

Algorithmische Graphentheorie

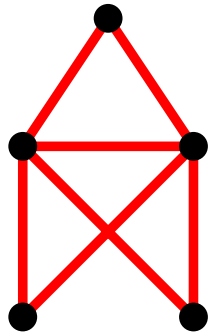
Sommersemester 2026

1. Vorlesung

Rundreiseprobleme: Teil I – Eulerkreise

Übersicht

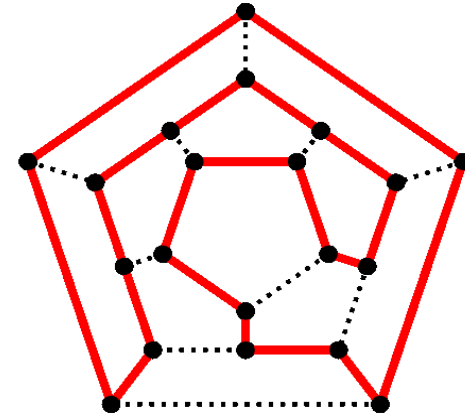
I) Eulerkreise



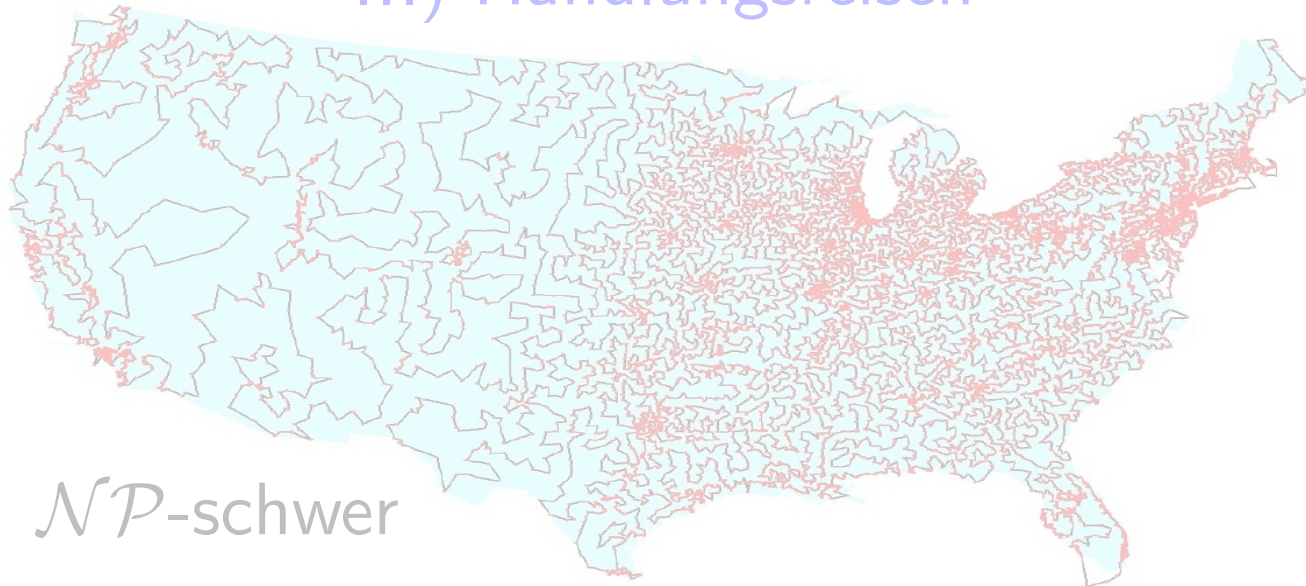
\mathcal{P}

\mathcal{NP} -schwer

II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



\mathcal{NP} -schwer

I) Eulerkreise

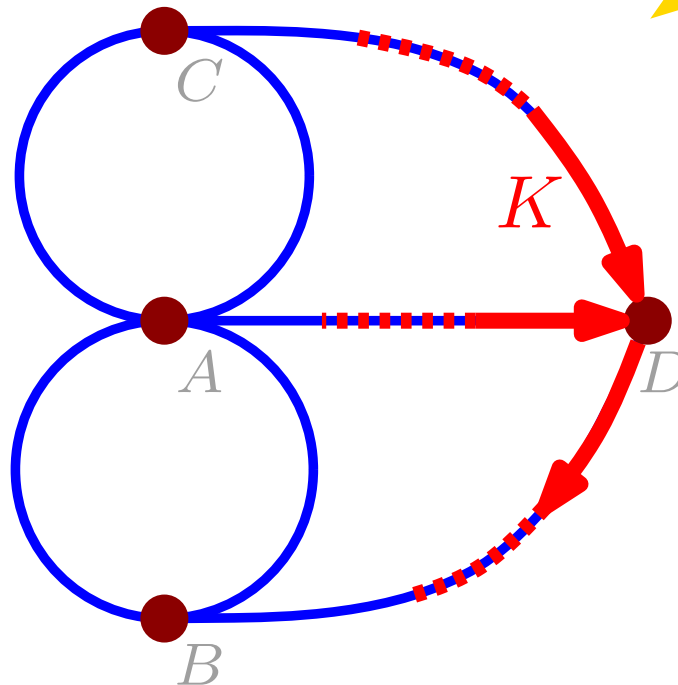
Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
Ein *Eulerkreis* (-weg) in G ist ein Kreis (Weg),
der jede Kante genau einmal durchläuft.

Ein Graph heißt *eulersch*, falls er einen Eulerkreis enthält.

Königsberger Brückenproblem [Euler, 1741]



Ist dieser
