Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2026

3. Vorlesung

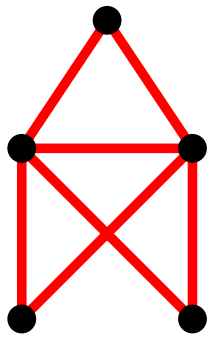
Rundreiseprobleme – Teil III

Lehrstuhl für Informatik I

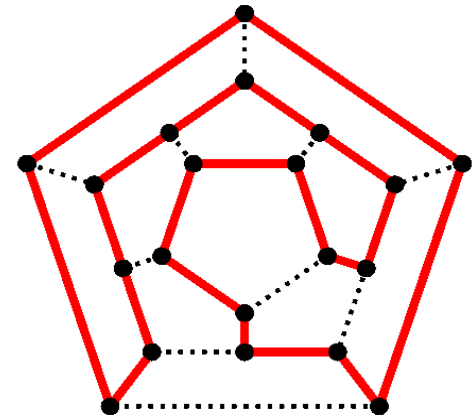
Alexander Wolff

Übersicht

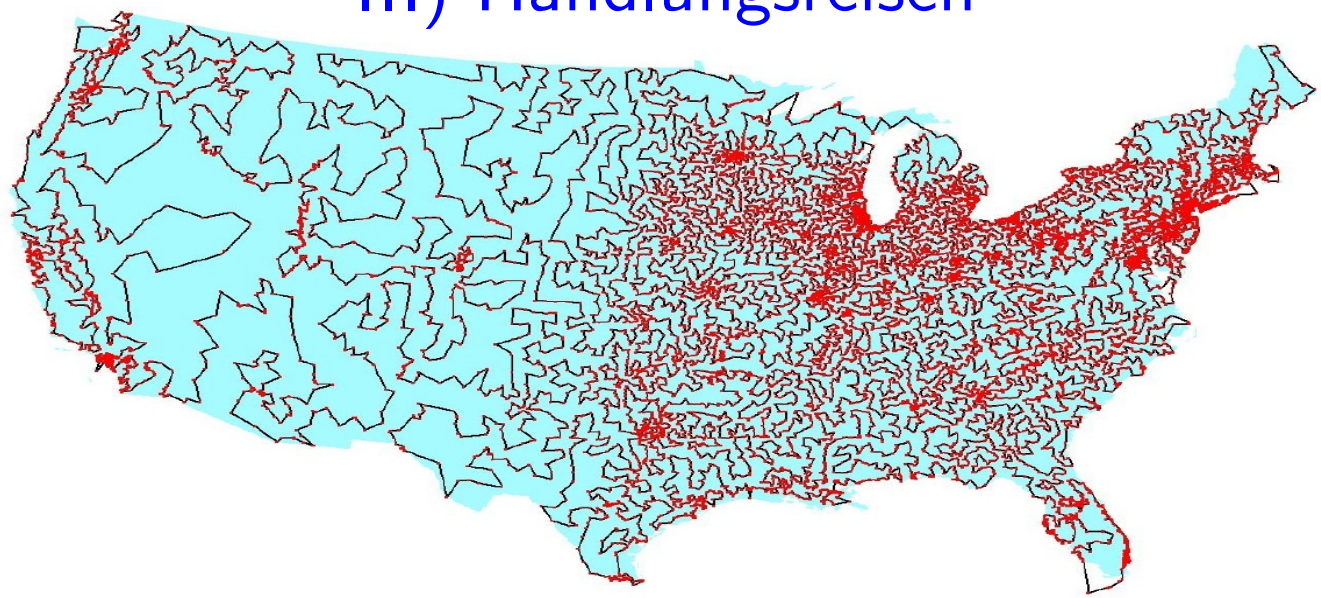
I) Eulerkreise



II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

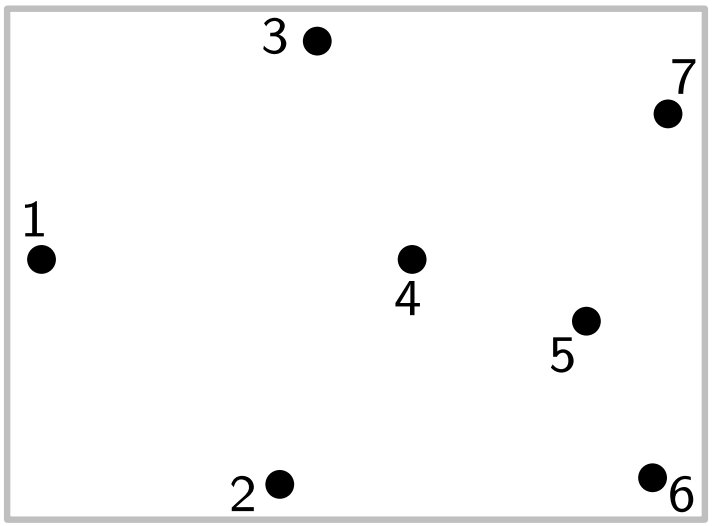
Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten c: $E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$

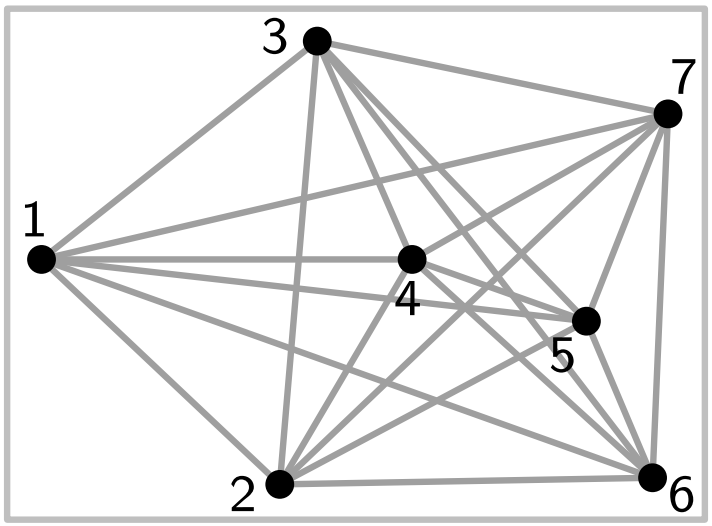


III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$

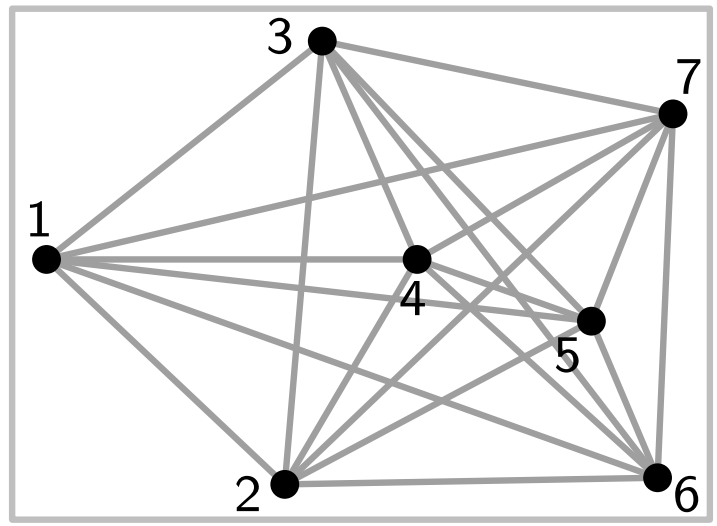


III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

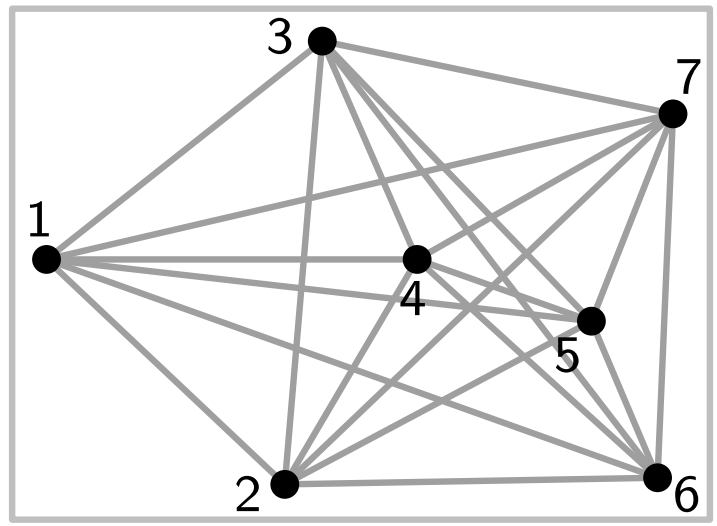
III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K)$.

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

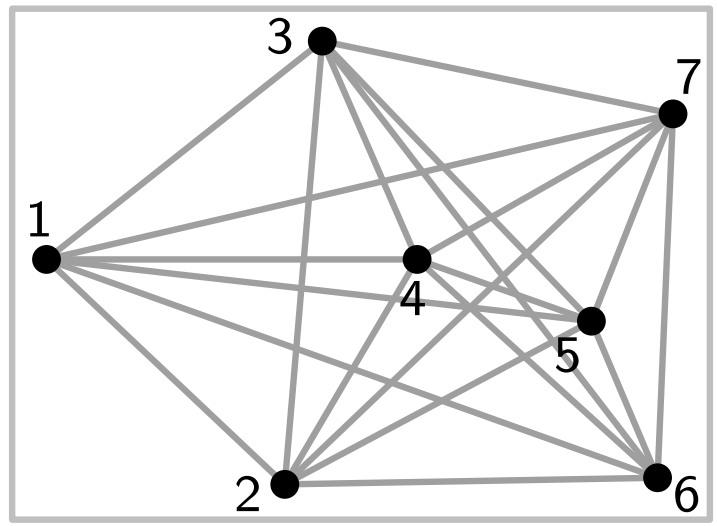
III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

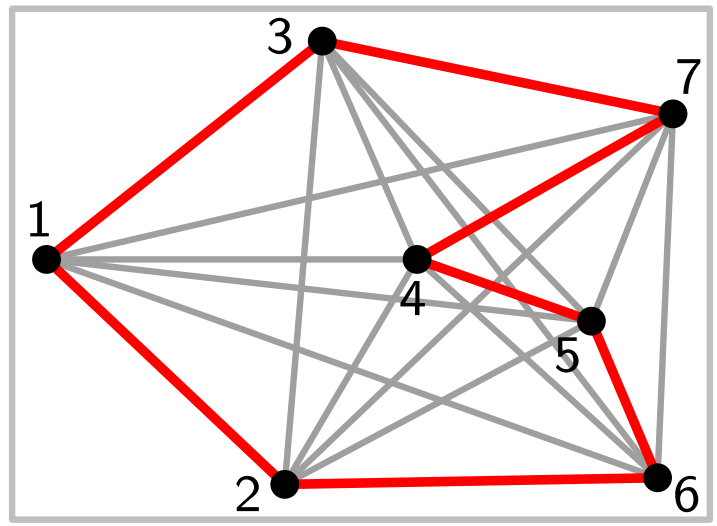
III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

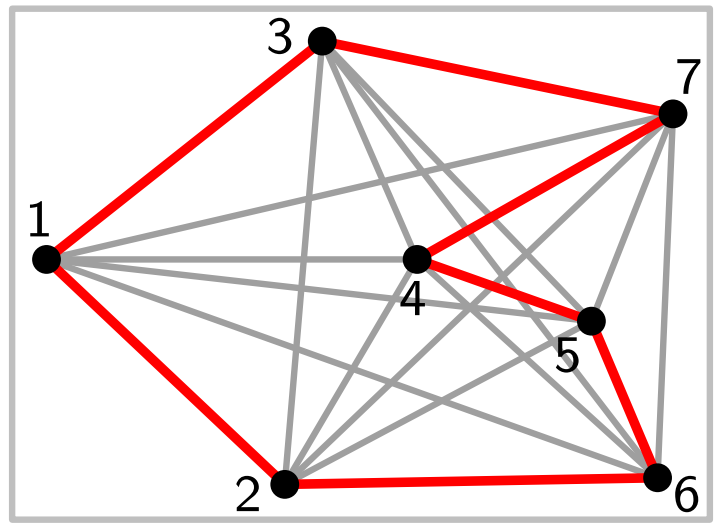
III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

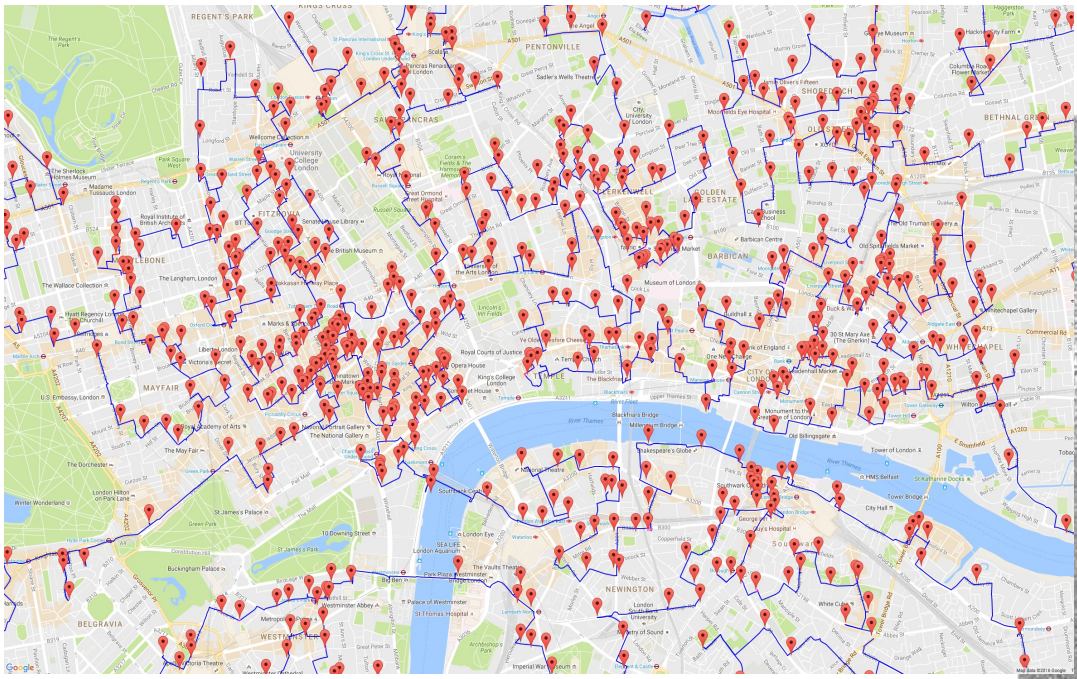
Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$

