

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2025

25. Vorlesung

Leichte Kreise in Graphen

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s .

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit:

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $|V| \cdot O(V + E) =$

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $|V| \cdot O(V + E) = O(VE)$

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $|V| \cdot O(V + E) = O(VE)$ (Da G zusammenhängend, gilt $|E| \geq |V| + 1$.)

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

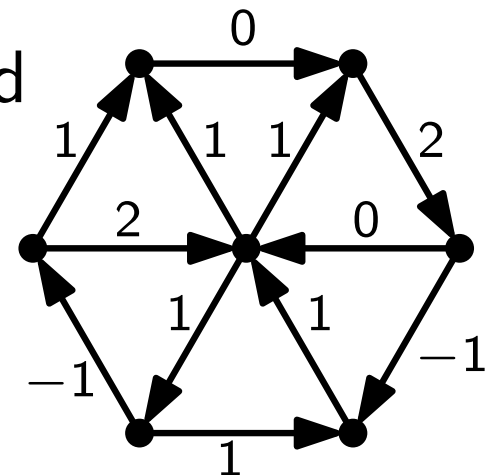
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

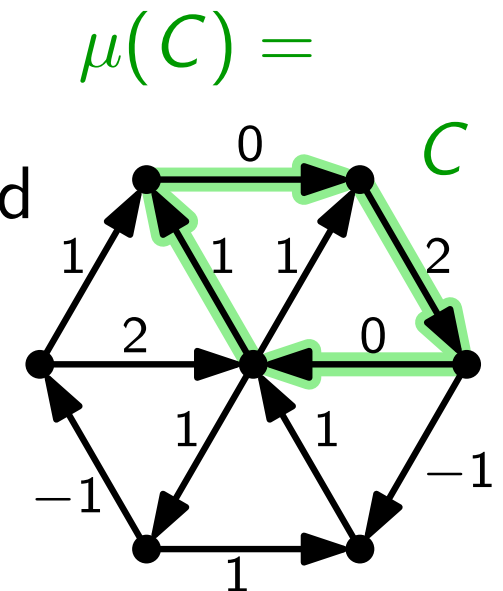
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

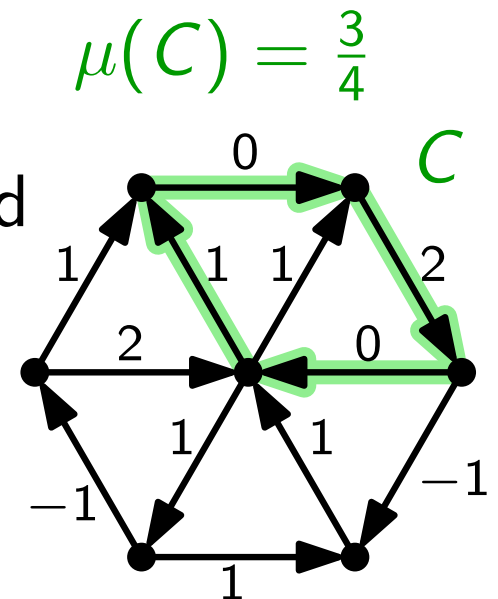
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

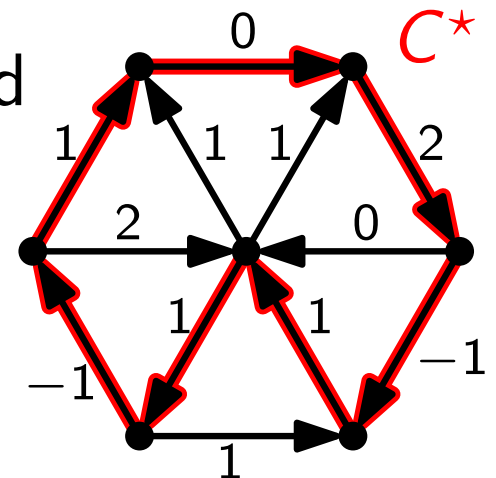
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

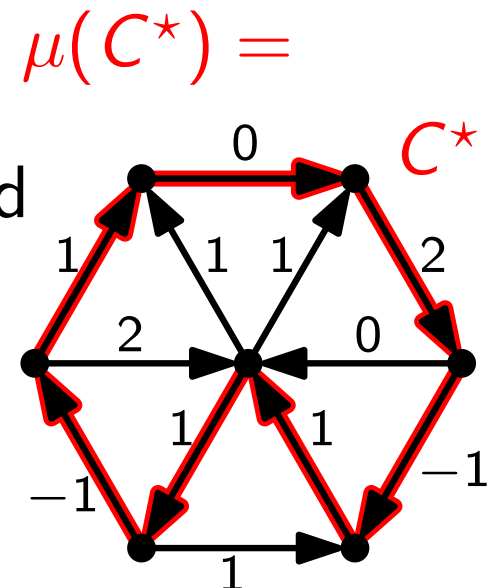
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