(Multi-) Graph
eulersch?



Geburtsstunde der
Graphentheorie!

Angenommen ja.

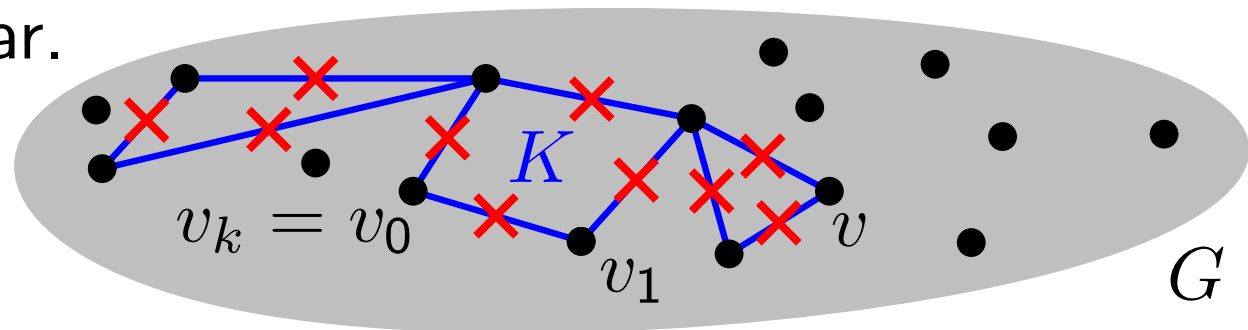
\Rightarrow Es gibt einen
Eulerkreis K .

Aber
 $\deg(D) = 3$,
also ungerade. ⚡

Satz von Euler für ungerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ungerichteter und zshg. Graph. Dann gilt:
 G eulersch \Leftrightarrow alle Knoten haben geraden Grad.

Beweis. „ \Rightarrow “ klar.



„ \Leftarrow “ Sei $v_0 \in V(G)$. Wähle einen Nachb. $v_1 \in \text{Adj}[v_0]$.
 Markiere die Kante v_0v_1 als gebraucht.

Wiederhole diesen Schritt, bis aktueller Knoten v_k nur noch zu gebrauchten Kanten inzident ist.

Alle Knotengrade gerade $\Rightarrow v_k = v_0$, d.h.