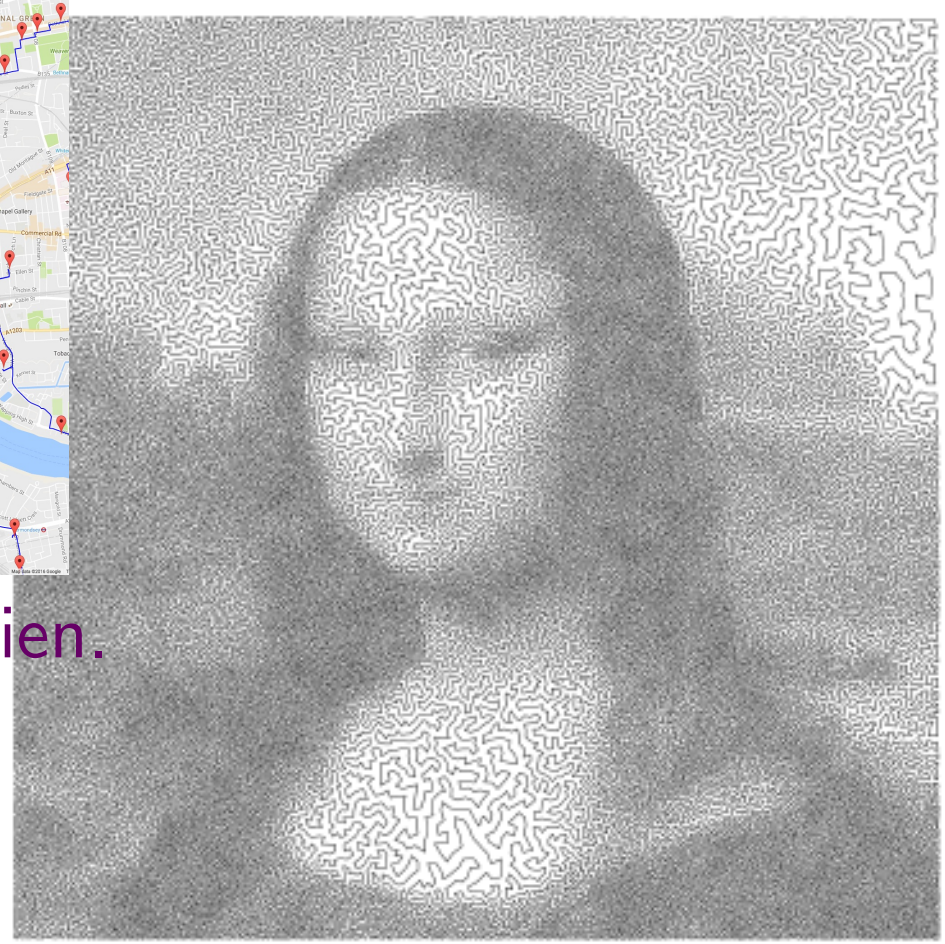


$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

Beispielinstanzen



Alle 24.727 Pubs in Großbritannien.
(45.495 km)



Mona Lisa TSP Challenge.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher: $O(n)$ für aktuelle und bisher beste Permutation.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

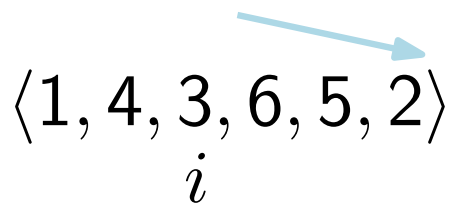
$\langle 1,4,3,6,5,2\rangle$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

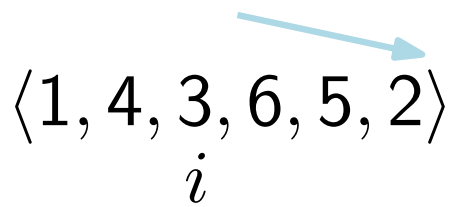


Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).

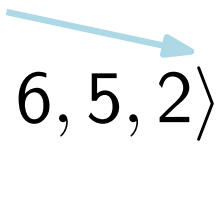


Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.

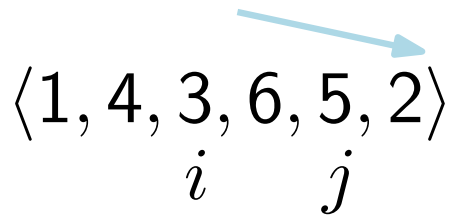


Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.

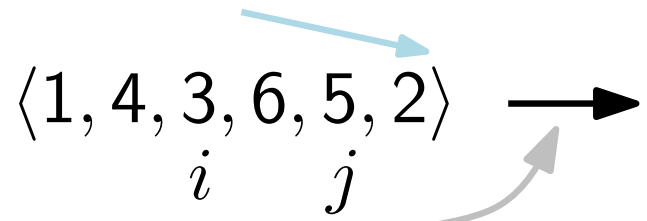
  $\langle 1, 4, \underset{i}{3}, 6, \underset{j}{5}, 2\rangle$
- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



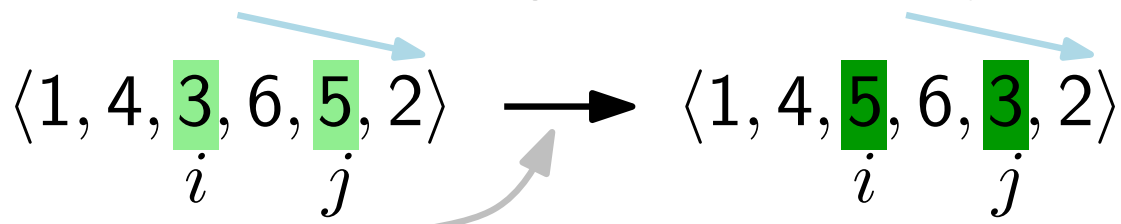
- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



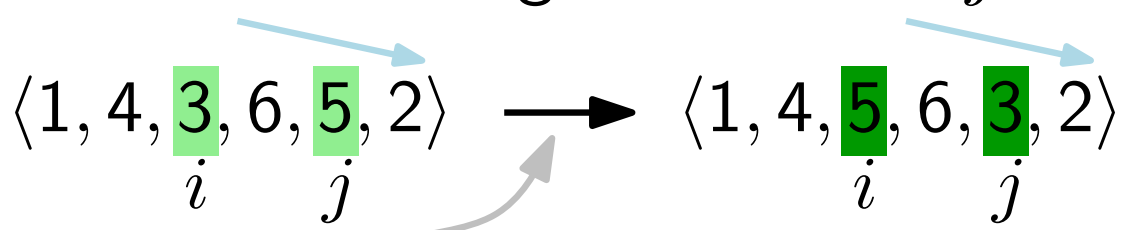
- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



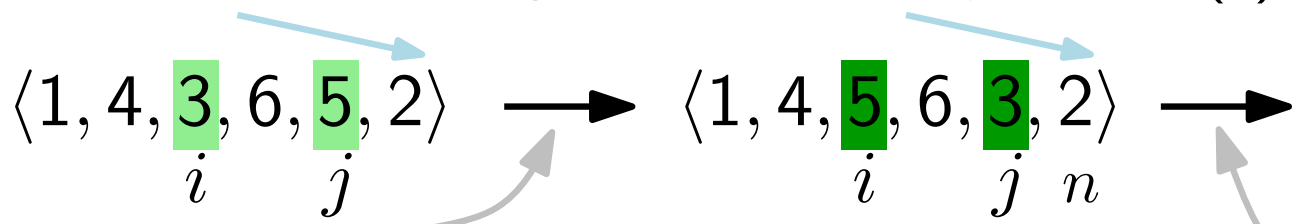
- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \ldots, \sigma(n)\rangle$ um.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



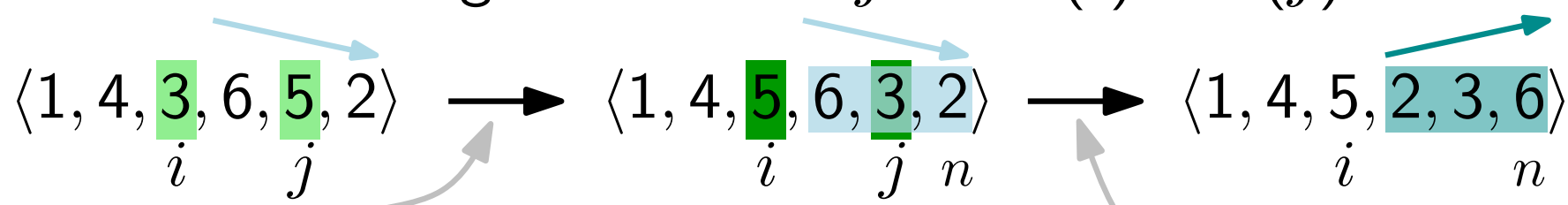
- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \ldots, \sigma(n)\rangle$ um.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \ldots, \sigma(n)\rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq \; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \; \leq$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq \; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \; \leq \; n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq \; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq \; n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2 \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n =$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\square}\right)^{\square}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2 \square\right)^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n =$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n! \in \quad}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Sterlingformel [James Sterling, 1692–1770]

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Sterlingformel [James Sterling, 1692–1770]

Für $n \to \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Sterlingformel [James Sterling, 1692–1770]

Für $n \to \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi}\, \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\, \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an!

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere $T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

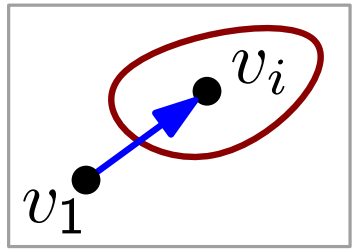
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$T[W, v_i] =$



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

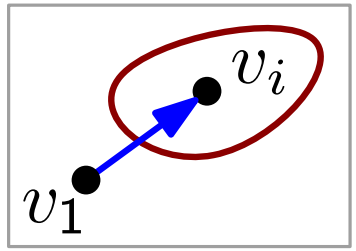
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = \overrightarrow{c(v_1, v_i)}$$



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

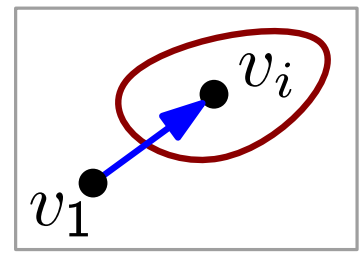
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

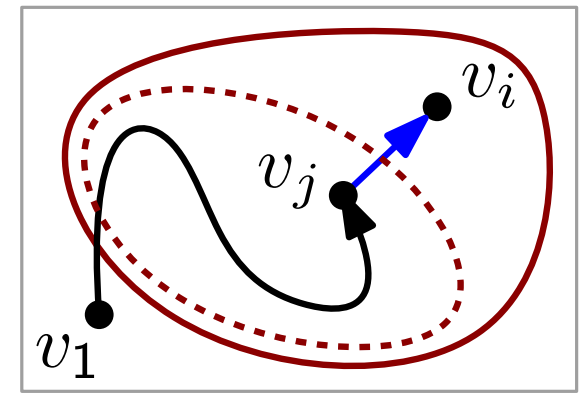
Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$:

$$T[W, v_i] =$$



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

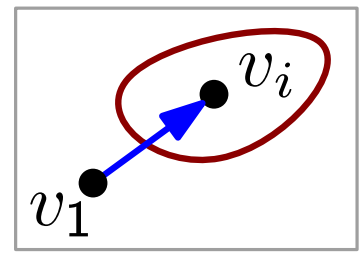
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

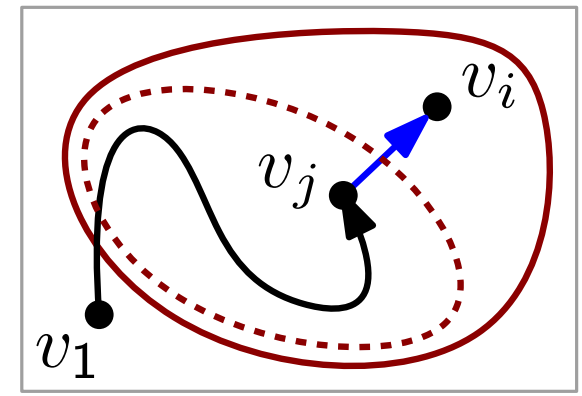
$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}}$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

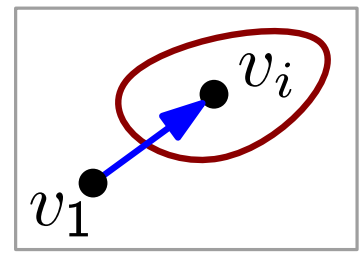
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

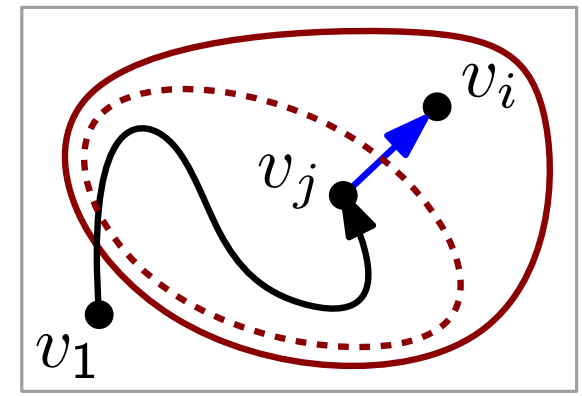
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j]$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

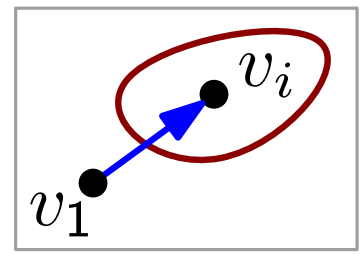
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

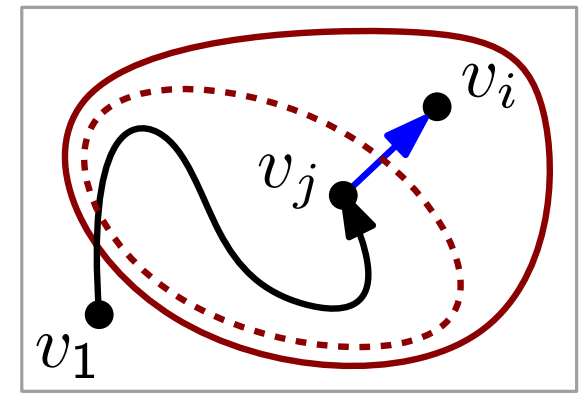
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] +$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

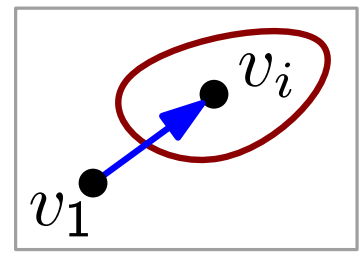
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

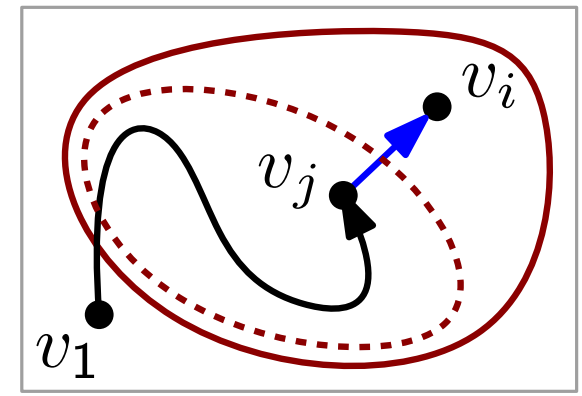
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

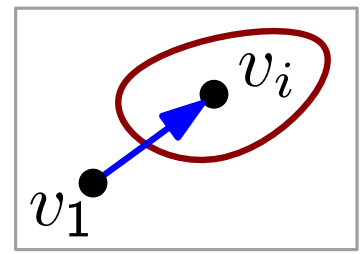
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

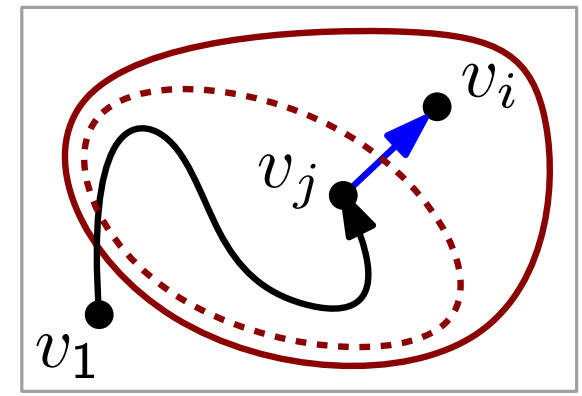
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \left(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i) \right)$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