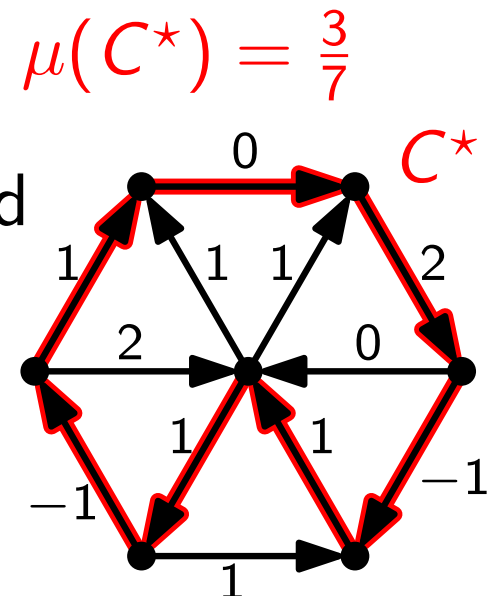
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

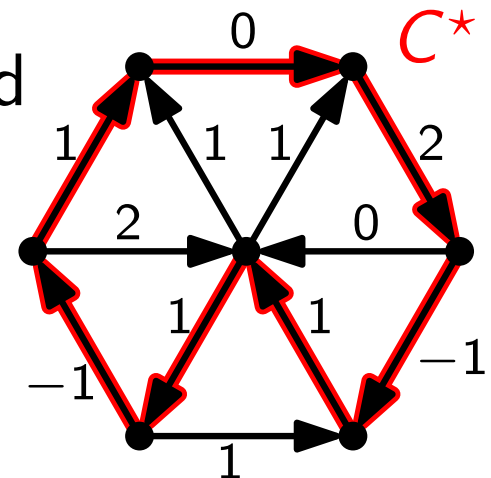
sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

$$\mu^* = \mu(C^*) = \frac{3}{7}$$

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
```

```
   $\mu_{\min} = \infty$ 
```

```
   $C = \text{new List}()$ 
```

```
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
```

```
  return  $C_{\min}$ 
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
```

```
   $\mu_{\min} = \infty$ 
```

```
   $C = \text{new List}()$ 
```

```
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
```

```
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
```

```
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
```

```
       $\mu_{\min} = \mu$ 
```

```
       $C_{\min} = C$ 
```

```
  return  $C_{\min}$ 
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
 $\mu_{\min} = \infty$ 
 $C = \text{new List}()$ 
foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
         $\mu_{\min} = \mu$ 
         $C_{\min} = C$ 
return  $C_{\min}$ 
```

Laufzeit?

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
 $\mu_{\min} = \infty$ 
 $C = \text{new List}()$ 
foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
         $\mu_{\min} = \mu$ 
         $C_{\min} = C$ 
return  $C_{\min}$ 
```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-)*

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
   $\mu_{\min} = \infty$ 
   $C = \text{new List}()$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C_{\min} = C$ 
  return  $C_{\min}$ 
```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-(
höchstens exponentiell*

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph  $G$ ,  $w$ )
   $\mu_{\min} = \infty$ 
   $C = \text{new List}()$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C_{\min} = C$ 
  return  $C_{\min}$ 
```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-(
höchstens exponentiell in $|E|$*

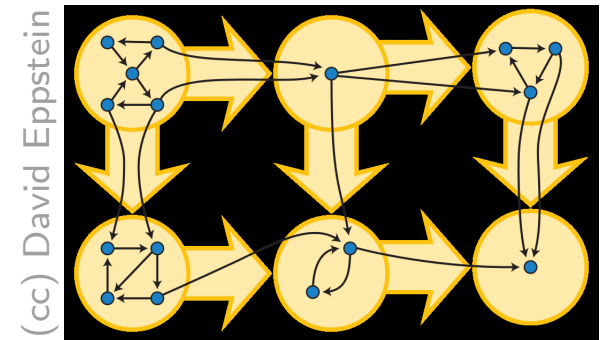
Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

