

Algorithmische Graphentheorie

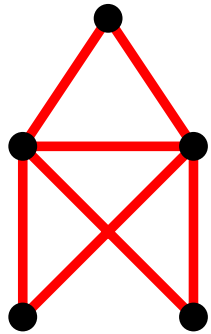
Sommersemester 2026

3. Vorlesung

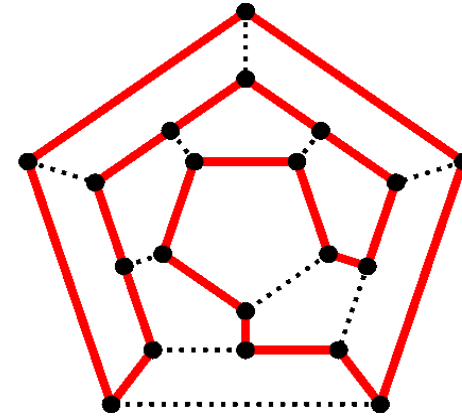
Rundreiseprobleme – Teil III

Übersicht

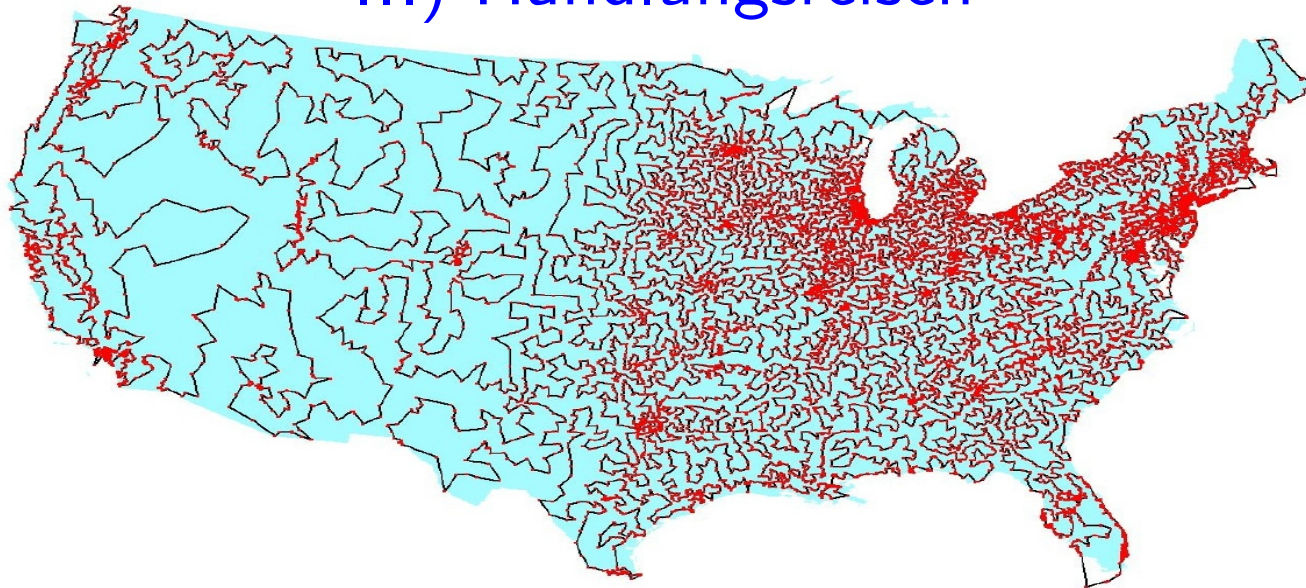
I) Eulerkreise



II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



III) Handlungsreisen

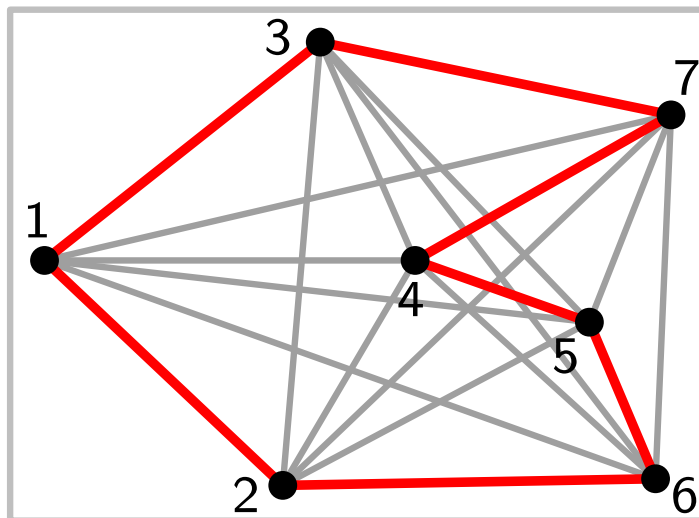
Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen
Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