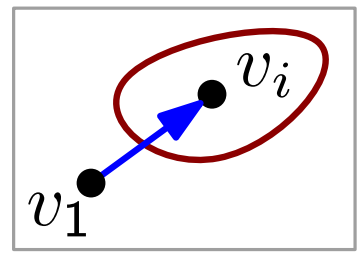
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

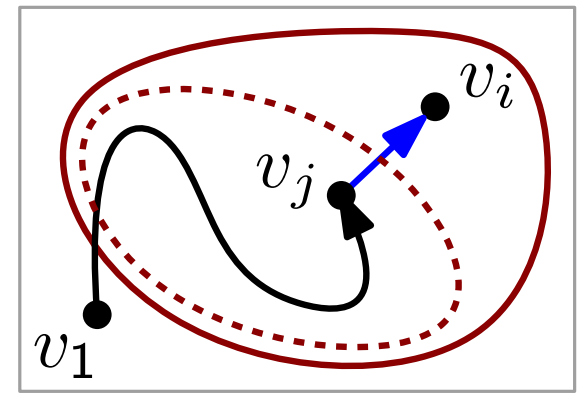
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



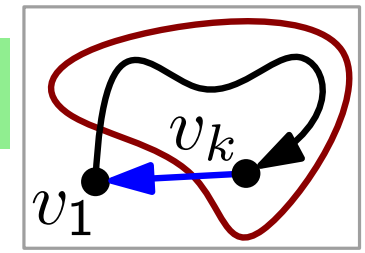


Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \left(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i) \right)$$

$\Rightarrow$ OPT =



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

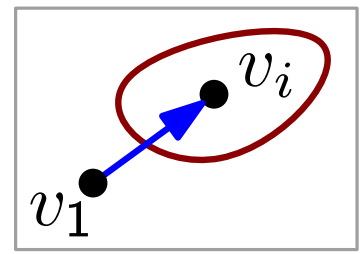
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

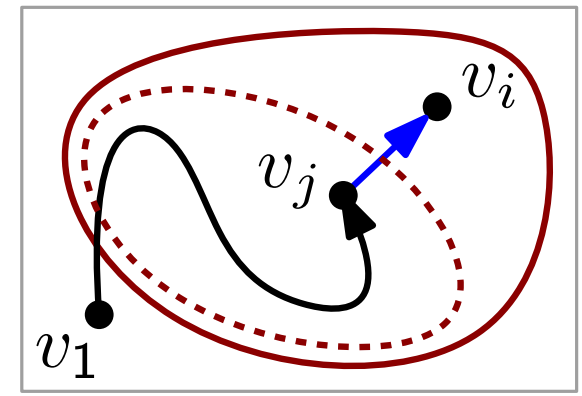
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





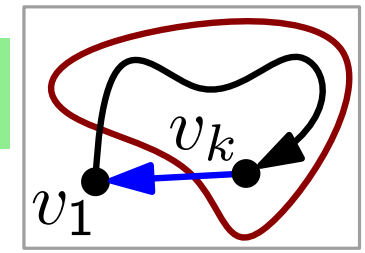
Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \left(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{OPT} = \min_{k \neq 1}$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

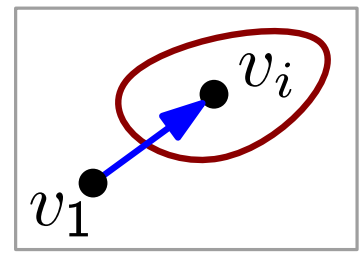
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

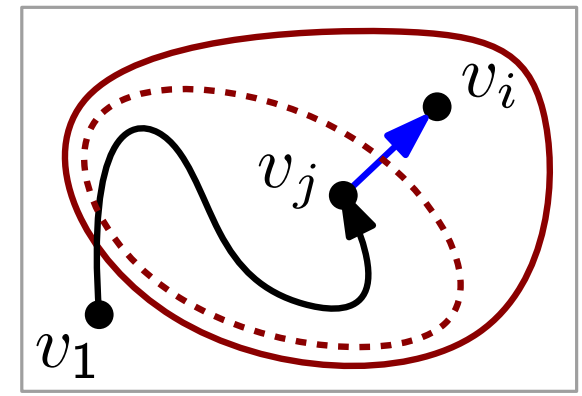
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





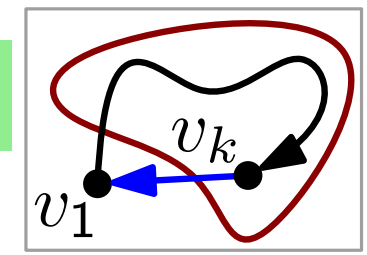
Und für W mit $|W| \geq 2$:

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \left(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i) \right)$$

Letzter Knoten vor v_i

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k]$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

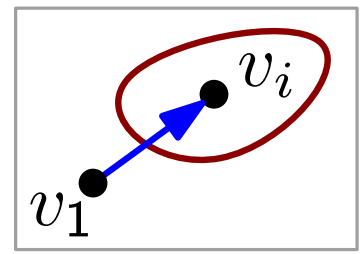
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

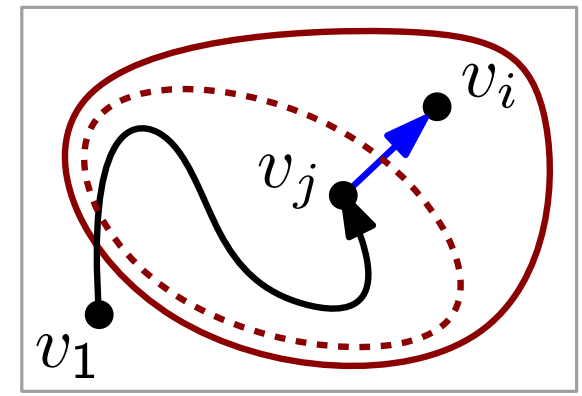
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





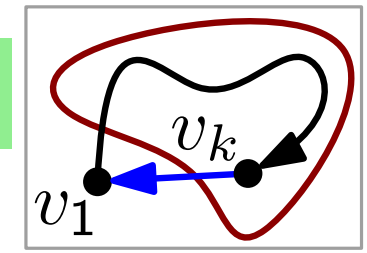
Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \left(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{OPT} = \min_{k \neq 1} T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] +$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

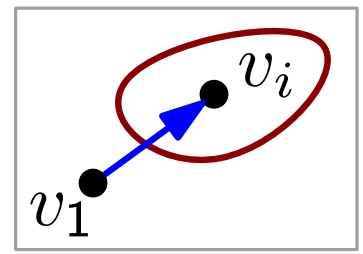
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

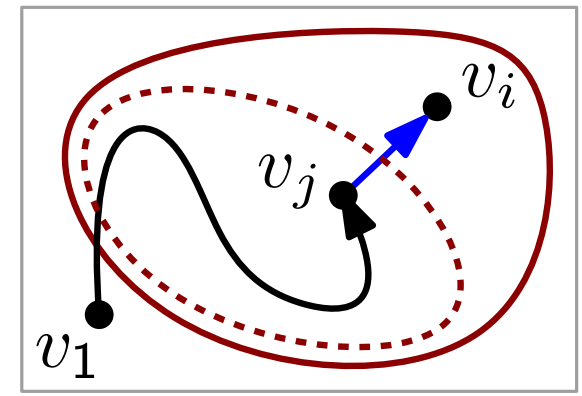
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





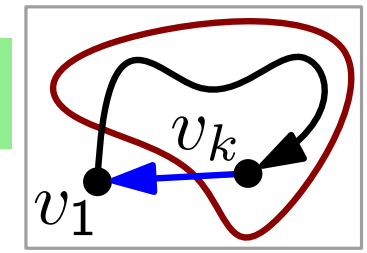
Und für W mit $|W| \geq 2$:

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \left(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i) \right)$$

Letzter Knoten vor v_i

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Lege Tabelle an! Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

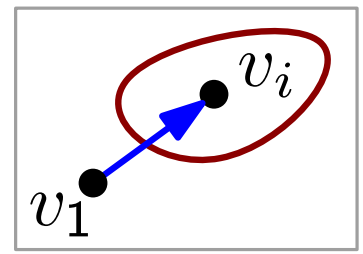
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere

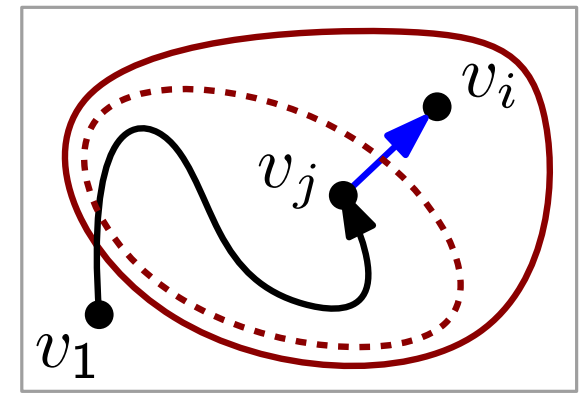
$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs
durch alle Knoten in W.

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$





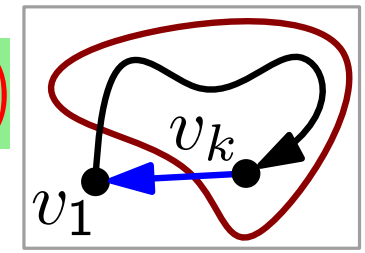
Und für W mit $|W| \geq 2$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \left(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{OPT} = \min_{k \neq 1} \left(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1) \right)$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

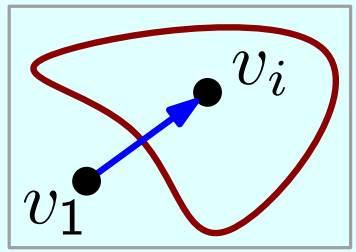
BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**

$\quad T[\{v_i\}, v_i] =$

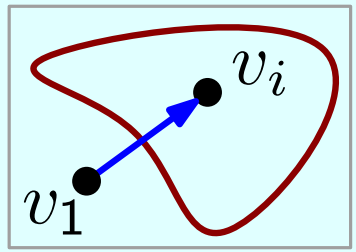


Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**

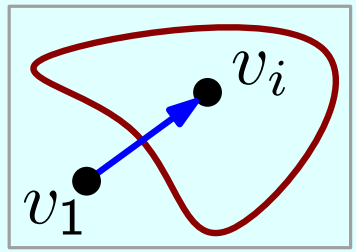
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

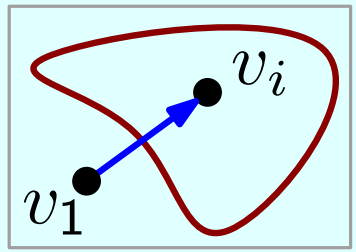


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

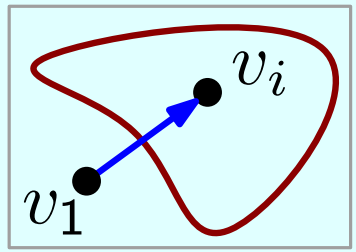


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

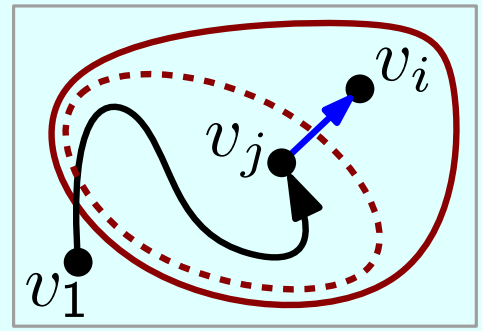
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



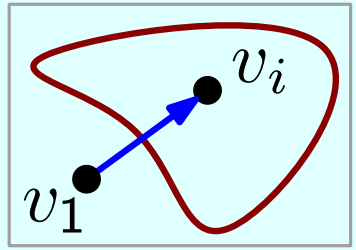
for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] =$



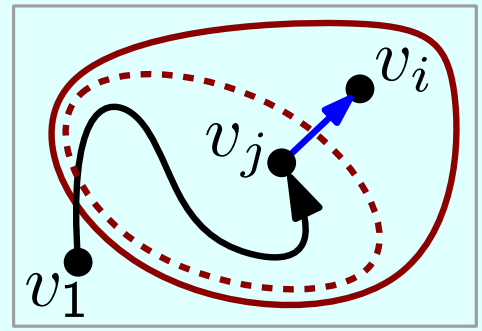
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



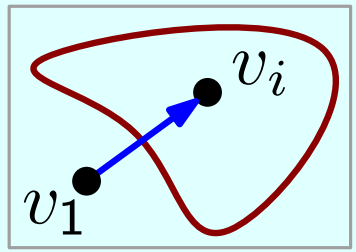
for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



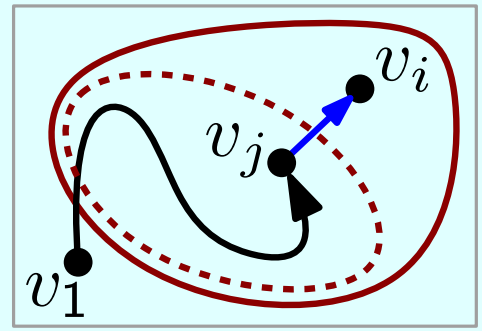
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

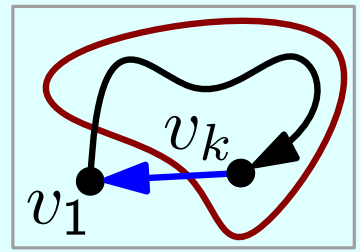
for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



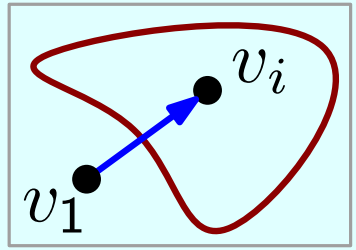
return



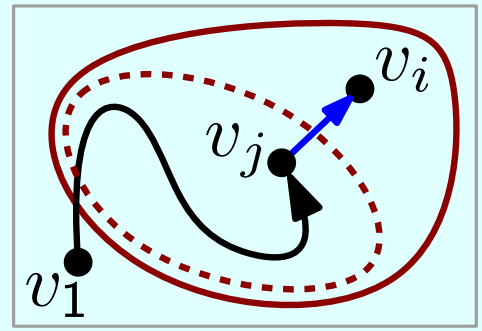
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

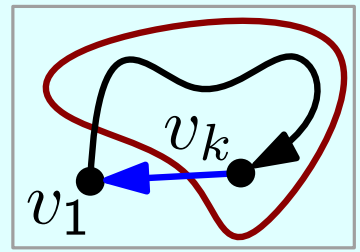
for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



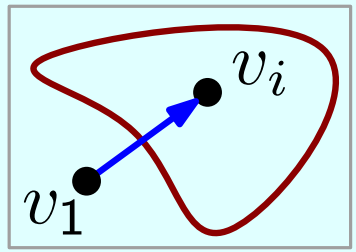
return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$



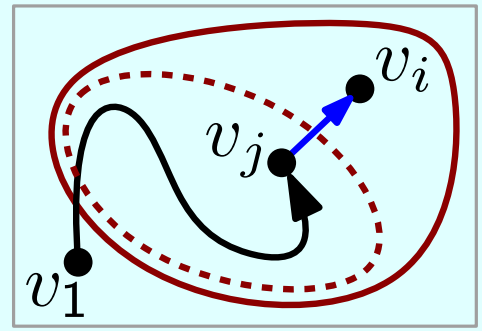
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