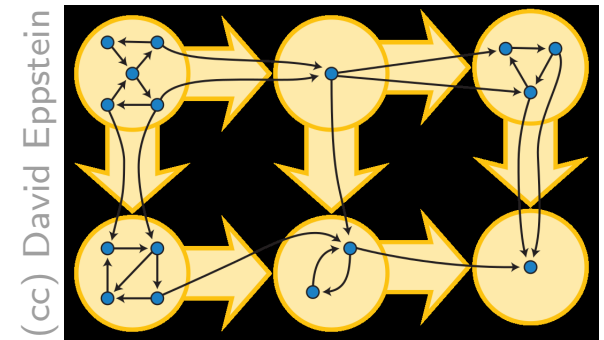
Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?) und betrachten jede separat.



Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.



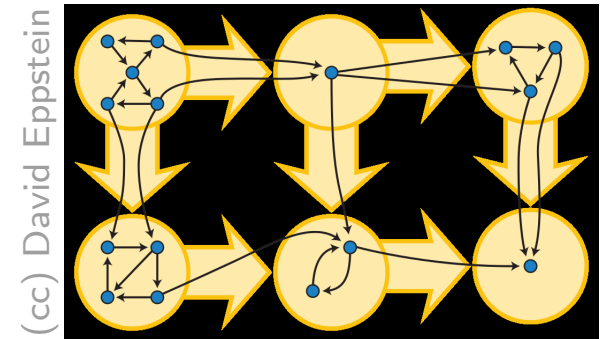
*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .



*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

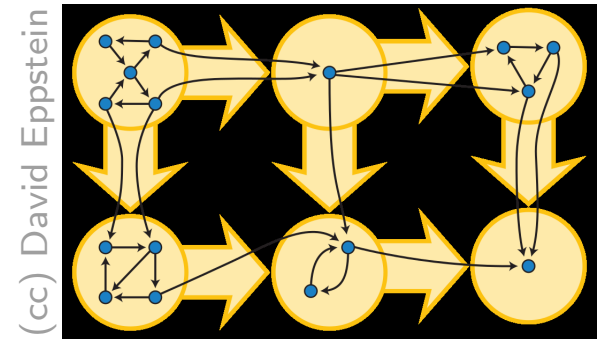
Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .

Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s - v -Wegs.



*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Vorbereitungen

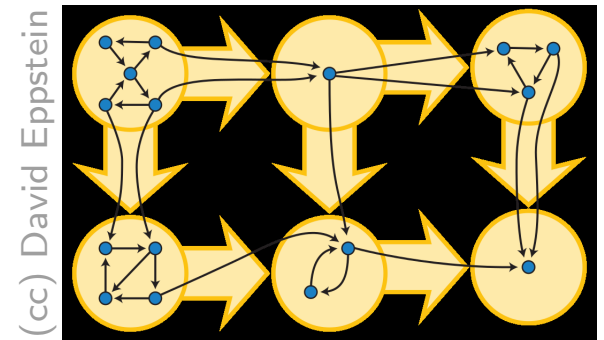
Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .

Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s - v -Wegs.

Für $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ sei $\delta_k(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten s - v -Wegs, der aus *genau* k Kanten besteht (sonst ∞).

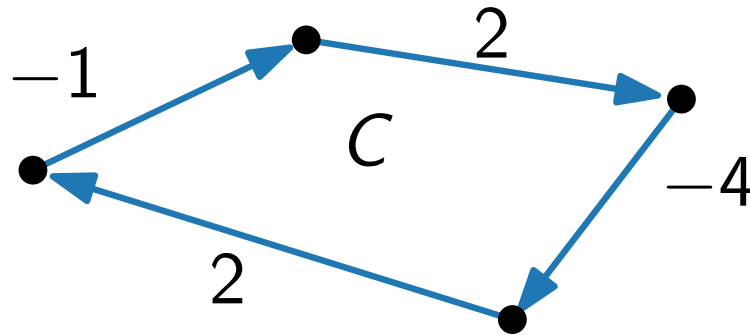


*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

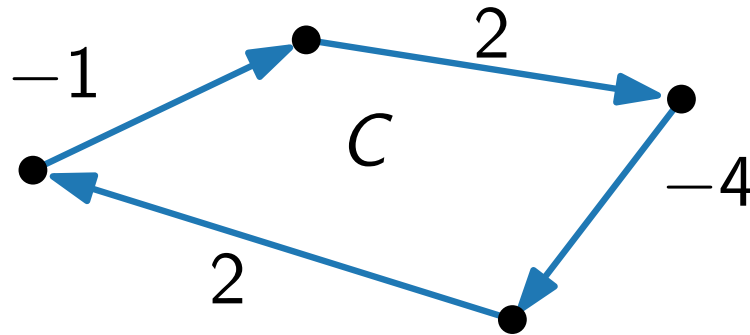
1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