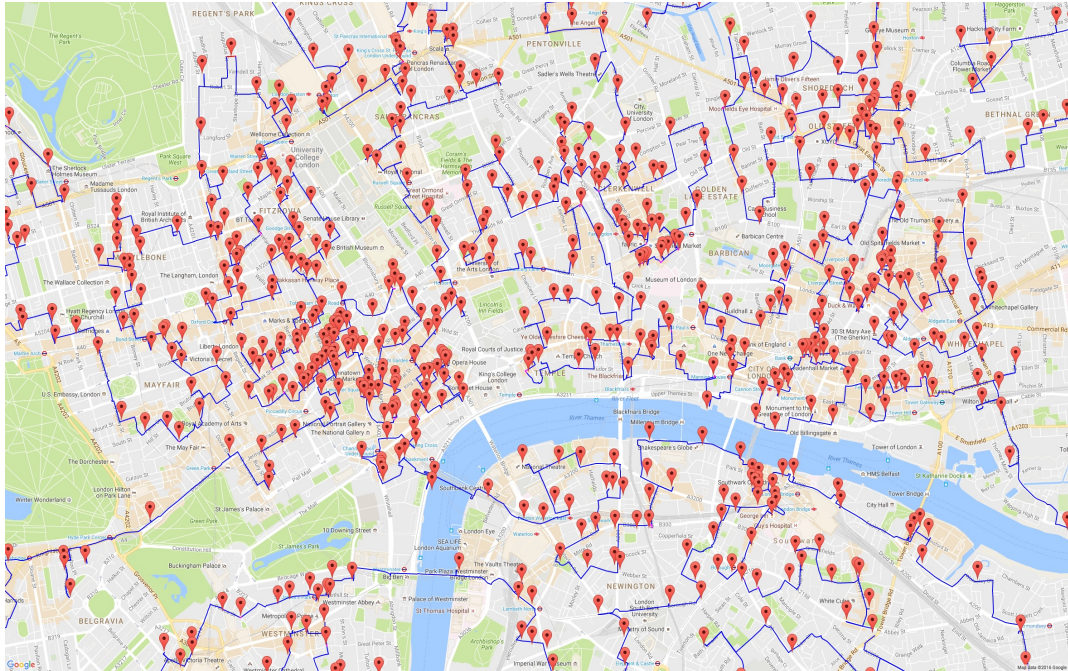
Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



0	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}
c_{21}	0	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	c_{27}
c_{31}	c_{32}	0	c_{34}	c_{35}	c_{36}	c_{37}
c_{41}	c_{42}	c_{43}	0	c_{45}	c_{46}	c_{47}
c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	0	c_{56}	c_{57}
c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}	0	c_{67}
c_{71}	c_{72}	c_{73}	c_{74}	c_{75}	c_{76}	0

Beispielinstanzen



Alle 24.727 Pubs in Großbritannien.
(45.495 km)



Mona Lisa TSP Challenge.

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

- Laufzeit:**
- Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$
- Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.
- Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.
- Berechnung der nächsten Permutation: ???
- Ang. ??? = $O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

- Speicher:** $O(n)$ für aktuelle und bisher beste Permutation.

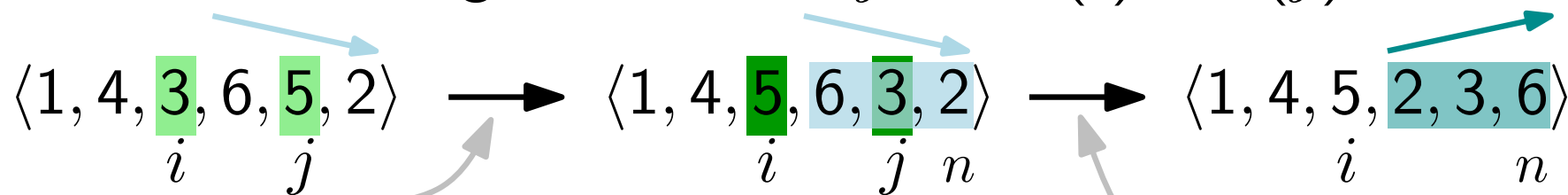
Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n) \rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow n! \in 2^{\Theta(n \log n)}$$

Genauer: Sterlingformel

[James Sterling, 1692–1770]

Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

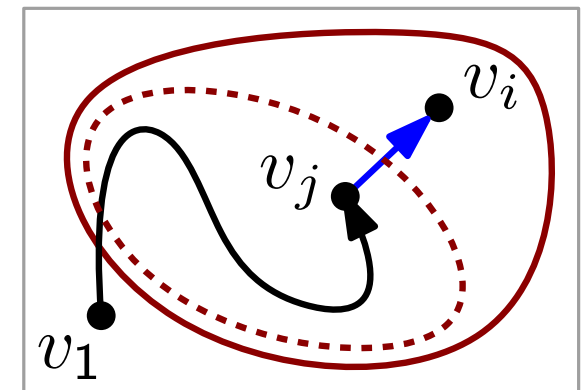
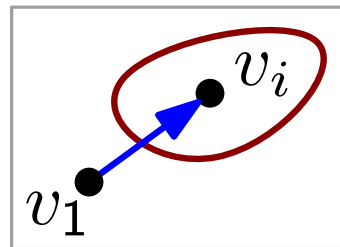
Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere $T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs durch alle Knoten in W .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

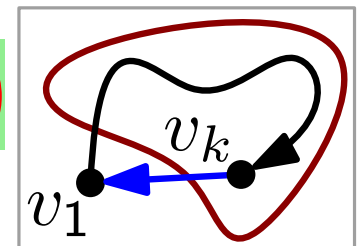


Und für W mit $|W| \geq 2$:

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} (T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$$

Index des letzten Knotens vor v_1

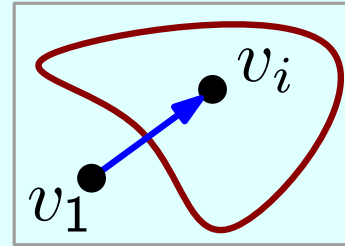


Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**

└ $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

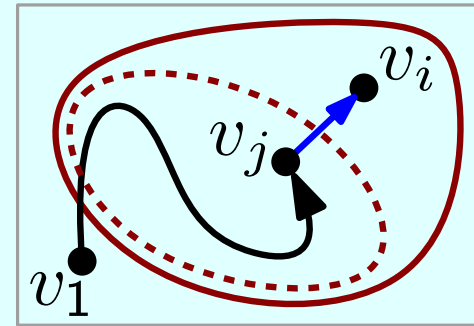


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

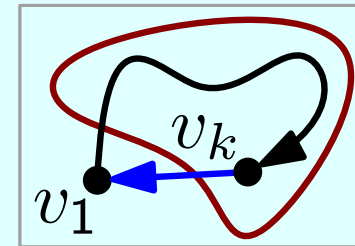
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return $\min_{k \neq 1} (T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

\Rightarrow Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:** $O(n \cdot 2^n)$

Vergleich

(n = Anzahl der Knoten)

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Speicher	$O(n)$	$O(n \cdot 2^n)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

Bem. Nederlof hat vor kurzem [STOC 2020] einen randomisierten Algorithmus für *bipartites* TSP vorgeschlagen, der in $O(\text{poly}(n) \cdot 1.9999^n)$ Zeit läuft (falls man Matrizen schnell genug multiplizieren kann).

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
dann auch HK. *in Polynomialzeit!*

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
Graph H .

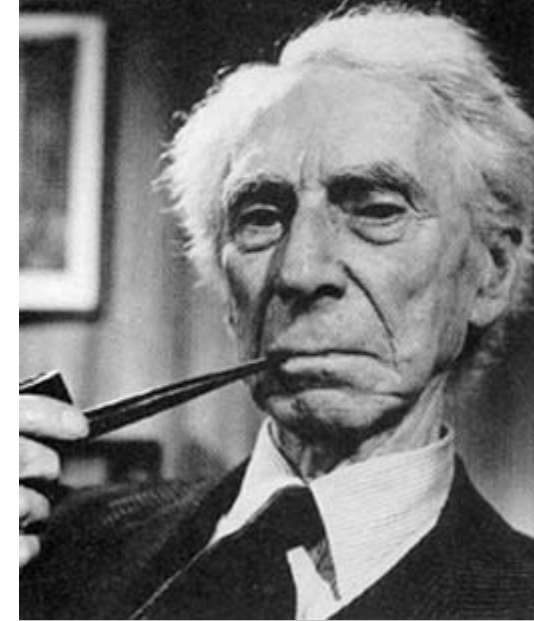
Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2} \right)$ und für $u, v \in V(H)$

setze $c(uv) = \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| & \text{sonst.} \end{cases}$

Also: Optimale TSP-Tour kostet $|V(H)| \Leftrightarrow H$ ham.