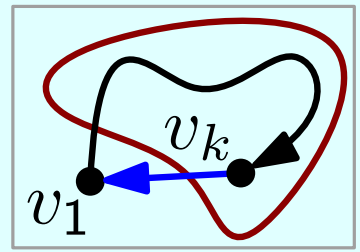
for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$

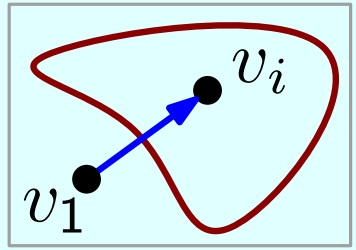


Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$:

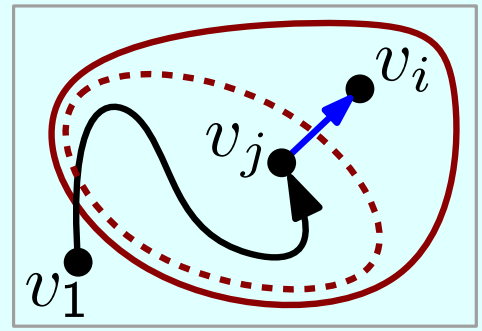
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

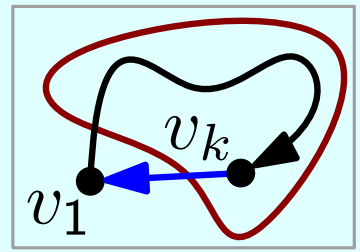
for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$

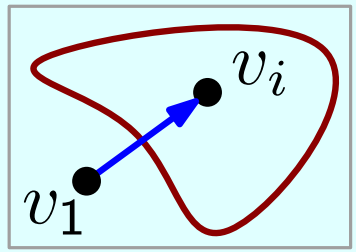


Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

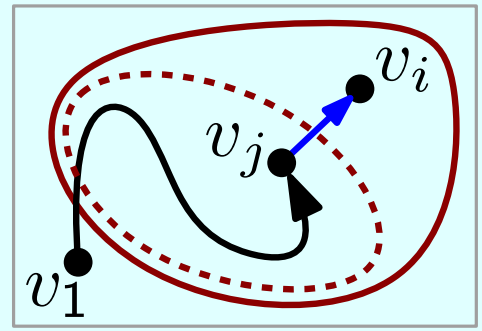
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

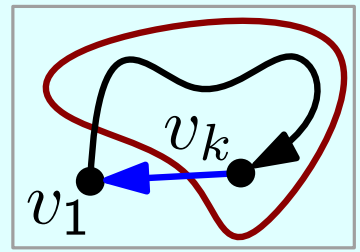
for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$



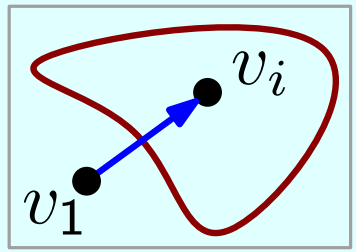
Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's?

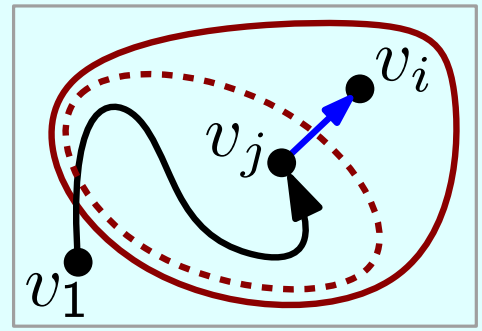
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

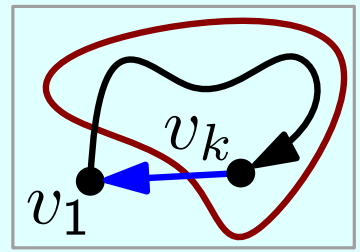
for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$

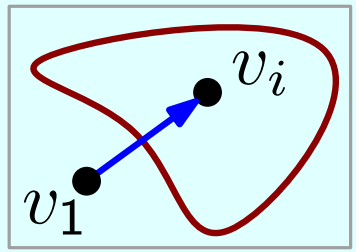


Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

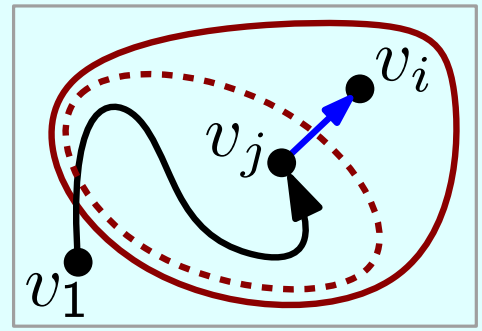
Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

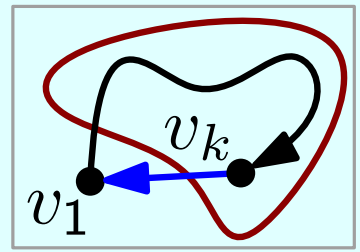


for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$

return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$



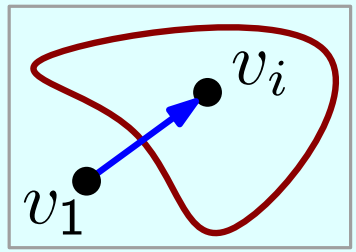
Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

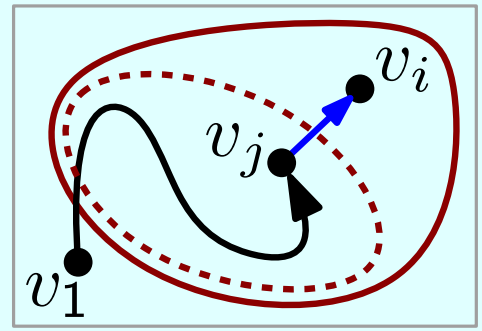
$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O($ $)$

Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

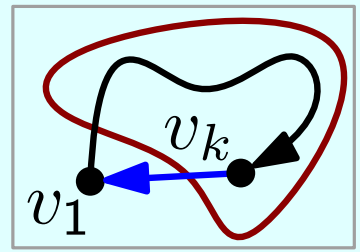


for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$

return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$



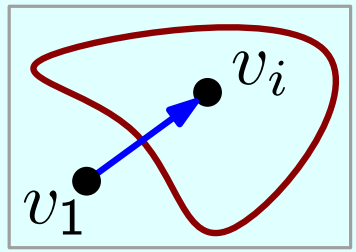
Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

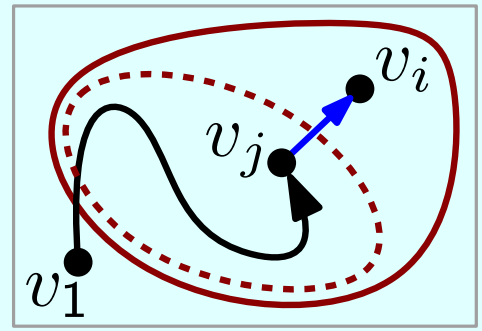
$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O\big(n^2 \cdot 2^n\big)$

Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

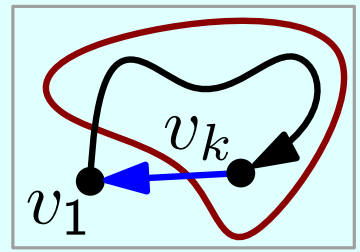


for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$

return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$



Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

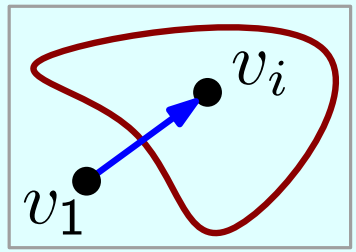
Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O\big(n^2 \cdot 2^n\big)$ **Speicher:**

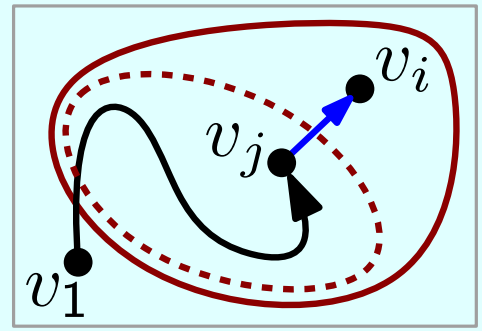
Algorithmus von Bellman & Held-Karp (1962)

BellmanHeldKarp(vollst. Graph G mit Kosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

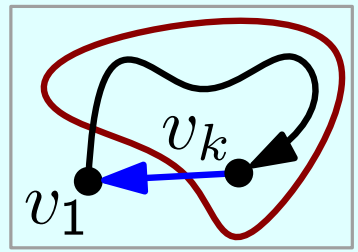
for $i = 2$ **to** $n = |V(G)|$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



for $r = 2$ **to** $n-1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \big(T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)\big)$



return $\min_{k \neq 1} \big(T[V(G) \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)\big)$



Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O\big(n^2 \cdot 2^n\big)$ **Speicher:** $O\big(n \cdot 2^n\big)$

Vergleich

(n = Anzahl der Knoten)

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Vergleich

$(n = \text{Anzahl der Knoten})$

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Vergleich

$(n = \text{Anzahl der Knoten})$

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Vergleich

(n = Anzahl der Knoten)

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

Vergleich

(n = Anzahl der Knoten)

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

Bem. Nederlof hat vor kurzem [STOC 2020] einen randomisierten Algorithmus für *bipartites* TSP vorgeschlagen, der in $O(\text{poly}(n) \cdot 1.9999^n)$ Zeit läuft (falls man Matrizen schnell genug multiplizieren kann).

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

in Polynomialzeit!

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

in Polynomialzeit!

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

in Polynomialzeit!

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

in Polynomialzeit!

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V(H)$

setze $c(uv) = \begin{cases} ? & \text{falls } uv \in E(H), \\ ? & \text{sonst.} \end{cases}$

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

in Polynomialzeit!

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V(H)$

setze $c(uv) = \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| & \text{sonst.} \end{cases}$

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann auch HK.

in Polynomialzeit!

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V(H)$

setze $c(uv) = \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| & \text{sonst.} \end{cases}$

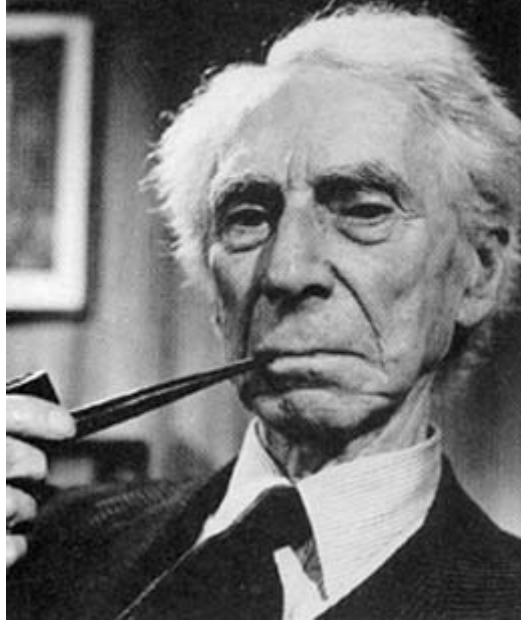
Also: Optimale TSP-Tour kostet $|V(H)| \Leftrightarrow H$ ham.

Was tun?

Was tun?

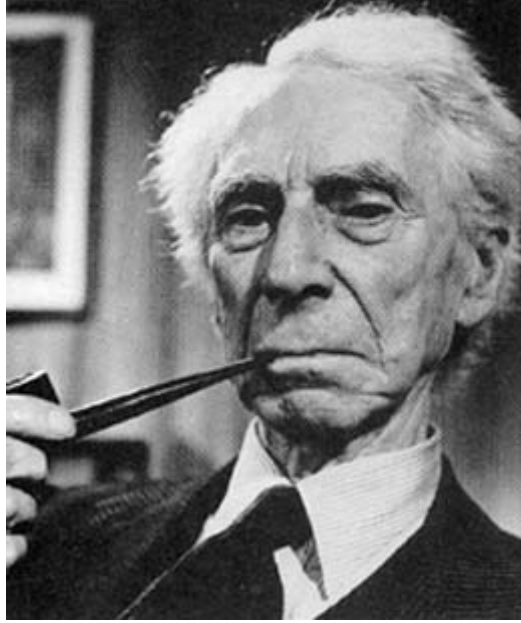
„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Bertrand Russell
(1872–1970)



Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)

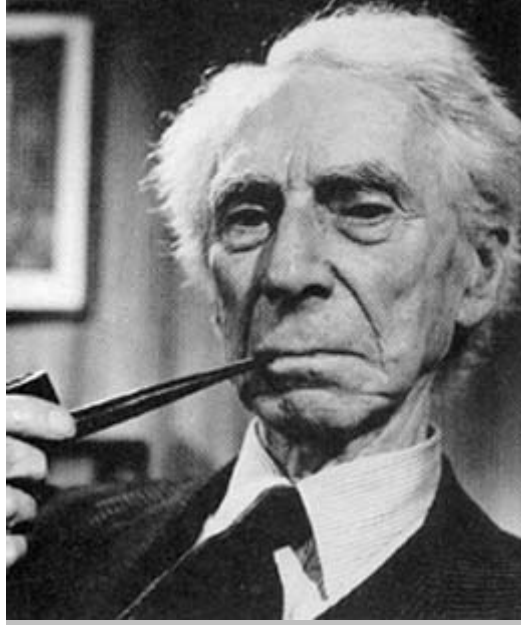


„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



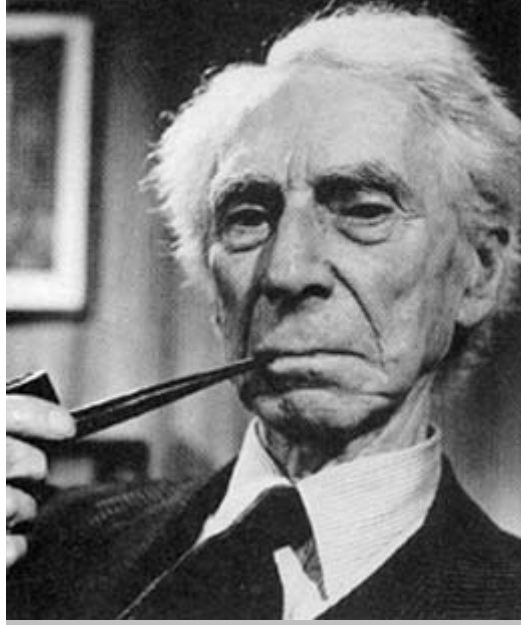
„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

z.B. TSP

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



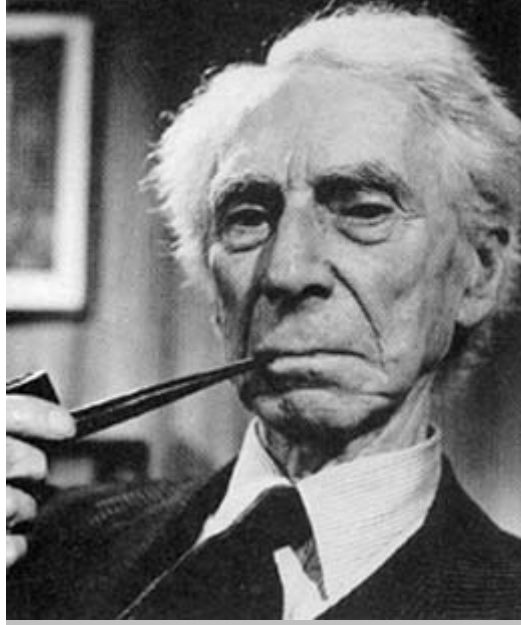
„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.
Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

z.B. TSP

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



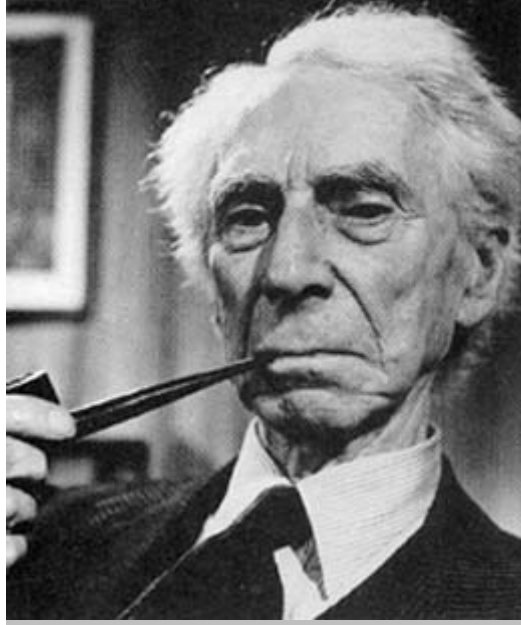
„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.
Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

z.B. TSP
ziel $\equiv c$

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



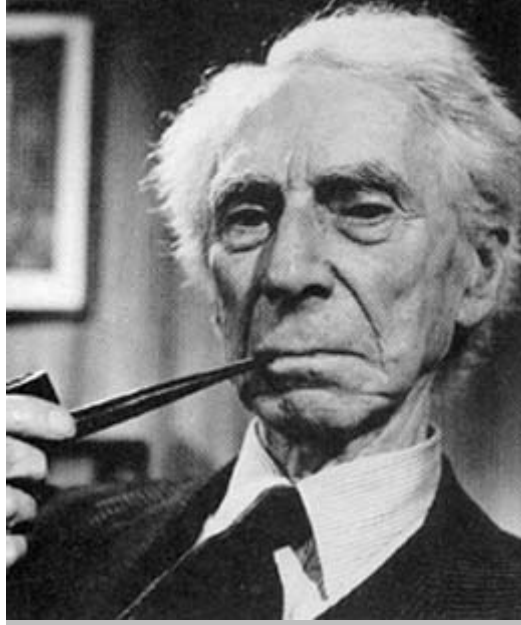
„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.
Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.
Sei γ eine Zahl ≥ 1.