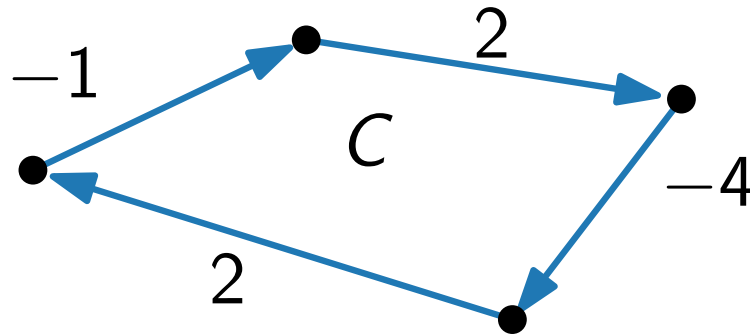


Beweis.

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

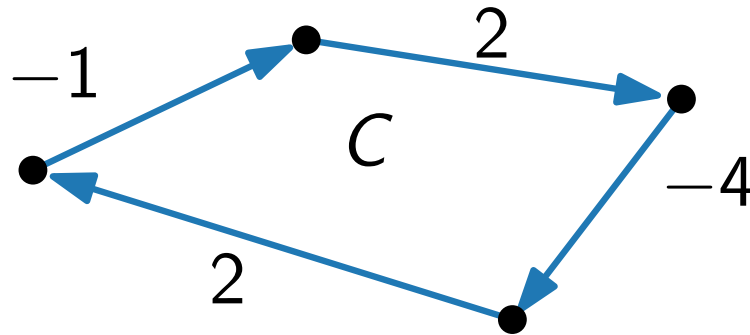
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

\Rightarrow

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

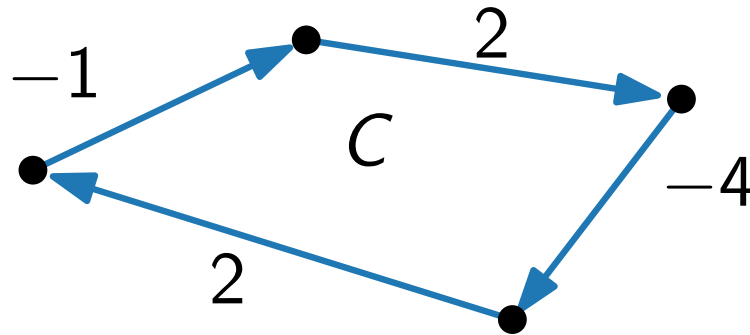
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C)$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



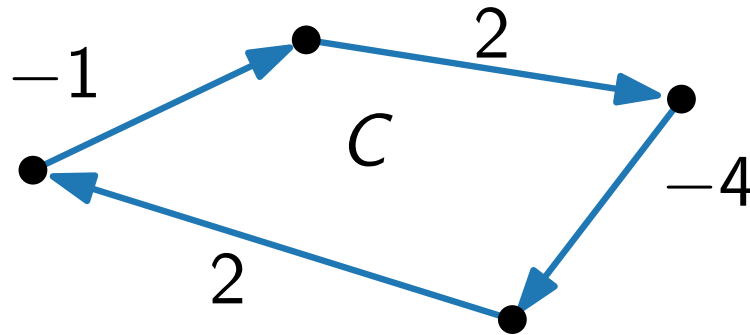
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

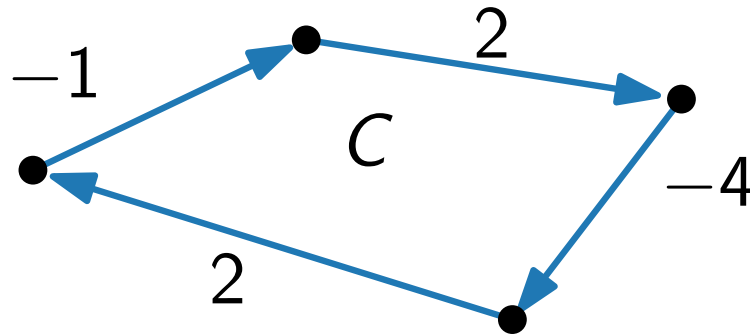
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