Was tun?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei *ziel* die Zielfunktion von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

poly($|V(G)|$)

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei $ziel$ die Zielfunktion von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von \mathcal{A}

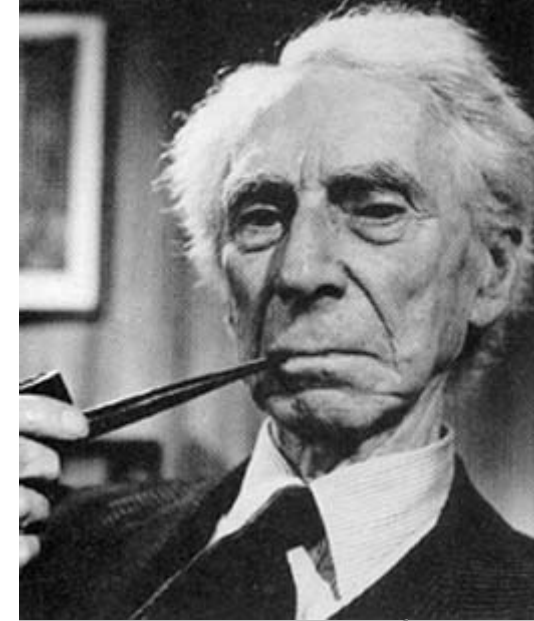
Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung) \rightarrow OPT(I)

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.



z.B. LSP = $\begin{cases} \text{longest} \\ \text{simple} \\ \text{path} \end{cases}$
ziel \equiv Länge

γ -Approx. für LSP liefert einfachen Pfad, der *mindestens* γ mal so lang ist wie der längste.

$\text{poly}(|V(G)|)$

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ -Approximation für TSP (außer P=NP).

Satz. TSP ist NP-schwer **zu approximieren!**

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ ^{mit Güte γ approximieren} könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H .

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2} \right)$ und für $u, v \in V$ setze

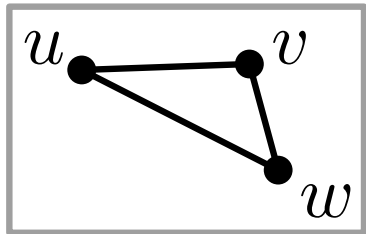
$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| \cdot \gamma & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow ~~optimale~~ TSP-Tour kostet $\leq \underbrace{\gamma \cdot |V(H)|}_{\text{mit Güte } \gamma} \Leftrightarrow H$ ham.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

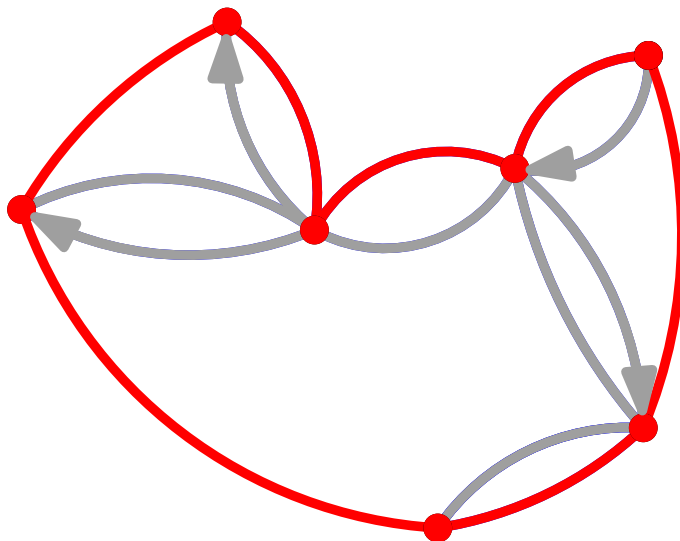
Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Dreiecksungleichung erfüllen, d.h. $\forall u, v, w \in V(G): c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

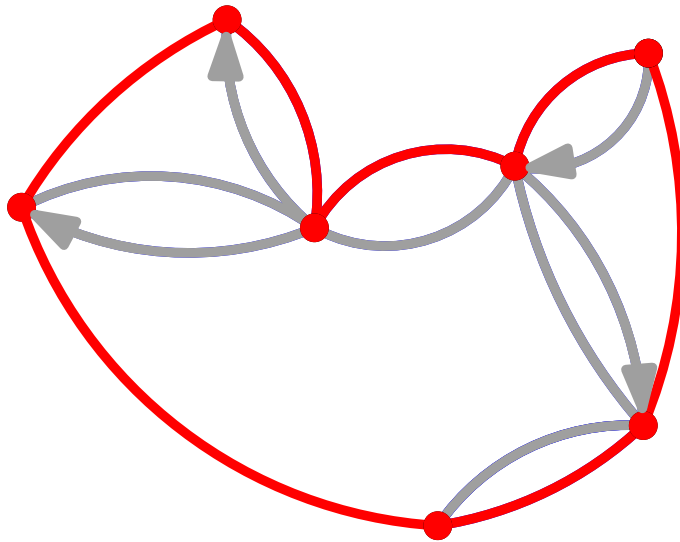
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Die „Kunst“ der unteren Schranke: $c(\text{min. Spannbaum}) \leq c(\text{TSP-Tour})$