z.B. TSP
ziel $\equiv c$

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

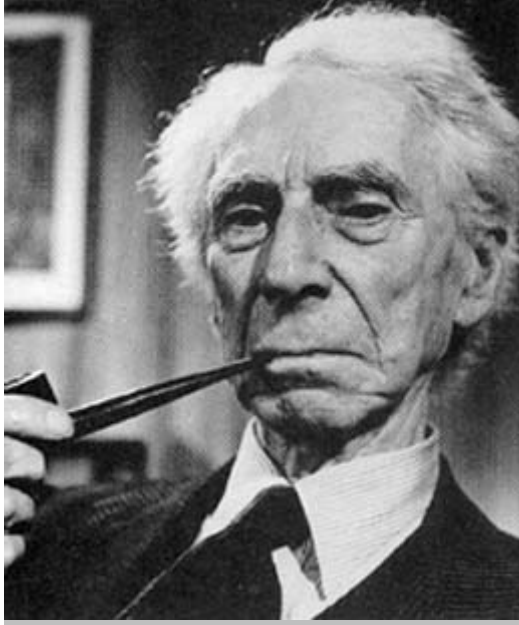
Sei Π ein *Minimierungsproblem*.
Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.
Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

z.B. TSP
ziel $\equiv c$

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

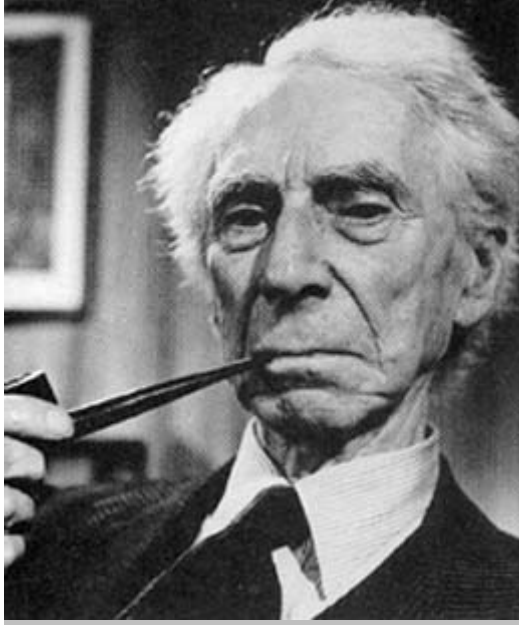
z.B. TSP

ziel $\equiv c$

Was tun?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Bertrand Russell
(1872–1970)



Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

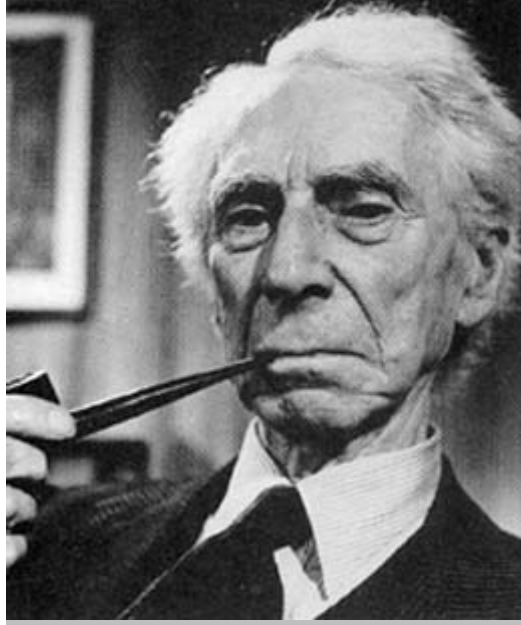
$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

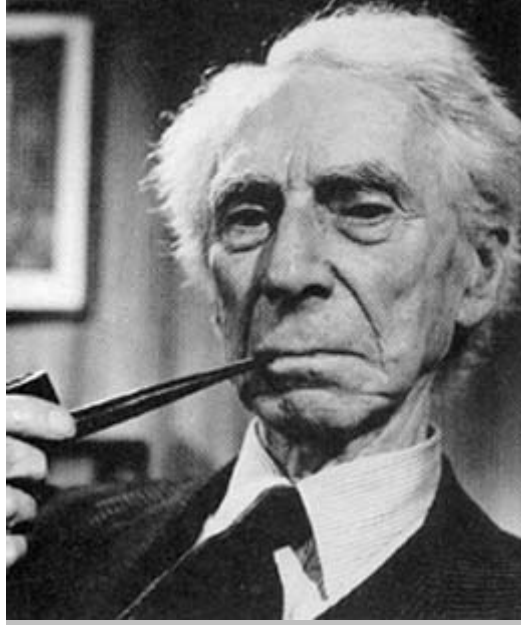
z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

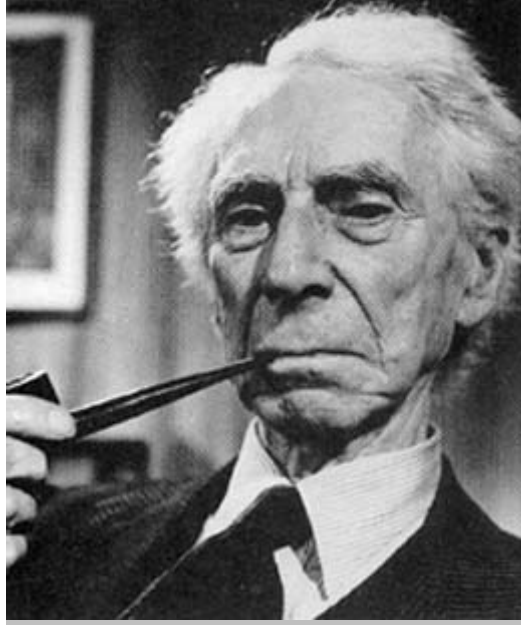
z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

z.B. TSP

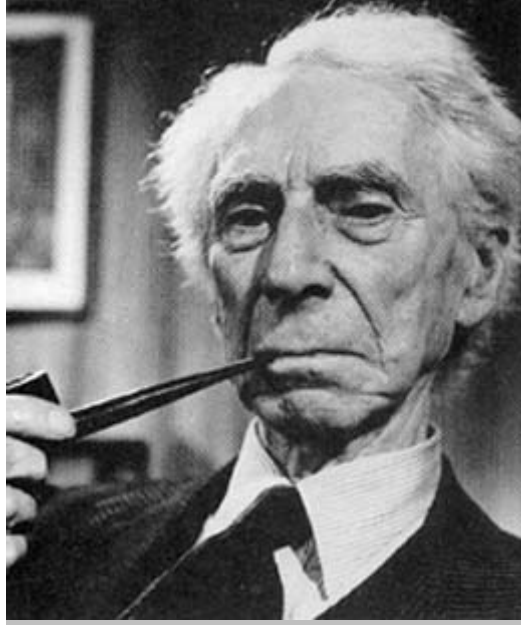
ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

Was tun?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Bertrand Russell
(1872–1970)



Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

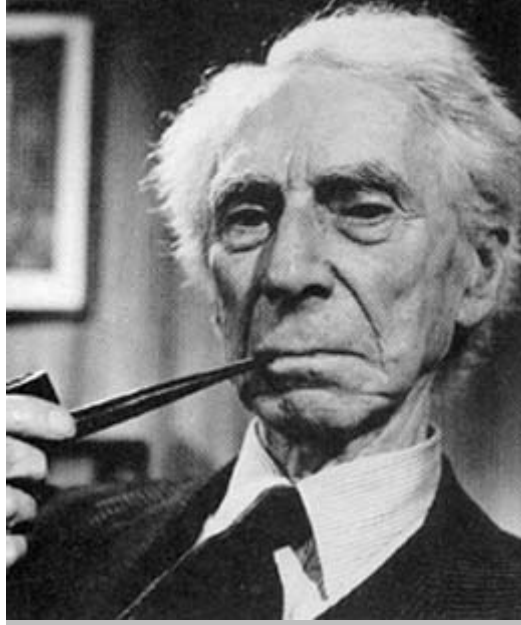
z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

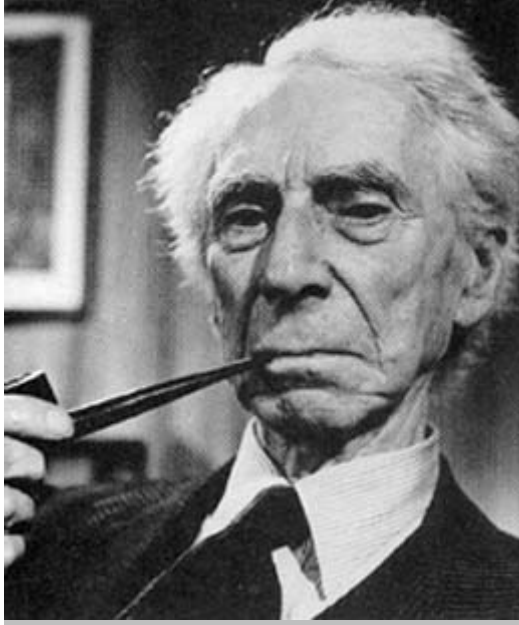
ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

Was tun?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Bertrand Russell
(1872–1970)



Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

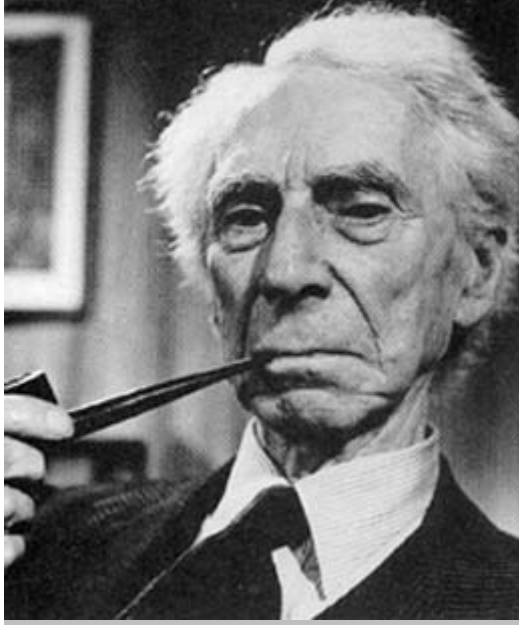
ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

Was tun?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Bertrand Russell
(1872–1970)



Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

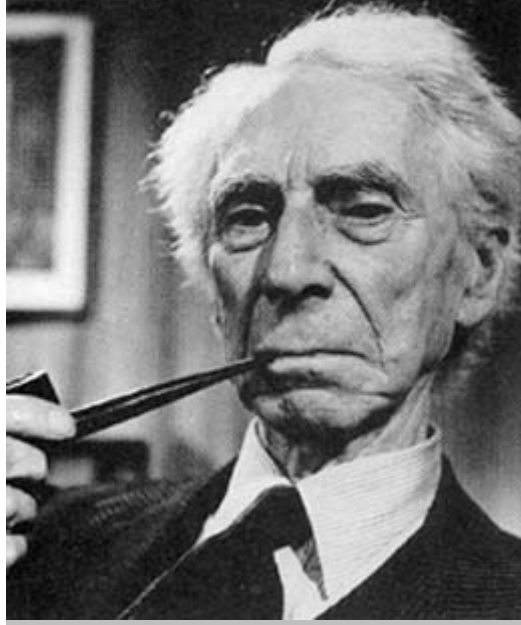
ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

poly($|V(G)|$)

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~*Minimierungsproblem*~~.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

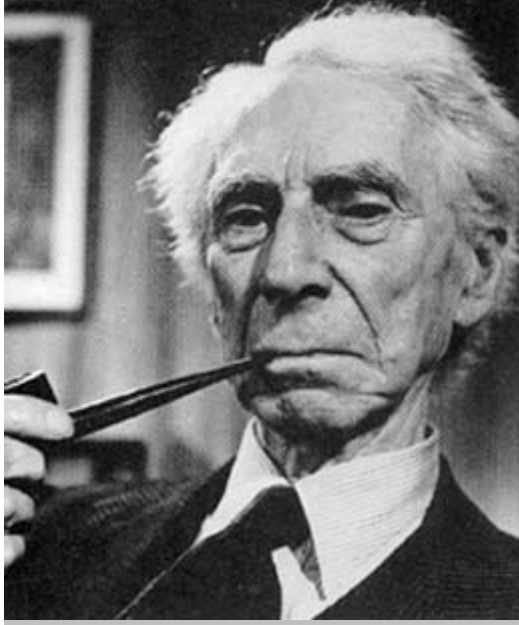
γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

poly($|V(G)|$)

Was tun?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Bertrand Russell
(1872–1970)



Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~*Minimierungsproblem*~~.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

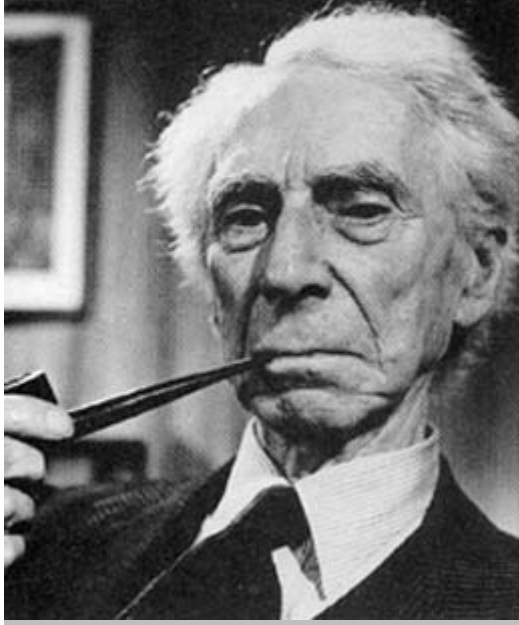
z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ-Approx. für TSP liefert Tour die höchstens γ mal so teuer ist wie billigste Tour.

poly($|V(G)|$)

Was tun?