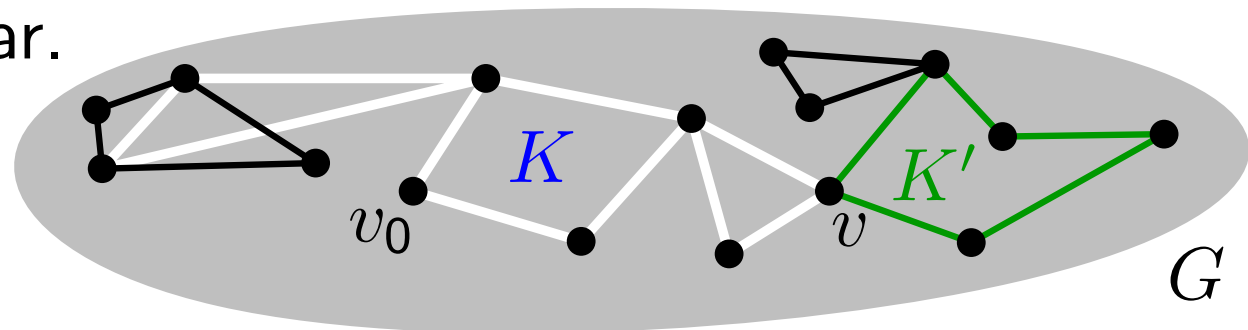
$K := \langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ ist Kreis.

\Rightarrow in $(V(G), E(K))$ haben alle Knoten ger. Grad.

Satz von Euler für ungerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ungerichteter und zshg. Graph. Dann gilt:
 G eulersch \Leftrightarrow alle Knoten haben geraden Grad.

Beweis. „ \Rightarrow “ klar.



„ \Leftarrow “ Im Restgr. $(V(G), E \setminus E(K))$ haben alle Knoten geraden Grad – aber er muss nicht zshg. sein!

Durchlaufe K noch einmal.

Wenn ein Knoten $v \in K$ noch eine unbenutzte Kante besitzt, finde einen neuen Kreis K' von v zu v und füge ihn in K ein.

Durchlaufe weiter den neuen Kreis K (bis v_0). \square

Beweis
 konstruktiv.
 Laufzeit der
 Konstruktion?

Eulerkreis, ganz schnell

[Hierholzer, 1873]

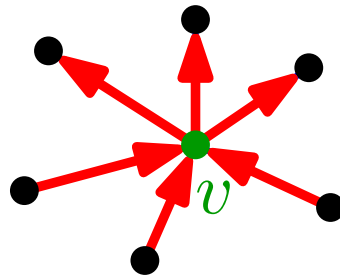
- Satz.** Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zshg. Graph.
- (i) Man kann in $O(E)$ Zeit testen, ob G eulersch ist.
 - (ii) Falls G eulersch ist,
so kann man in $O(E)$ Zeit einen Eulerkreis finden.

Beweis. (ii) Implementiere den Beweis des Satzes von Euler.

Trick: Verwalte in jedem Knoten v einen Zeiger $\text{curr}[v]$, der auf den ersten Nachbarn w zeigt mit vw unbenutzt; falls alle zu v inzidenten Kanten benutzt sind, sei $\text{curr}[v] = \text{nil}$.

Beispiel:

Anzahl der
Änderungen von
 $\text{curr}[v] = \deg(v)$



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{curr}[v] \\ = \text{nil} \end{array}}$$

Gesamtanzahl der
Zeigeränderungen
 $= \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$
 $= 2|E(G)| \quad \square$

Eulerkreis, ganz schnell (Forts.)

Die Verwendung der curr-Zeiger stellt sicher, dass wir in jedem Knoten in *amortisiert konstanter* Zeit den “Ausgang” finden.

Das bedeutet, dass unser Aufwand für den ersten Kreis K proportional zur Länge $|K|$ von K ist.

