
  $\Delta_W = \min_{uv \in W} c_f(uv)$
  foreach $uv \in W$ **do**
    if $uv \in E$ **then**
      $f_{uv} = f_{uv} + \Delta_W$
    else
      $f_{vu} = f_{vu} - \Delta_W$
return f

Jack R. Edmonds
*1934

Richard M. Karp
*1935 Boston, MA



Beispiel


G
G_f
Abstand von $s = 1$
Abstand $= 3$
Abstand $= \infty$
s
u
v
t
0/1000
0/1
1000
0
1
FERTIG!

Kürzeste Wege machen effiziente Algorithmen!

Def. Sei $\delta_f(u, v)$ die Länge (= Anz. Kanten) eines kürzesten u-v-Wegs in G_f.

Lemma. Während EdmondsKarp(G, s, t) gilt für jeden Knoten $v \in V$, dass $\delta_f(s, v)$ mit jeder Flussvergrößerung monoton zunimmt.

Beweis. Annahme: es gibt einen Knoten v derart, dass $\delta_f(s, v)$ bei einer Vergrößerung von f *abnimmt*.

Sei f der Fluss *vor* der Vergrößerung;
sei f' der Fluss *nach* der Vergrößerung.

„kleinster Schurke“

Ab jetzt sei v unter den Knoten mit $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$ einer mit *minimalem* Wert von $\delta_{f'}(s, v)$.

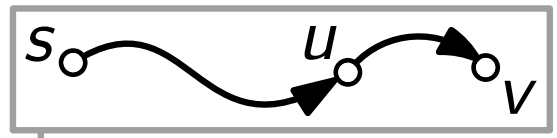
Fortsetzung Beweis

Sei W ein kürzester s-v-Weg in $G_{f'}$.

Sei u der letzte Knoten vor v auf W.

$\Rightarrow uv \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$. [Eig. kürzester Wege]

Nach Wahl von v gilt: $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ [u ist *kein* Schurke; Abstand nimmt *nicht* ab.]



Beh. $uv \notin E_f$

Beweis. Angenommen $uv \in E_f \Rightarrow \delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$

$\leq \delta_{f'}(s,u) + 1$

$= \delta_{f'}(s,v)$

Widerspruch zur Annahme, dass $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$. △

Aber wie können wir $uv \notin E_f$ und $uv \in E_{f'}$ erklären??

Fortsetzung II

1. Fall: $uv \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(uv) = c(uv)$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(uv) < c(uv)$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

2. Fall: $vu \in E$

$uv \notin E_f$ bedeutet $f(vu) = 0$.

$uv \in E_{f'}$ bedeutet $f'(vu) > 0$.

$\rightsquigarrow$ Flussvergrößerung entlang $vu \in E_f$

Der Fluss wird in beiden Fällen entlang vu vergrößert.

Da EdmondsKarp entlang kürzester Wege vergrößert, muss v Vorgänger von u auf einem kürzesten s-u-Weg in G_f sein.

$$\Rightarrow \delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \leq \delta_{f'}(s,u) - 1 = \delta_{f'}(s,v) - 2$$

[u kein Schurke] [u liegt auf W vor v]

$$< \delta_{f'}(s,v).$$

Widerspr. zur Ann. $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$.

□

Anzahl Flusserhöhungen & Laufzeit

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Korollar. Der Edmonds-Karp-Algorithmus läuft in $O(VE^2)$ Zeit.

Beweis. Jede der $O(VE)$ Flussvergrößerungen benötigt $O(E)$ Zeit bei Anwendung von Breitensuche. □

Beweis (Satz)

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis. Sei f der aktuelle, nicht maximale Fluss in G.

Sei W der kürzeste s-t-Weg in G_f, entlang dem der Fluss vergrößert wird. Kante e auf W heißt *kritisch*, wenn $c_f(e) = \Delta_W$.

Zeige: Jede Kante uv kann höchstens $O(V)$ mal kritisch sein.

$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$, da uv auf *kürzestem* Weg W in G_f.

Nach Flussvergrößerung entlang W verschwindet uv aus G_f.

Die Kante uv erscheint erst wieder im Residualgraphen, nachdem Fluss entlang vu vergrößert wurde $\Rightarrow$ $vu \in E_{f'}$

f' = Fluss direkt *vor* dieser Vergrößerung (aber *nach* dem Zeitpunkt, als f der Fluss war.)

Fortsetzung Beweis

Satz. EdmondsKarp(G, s, t) führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch.

Beweis (Forts.)

Da vu auf kürzestem flussvergrößerndem Weg in $G_{f'}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,v) + 1 \qquad \text{(voriges Lemma)} \\ &= \delta_f(s,u) + 1 + 1. \qquad \text{(uv auf W in G_f)} \end{aligned}$$

Also steigt $\delta_\square(s,u)$, bis uv das nächste Mal kritisch ist, um ≥ 2.

Kürzeste Wege sind *einfach*, d.h. besuchen jeden Knoten $\leq 1\times$.

$\Rightarrow \delta_\square(s,u) < |V|$, solange u von s erreicht werden kann.

$\Rightarrow$ Die Kante uv kann nur $O(V)$ mal kritisch sein. $\square$

Kurze Geschichte der Berechnung max. Flüsse

Methode	*Laufzeit* $O(\cdot)$	*Autoren*
Allgemeine gerichtete Graphen		
shortest resid. s-t path	VE^2	Dinic '70, Ed. & Karp '72
push relabel	V^2E	Goldberg '87
relabel to front	V^3	Goldberg & Tarjan '88
	$VE\log(V^2/E+2)$	— " —
blocking flow	$\min(V^{2/3}, E^{1/2}) \cdot E \cdot$ $\cdot \log(V^2/E+2) \cdot \log C$,	Goldberg & Rao '98 wobei $C = \sum_{e\in E} c(e)$
new	VE	Orlin '13
s-t-planare Graphen		
shortest path in dual	V	Hassin '81 + Henzinger et al. '97
Planare Graphen		
leftmost resid. s-t path	$V \log V$	Borradaile & Klein '06
+ vertex capacities	$V \log V$	Kaplan & Nussbaum '09