Bertrand Russell
(1872–1970)

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~*Minimierungsproblem*~~.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

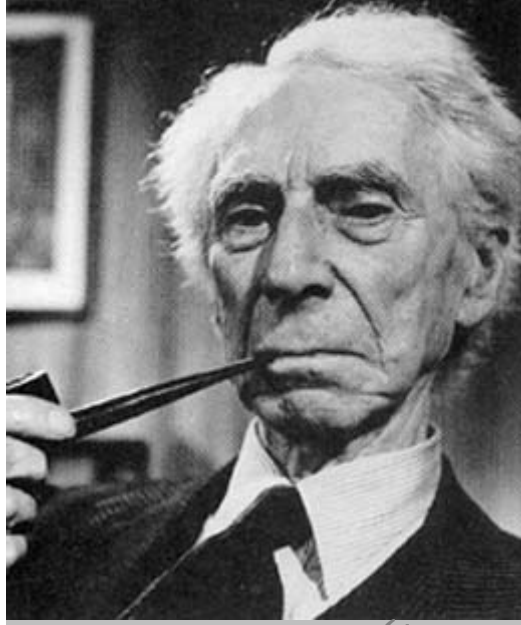
$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

z.B. LSP = {longest simple path

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~*Minimierungsproblem*~~.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

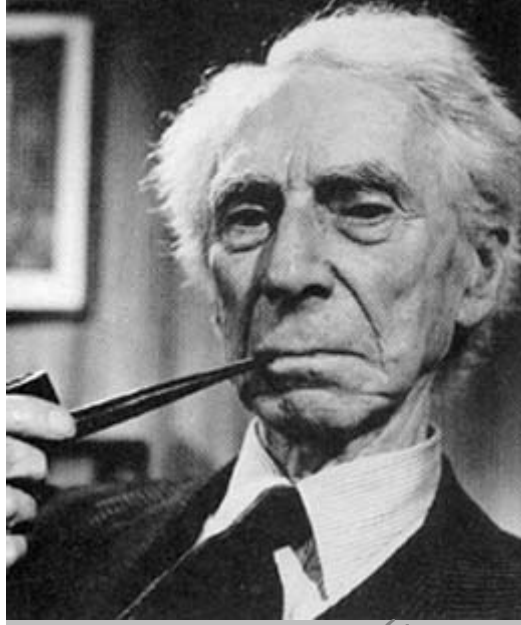
$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~*Minimierungsproblem*~~.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

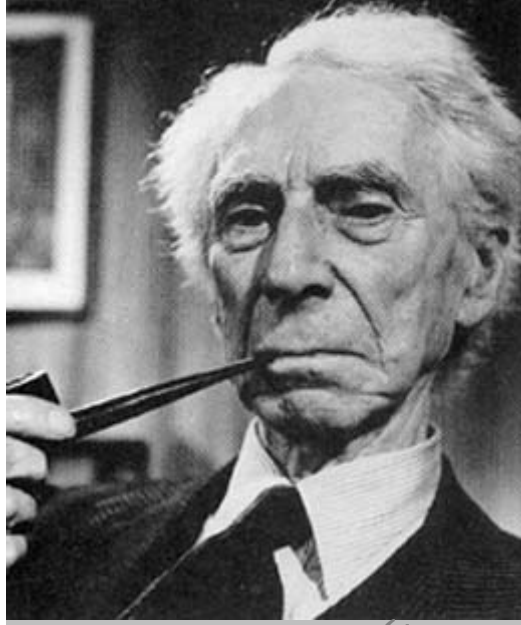
- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. LSP $=$ {longest simple path}

ziel $\equiv$ Länge

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~*Minimierungsproblem*~~.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

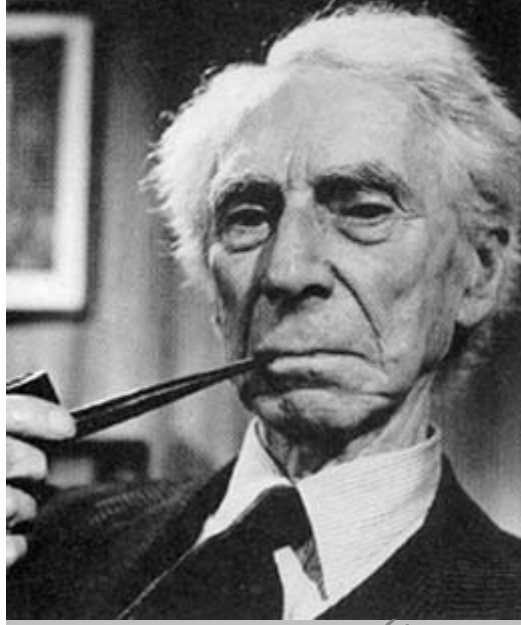
z.B. LSP = { longest simple path

ziel ≡ Länge

γ-Approx. für LSP liefert einfachen Pfad, der *mindestens* γ mal so lang ist wie der längste.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~*Minimierungsproblem*~~.

Sei ziel die *Zielfunktion* von Π: Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\not\geq 1$.

Güte von $\mathcal{A}$

Ein Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt γ-*Approximation*, wenn

- $\mathcal{A}$ für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \not\leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

- die Laufzeit von $\mathcal{A}$ polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. LSP = { longest simple path

ziel $\equiv$ Länge

γ-Approx. für LSP liefert einfachen Pfad, der *mindestens* γ mal so lang ist wie der längste.

poly($|V(G)|$)

Bad News II

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ optimale TSP-Tour kostet $|V(H)| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

Satz. TSP ist NP-schwer zu approximieren!

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ optimale TSP-Tour kostet $|V(H)| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ-Approximation für TSP (außer P=NP).

Satz. TSP ist NP-schwer zu approximieren!

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ optimale TSP-Tour kostet $|V(H)| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ-Approximation für TSP (außer P=NP).

Satz. TSP ist NP-schwer zu approximieren!

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ mit Güte γ approximieren könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ optimale TSP-Tour kostet $|V(H)| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ-Approximation für TSP (außer P=NP).

Satz. TSP ist NP-schwer zu approximieren!

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ mit Güte γ approximieren könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| \cdot \gamma & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ optimale TSP-Tour kostet $|V(H)| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ-Approximation für TSP (außer P=NP).

Satz. TSP ist NP-schwer zu approximieren!

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ mit Güte γ approximieren könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph H.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c, so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow$ H hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V(H), \binom{V(H)}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E(H), \\ 1 + |V(H)| \cdot \gamma & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ~~optimale~~ TSP-Tour kostet $\overbrace{\leq \gamma \cdot |V(H)|}^{\text{mit Güte } \gamma} \Leftrightarrow H$ ham.

Was tun?

Problem: *Traveling Salesman Problem*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten c: $E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

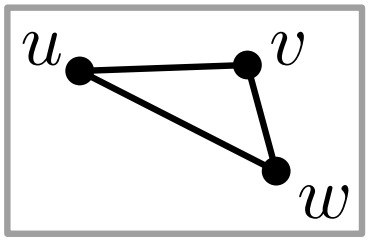
Problem: *Traveling Salesman Problem*

Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten c: $E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Traveling Salesman Problem*

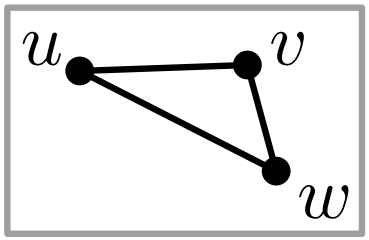


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

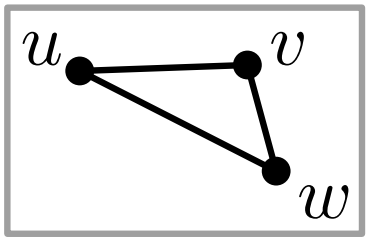


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*



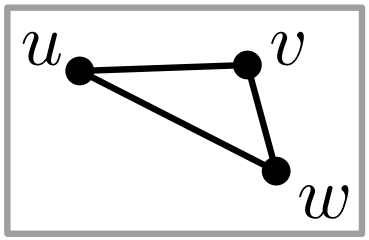
Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

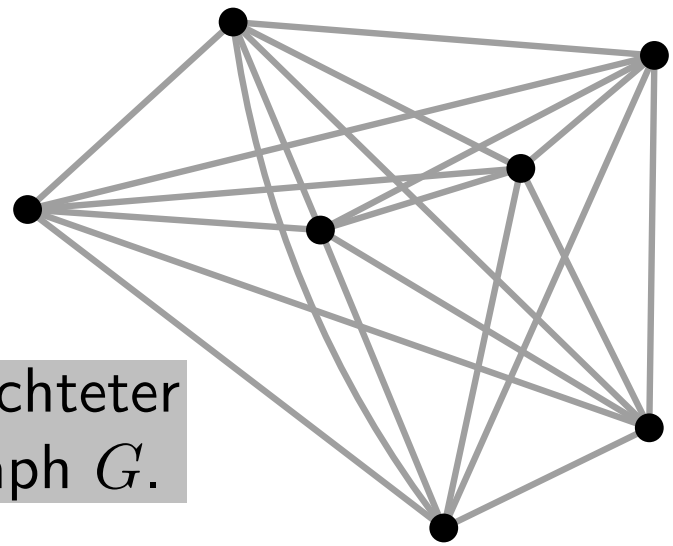


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

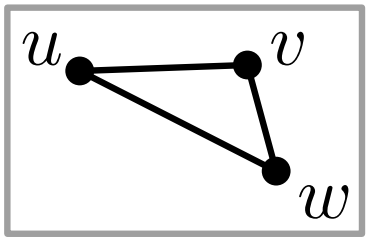
Beweis.



Geg. gewichteter vollst. Graph G.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

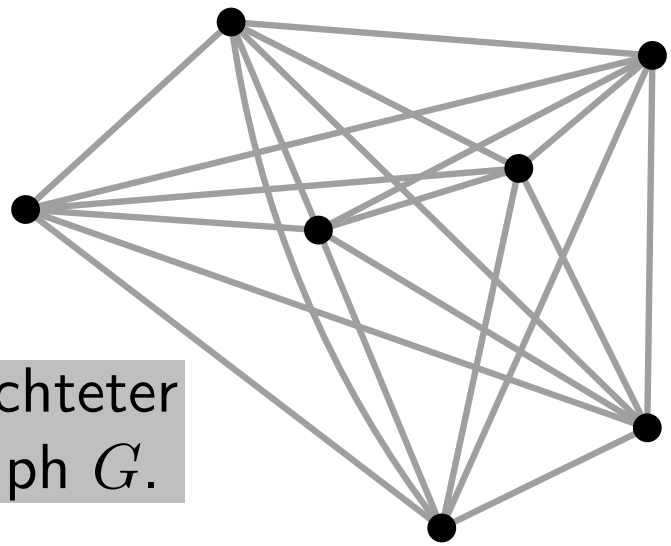


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



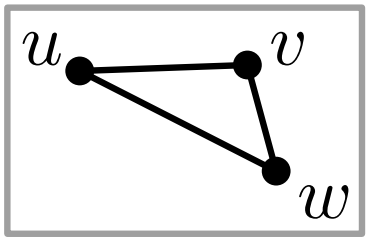
Geg. gewichteter vollst. Graph G.

Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

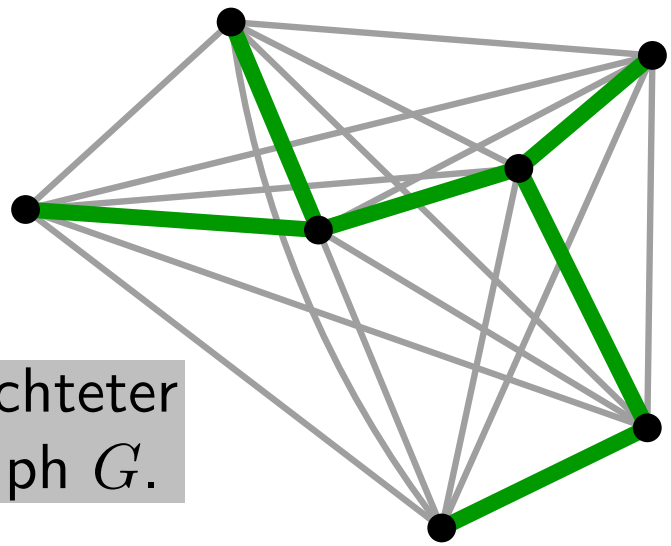


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



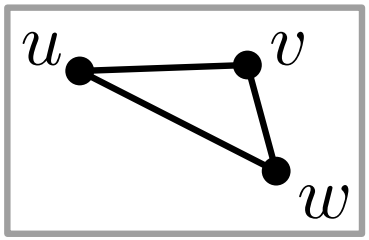
Geg. gewichteter vollst. Graph G.

Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

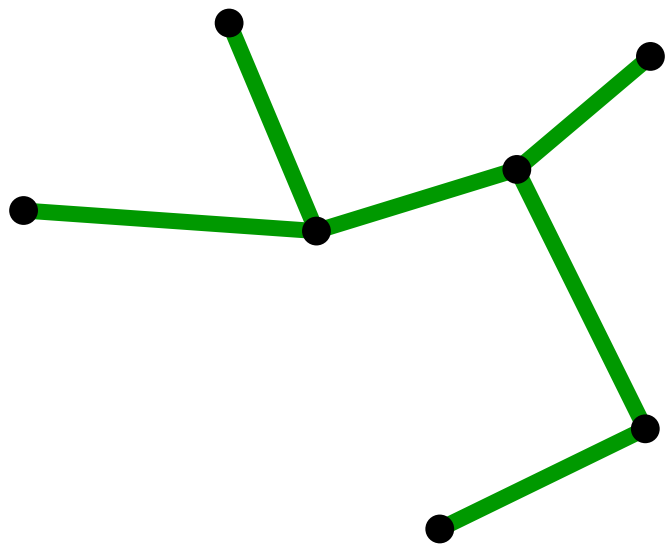


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

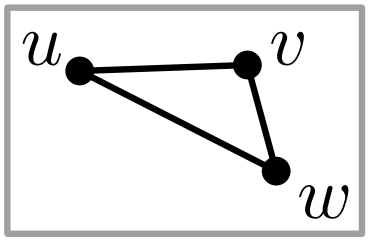


Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

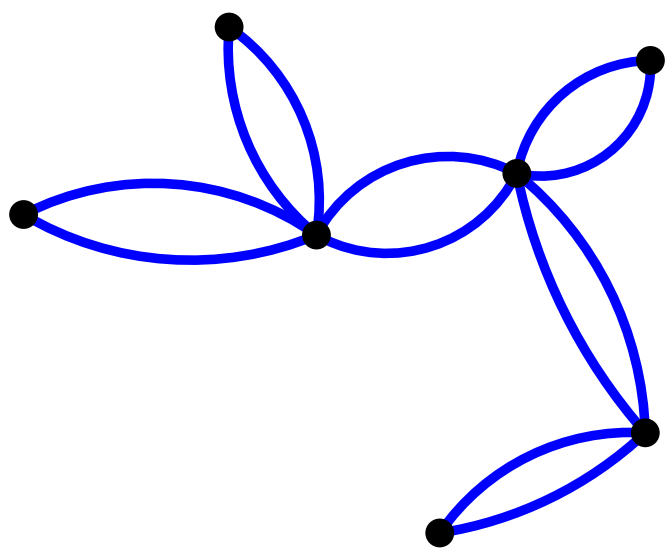


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



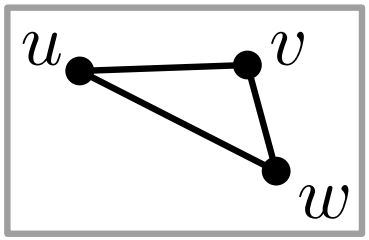
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