Aber falls $K \neq E(G)$, wie finden wir schnell einen Knoten in K , der inzident zu nicht-markierten Kanten ist?

Dazu verwalten wir in jedem Knoten v ein *Flag* v .erledigt, das auf *wahr* gesetzt wird, wenn die letzte zu v inzidente Kante markiert wird.

Wenn also $K \neq E(G)$, dann gehen wir mit einem neuen Zeiger z (beginnend mit v_0) durch K , bis wir den ersten noch nicht erledigten Knoten finden.

Eulerkreis, ganz schnell (Forts.)

Dort finden wir den nächsten Kreis K' , fügen ihn in K ein und bewegen dann unseren Zeiger bis zum nächsten noch nicht erledigten Knoten weiter – bis $K = E(G)$.

Im Laufe der Zeit geht der Zeiger z durch K , bis er wieder beim Startknoten v_0 ist, also genau $1 \times$ über jede Kante.

Aufwand für das Vorrücken des Zeigers z : $O(E)$

Aufwand für die Aufrechterhaltung der erledigt-Flags: $O(V)$

Extraaufwand (außer der Konstruktion von K): $O(E)$

Bem. In zusammenhängenden Graphen gilt $|E| \geq |V| - 1$,
also $O(V) \subseteq O(E)$. □

Satz von Euler für gerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ~~ungerichteter~~ und ^{schwach} zshg.^{*} Graph. Dann:

G eulersch \Leftrightarrow für jeden Knoten v gilt:
 $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$.

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ~~ungerichteter~~ und ^{schwach} zshg. Graph.

(i) Man kann in $O(E)$ Zeit testen, ob G eulersch ist.

(ii) Falls G eulersch ist,
 so kann man in $O(E)$ Zeit einen Eulerkreis finden.

Beweis. Im Prinzip wie im ungerichteten Fall.

Man muss einen curr-Zeiger allerdings nur dann weiterrücken, bevor man die aktuelle Kante benutzt.

Kosten fürs Zeigerbewegen: $\sum_{v \in V} \text{outdeg}(v) = |E|$.