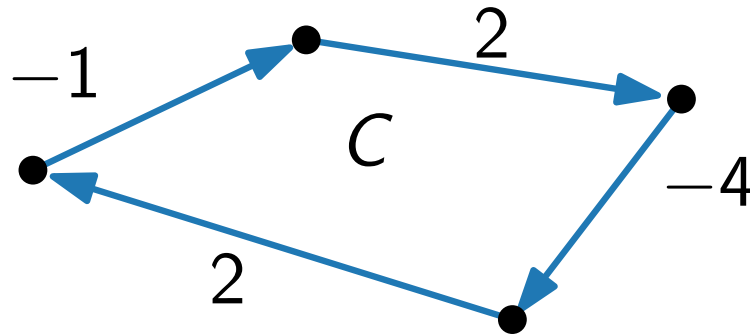
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^*$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

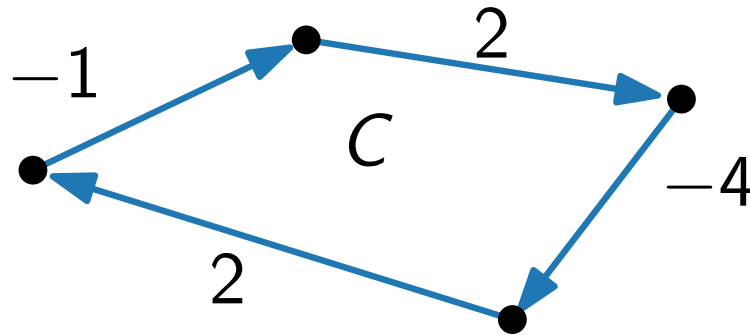
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

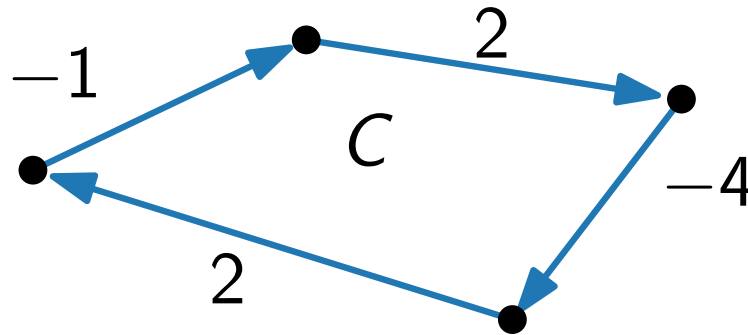
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

Schritt I


Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

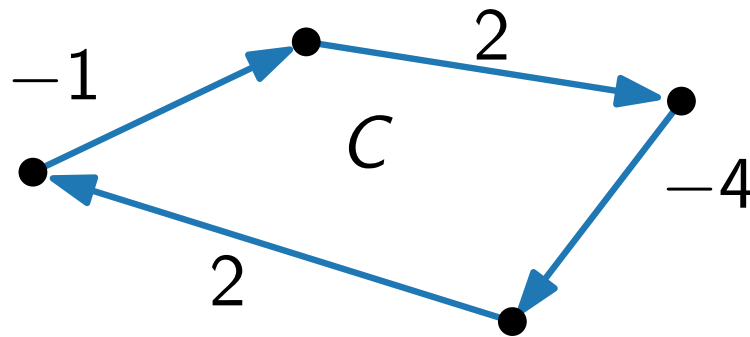
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$


Schritt I


Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$


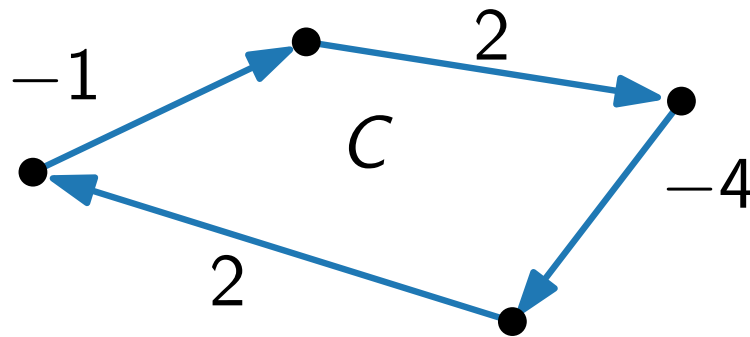
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