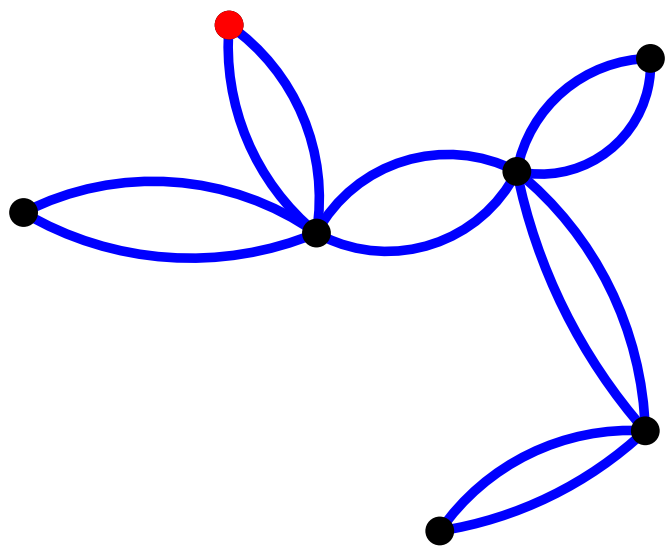


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

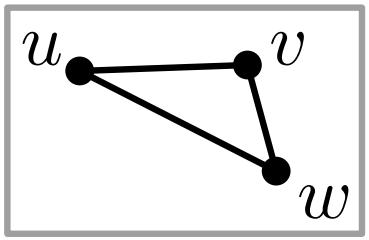
Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

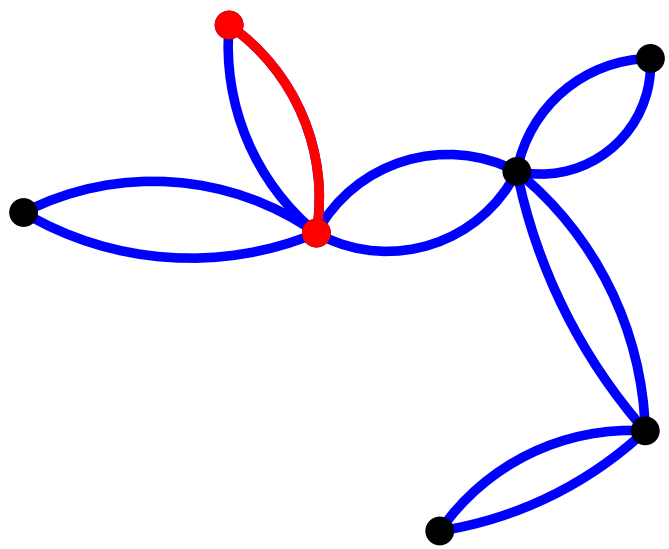


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

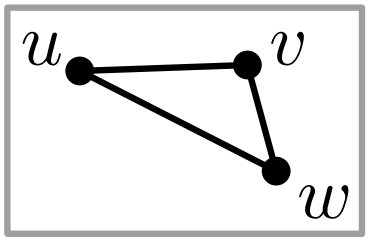
Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

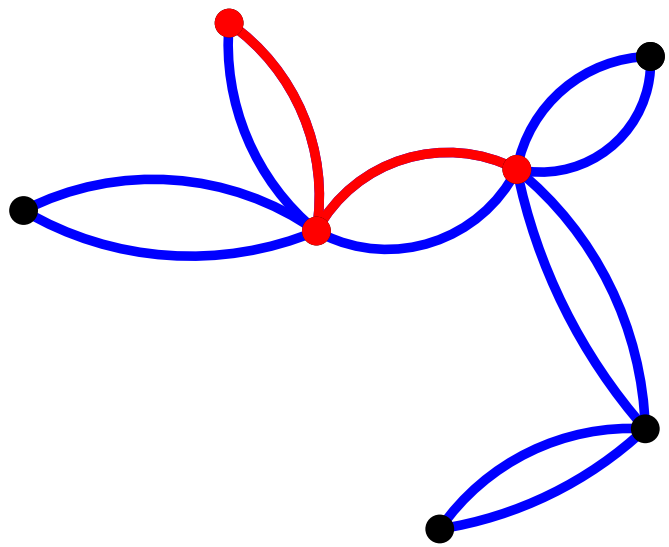


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

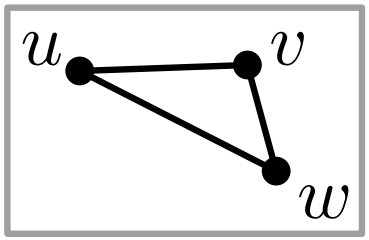
Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

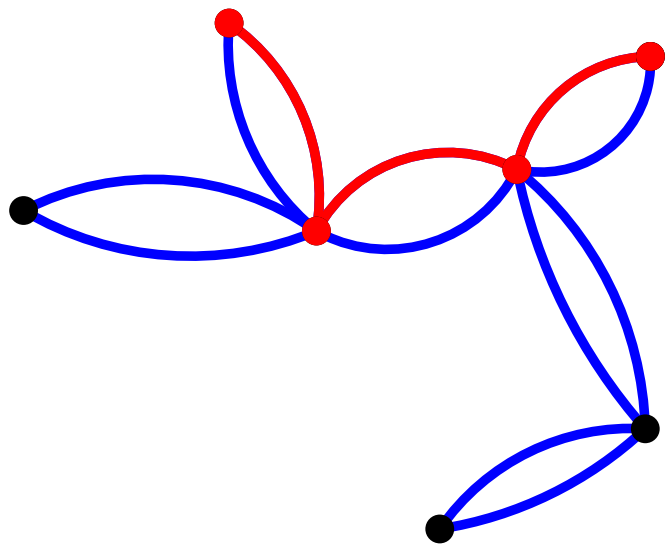


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

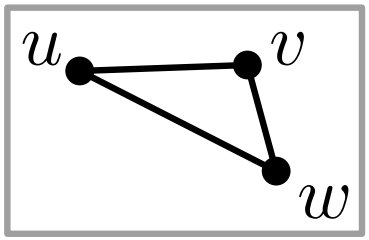
Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

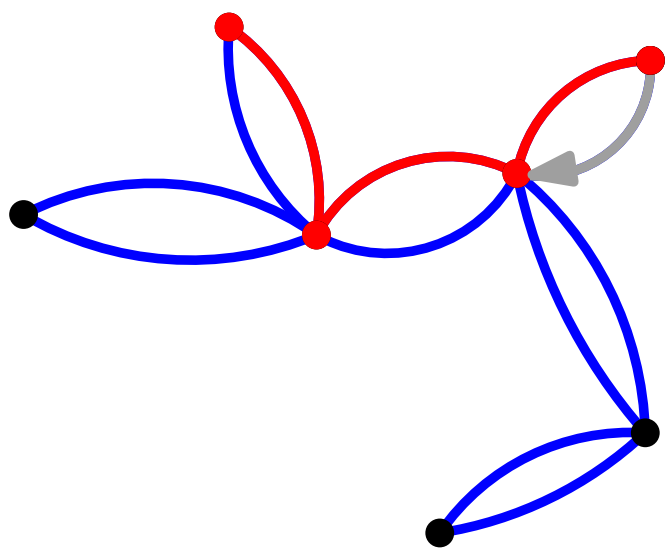


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

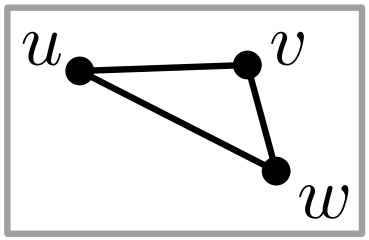
Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

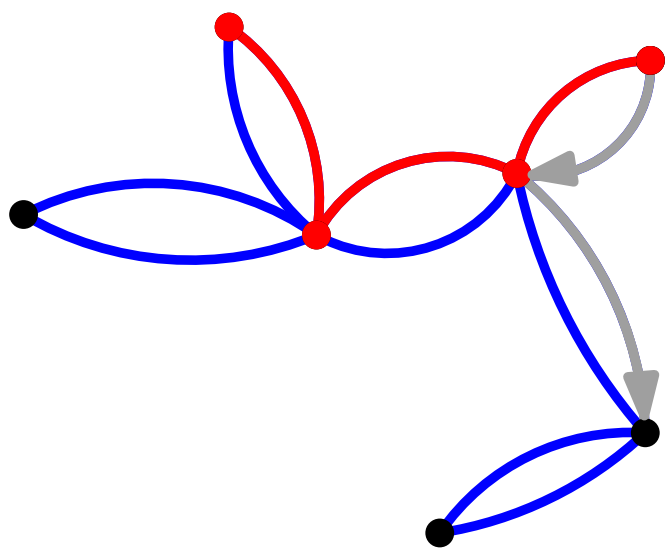


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

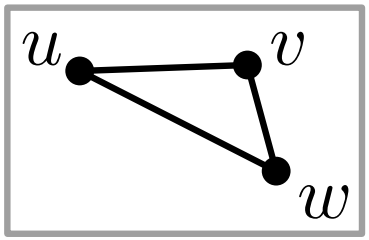
Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

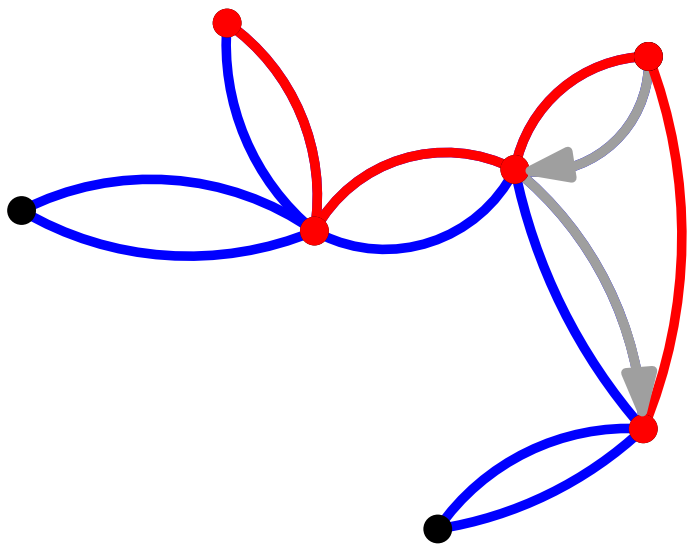


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

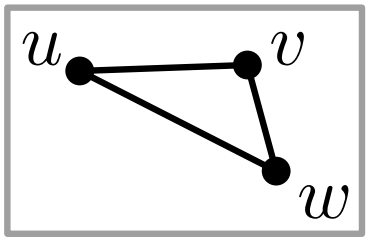
Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

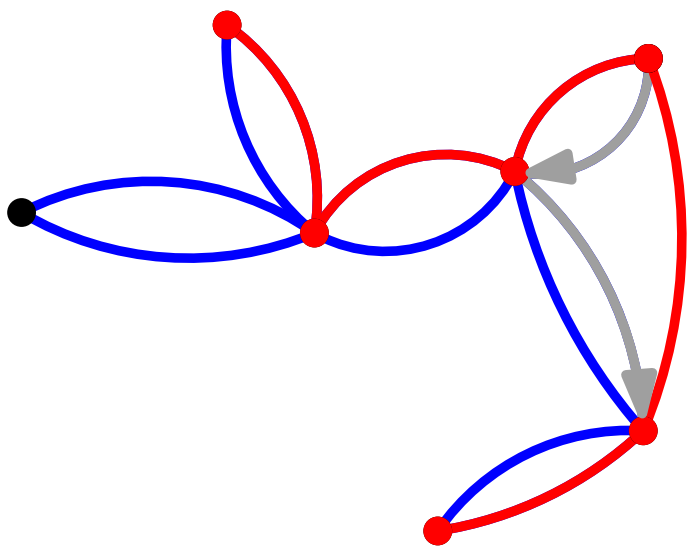


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

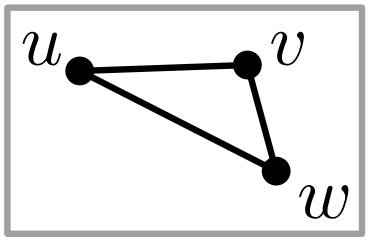
Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

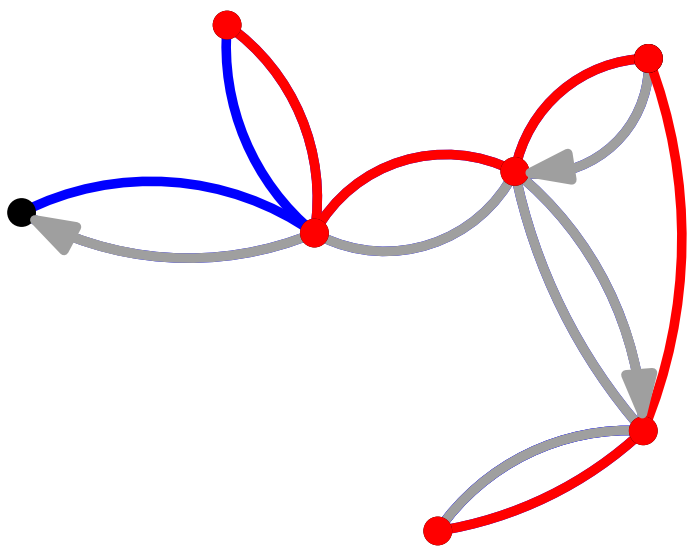


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

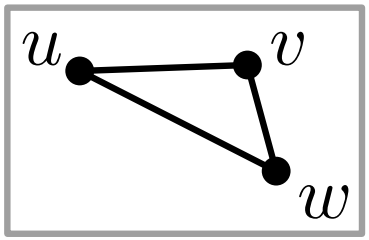
Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

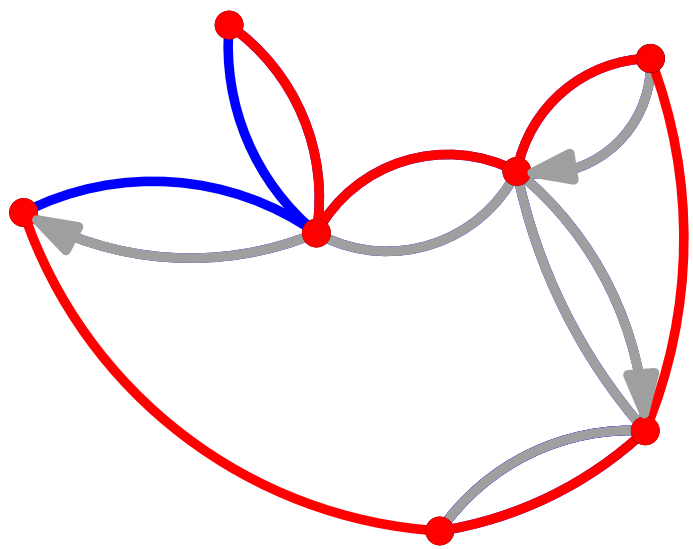


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

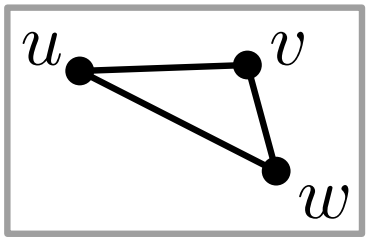
Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