□

Algorithmische Graphentheorie

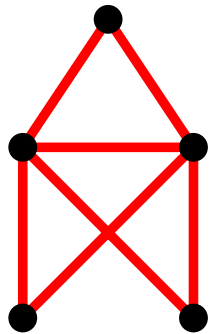
Sommersemester 2025

1. Vorlesung

Rundreiseprobleme: Teil II – Hamiltonkreise

Übersicht

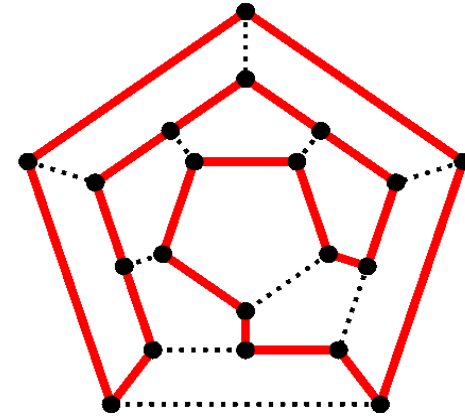
I) Eulerkreise



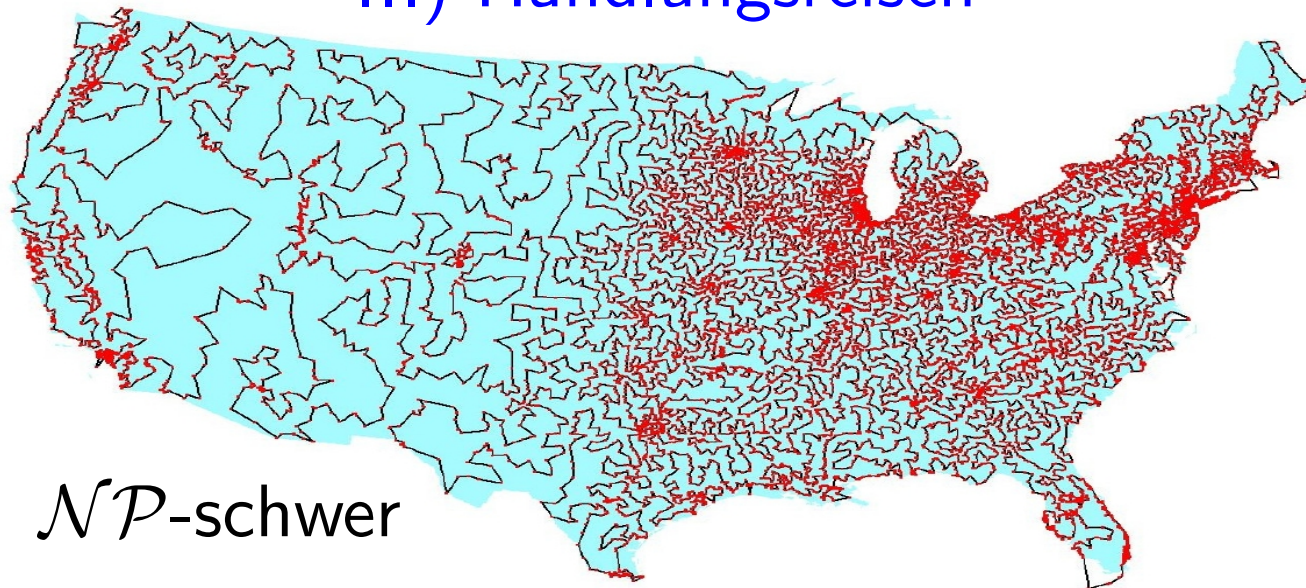
\mathcal{P}

\mathcal{NP} -schwer

II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



\mathcal{NP} -schwer

II) Hamiltonkreise

Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
 Ein *Hamiltonkreis* (-weg) in G ist ein Kreis (Weg),
 der jeden *Knoten* genau einmal durchläuft.
 Ein Graph heißt *hamiltonsch*, falls er einen
 Hamiltonkreis enthält.