\Rightarrow

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

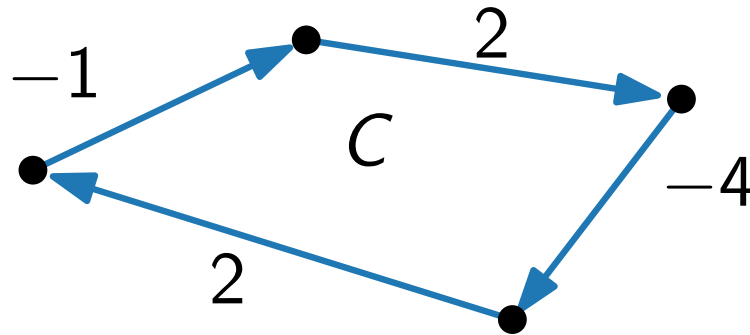
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C.$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

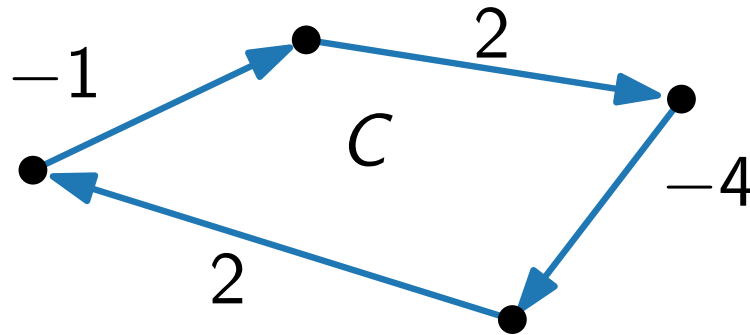
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0.$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

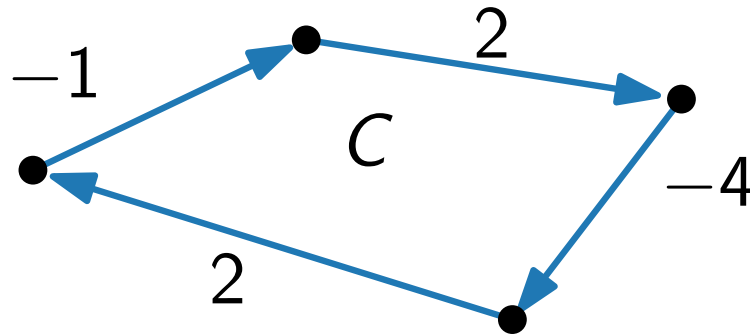
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

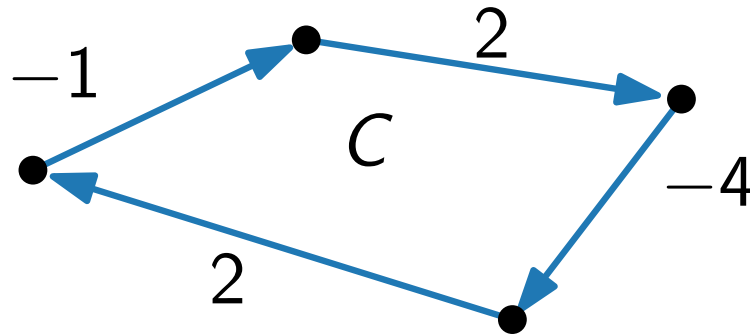
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C)$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

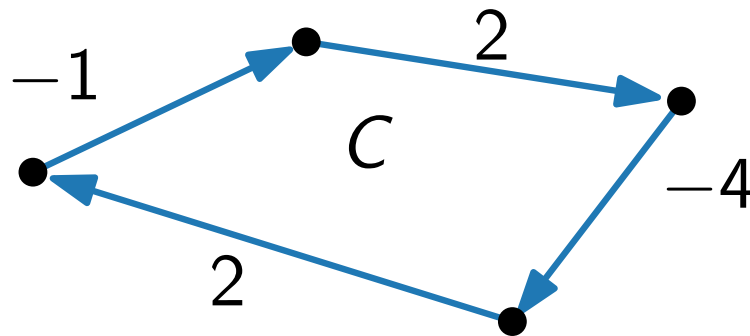
$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$$