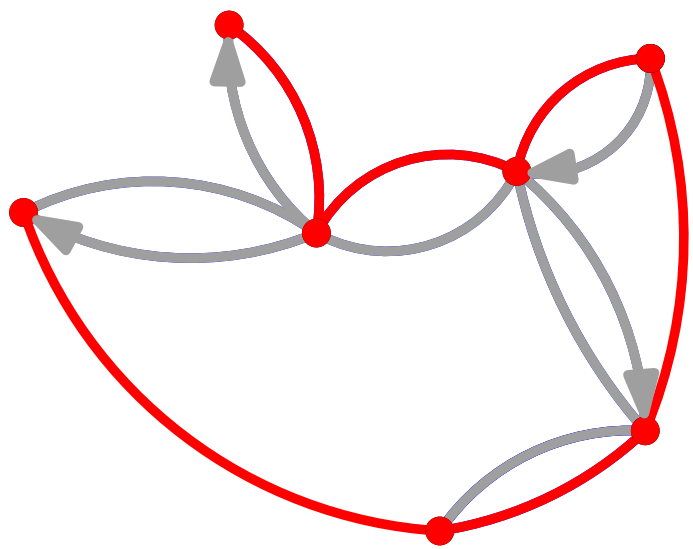


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

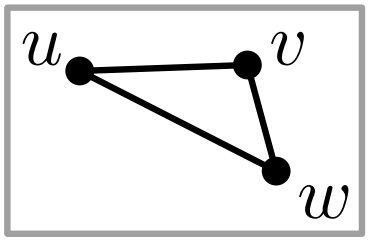
Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* *(Δ-TSP)*

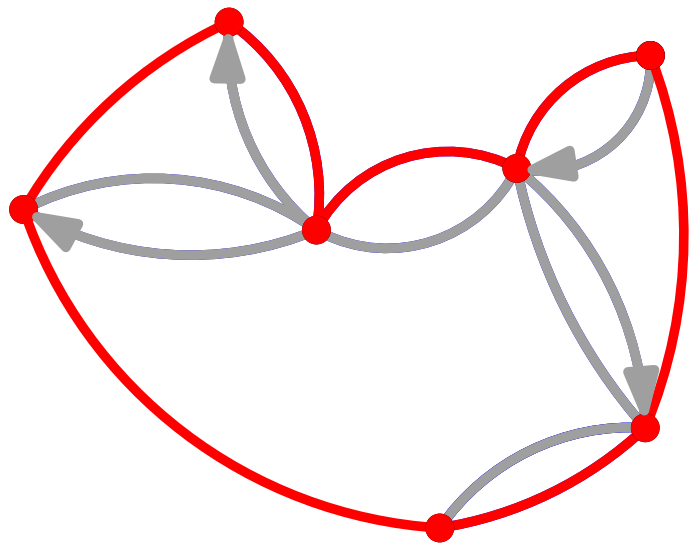


Gegeben: ungerichteter, vollständiger Graph G
mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB ⇒ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

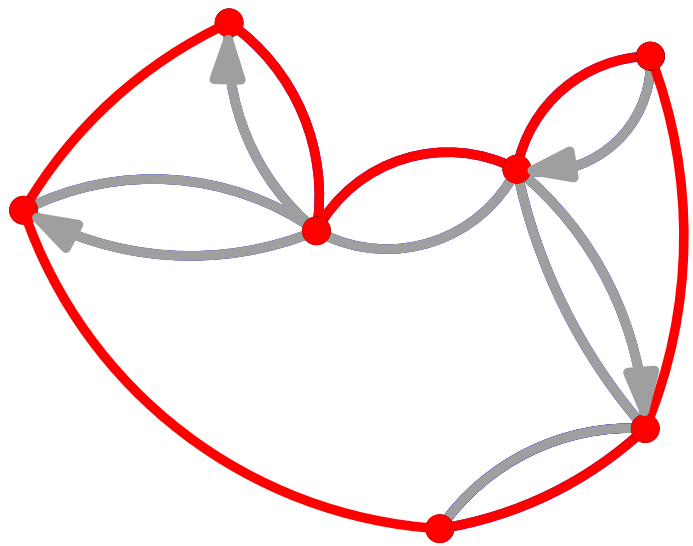
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

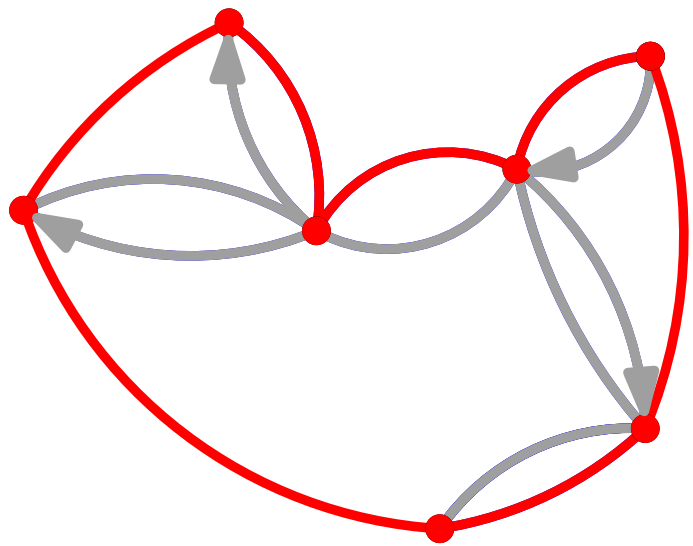
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

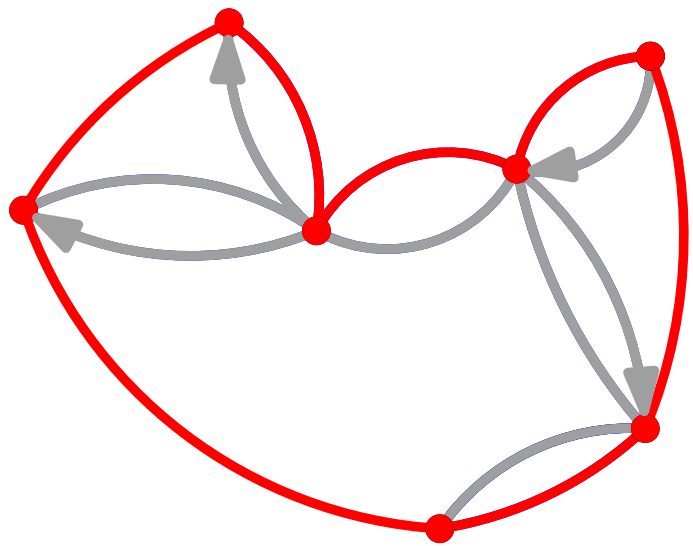
Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

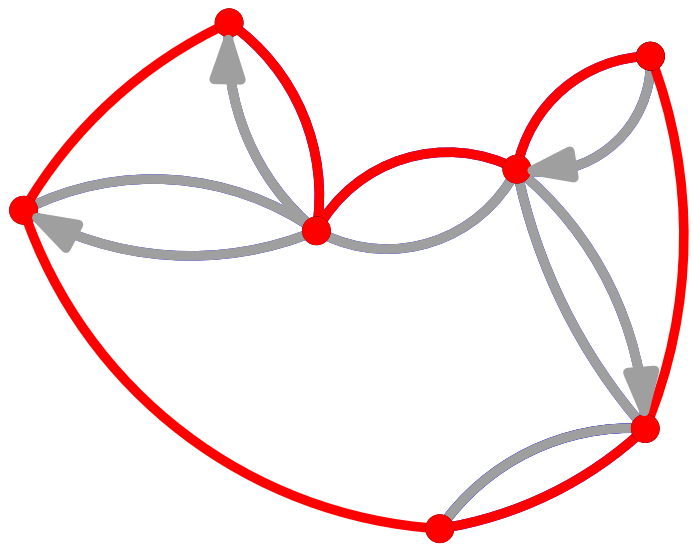
2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq$

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

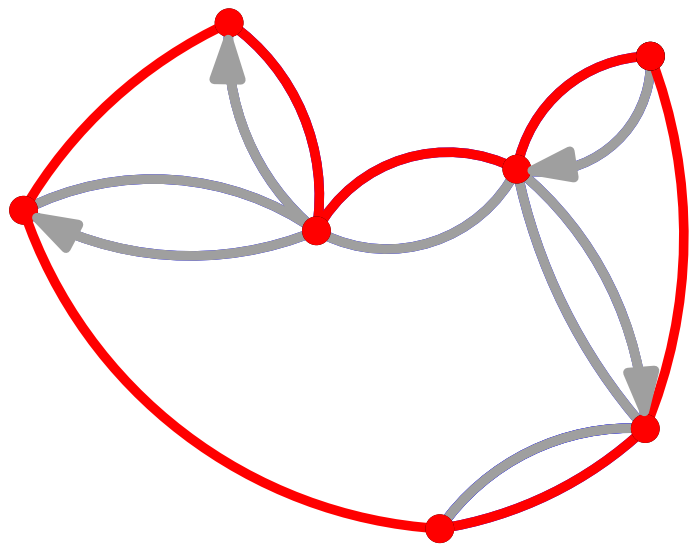
$c(\text{ALG}) \leq$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

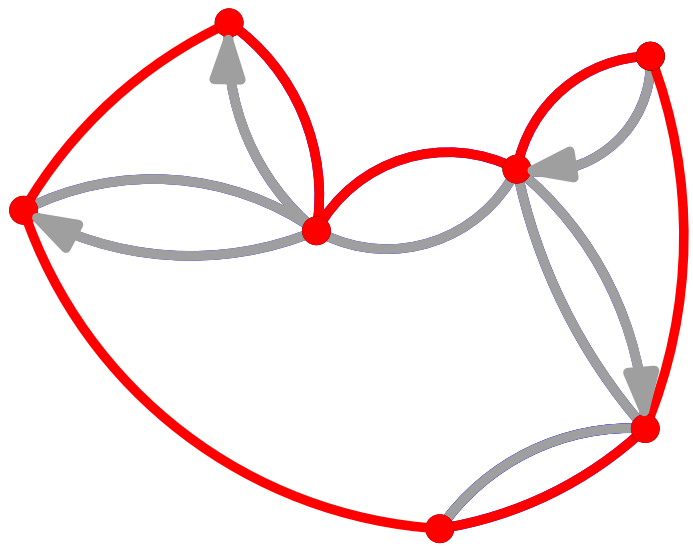
$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) =$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

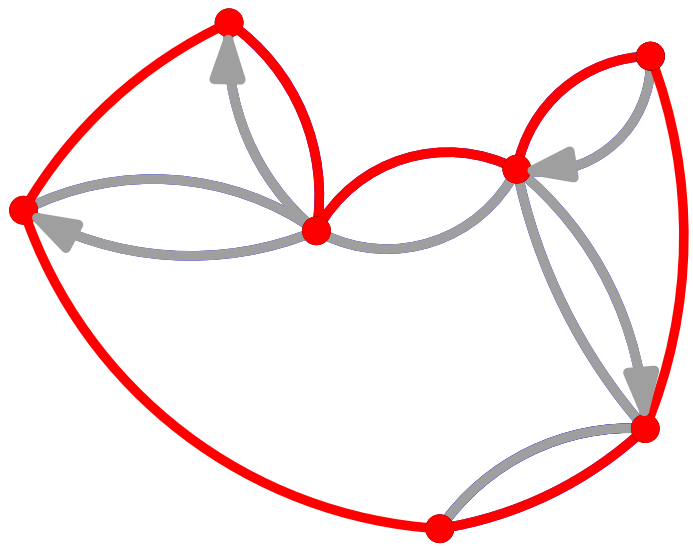
$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

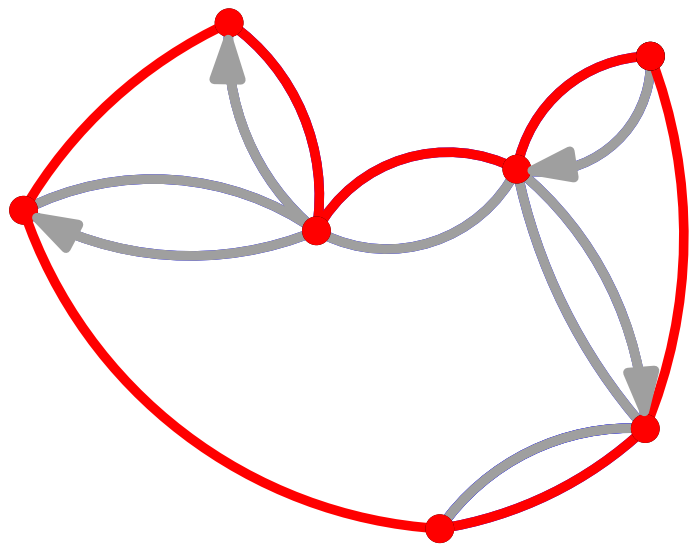
$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \square$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

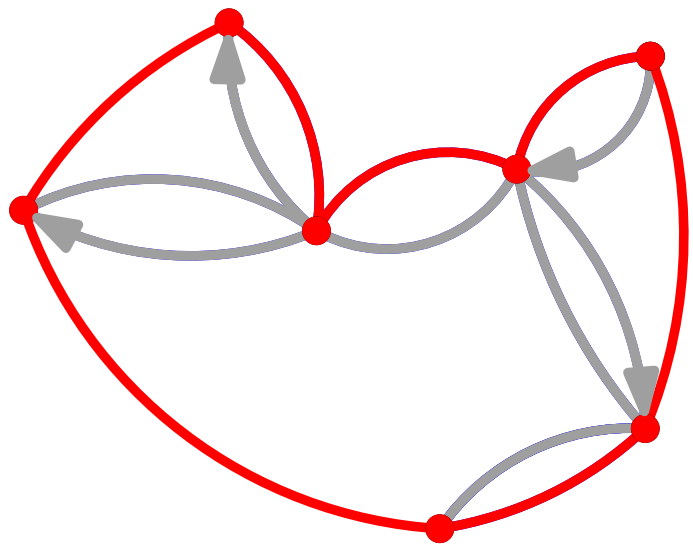
$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

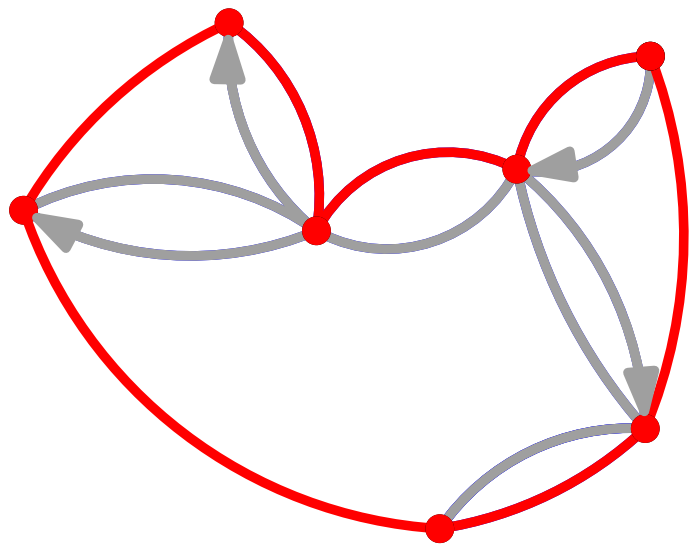
Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Die „Kunst“ der unteren Schranke: $c(\text{min. Spannbaum}) \leq c(\text{TSP-Tour})$