Sir William Rowan Hamilton



1805 Dublin – 1865 Dunsink

Icosian Game / Traveller's Dodecahedron

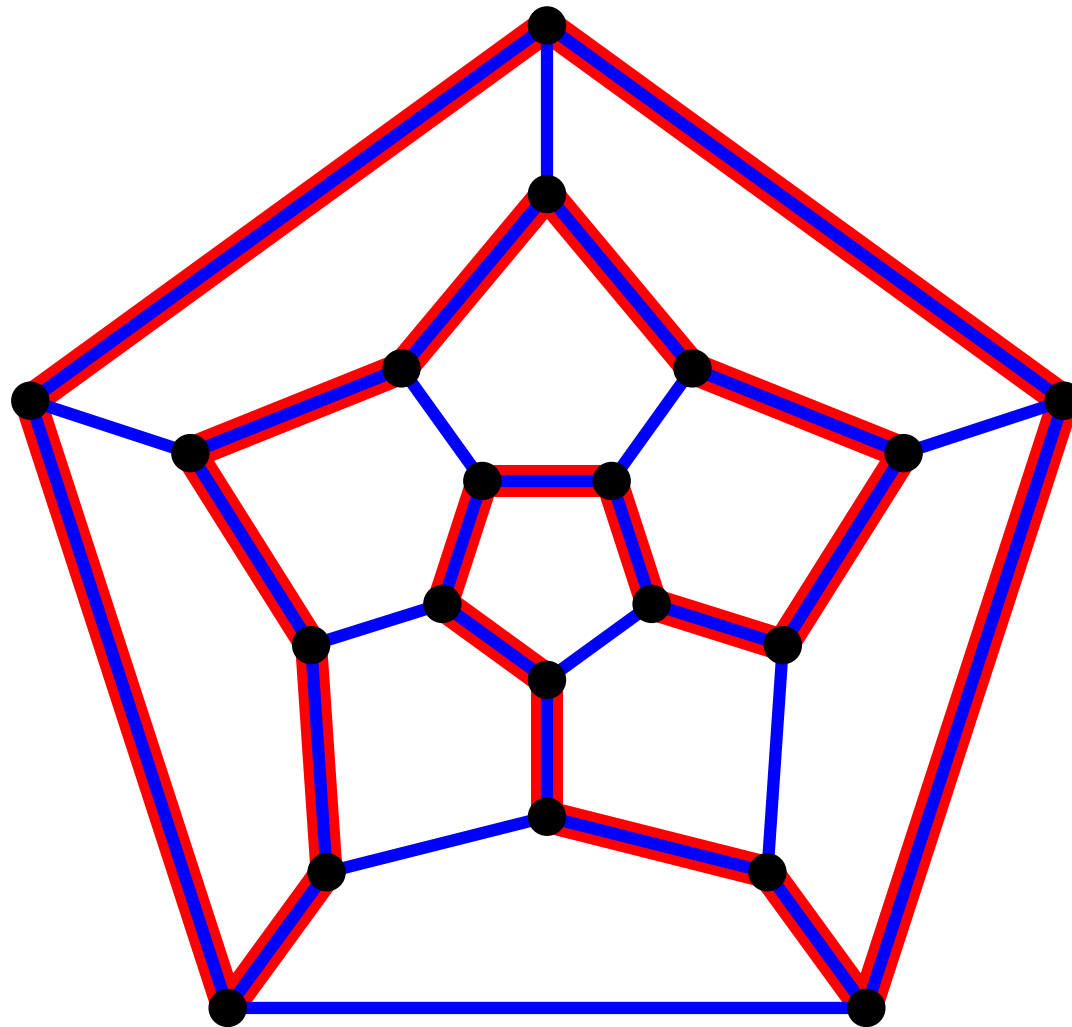


(c) 2002 James Dalgety, The Puzzle Museum

A Voyage Round the World

Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

Antwort: Ja!



Die Skelette der vier anderen platonischen Körper auch.

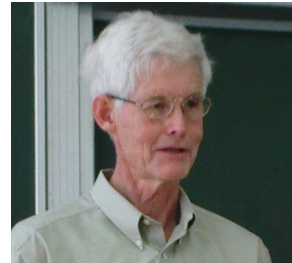
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\text{p}}{\leq}$ CLIQUE \preceq_p VC \preceq_p gerHK \preceq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* **hinreichende Bedingungen** dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n$. Dann gilt:
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

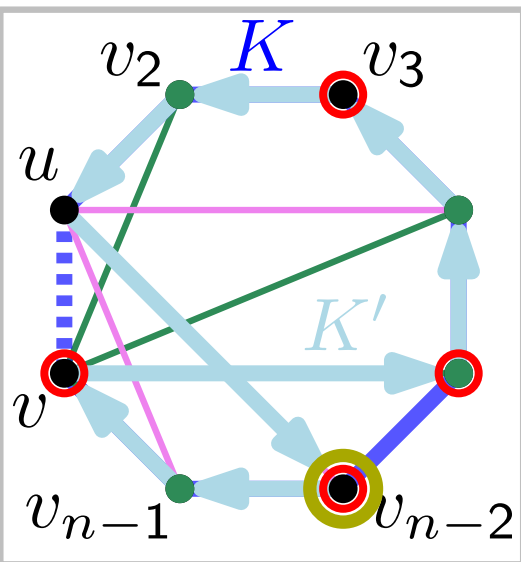
Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$



Satz von Dirac

Satz.

[Chvátal & Bondy]

Sei G ein ungerichteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten.

Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Kor.

Sei G ein ungerichteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten.

Falls jeder Knoten von G Grad mindestens $n/2$ hat, so ist G hamiltonsch.

Beweis. Probieren Sie's!