\Rightarrow

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

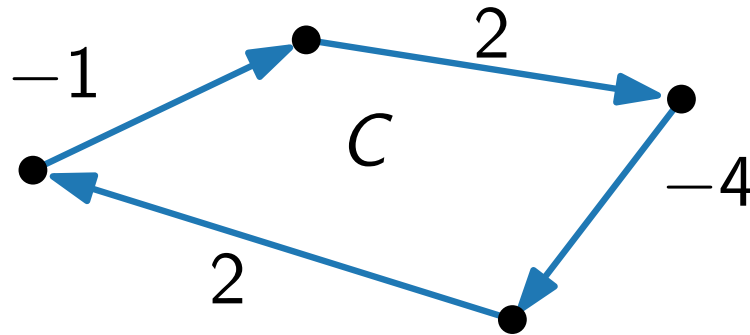
$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt einen kürzesten } s\text{-}v\text{-Weg mit } \leq n - 1 \text{ Kanten.}$$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt einen kürzesten } s\text{-}v\text{-Weg mit } \leq n - 1 \text{ Kanten.}$$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \overset{?}{\leq} \delta(s, v)$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) =$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0$$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0 \Rightarrow \text{Beh.}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

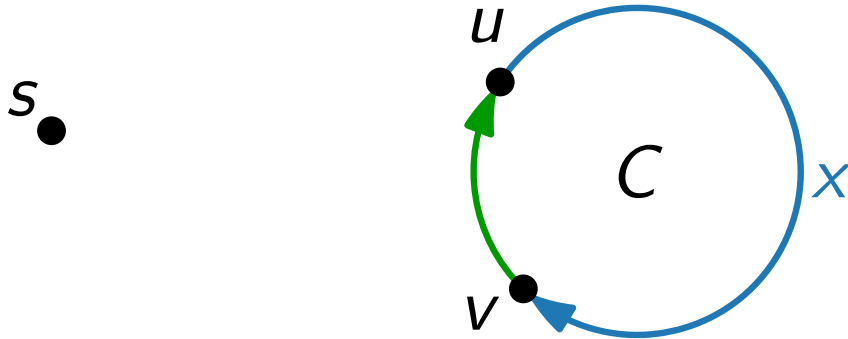
Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0 \Rightarrow$ Beh. \square
 $n - k > 0$

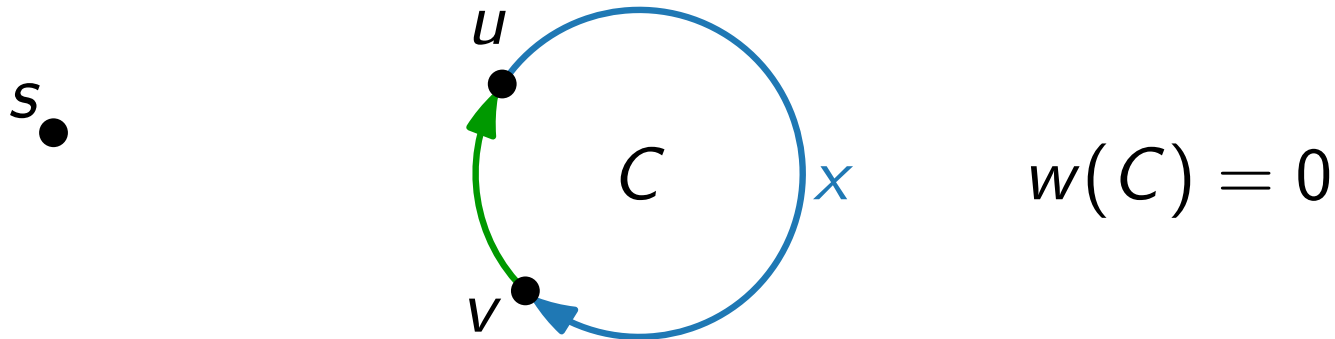
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



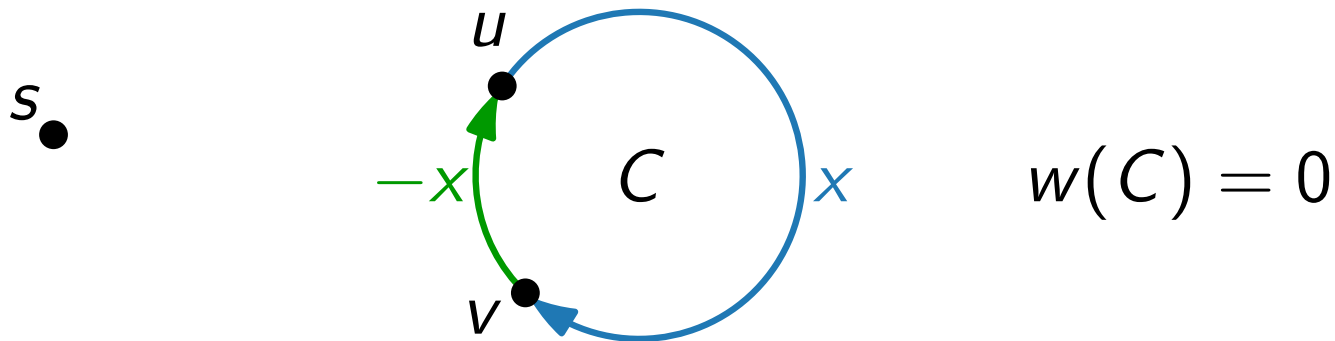
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



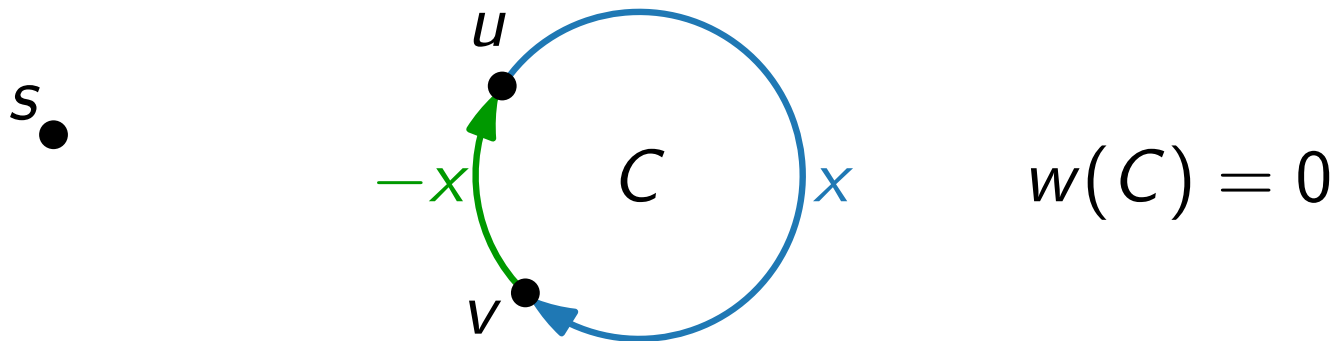
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Schritt III

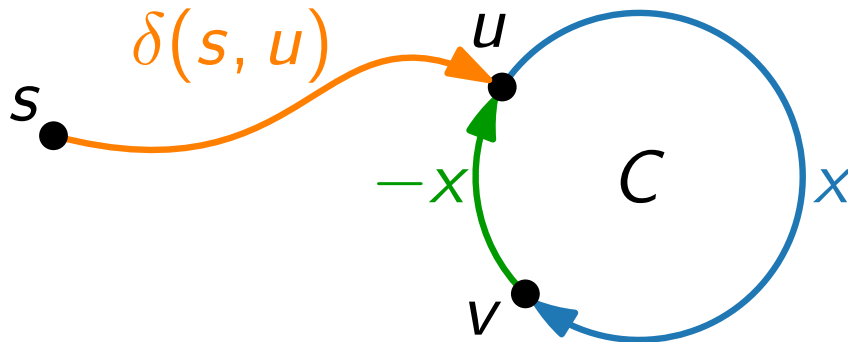
Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .

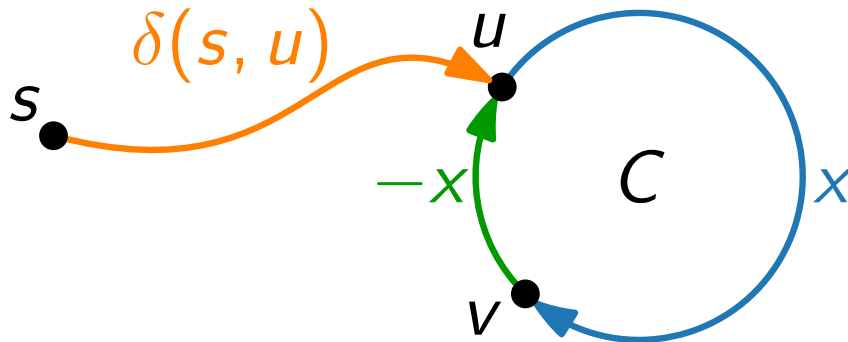


$$w(C) = 0$$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



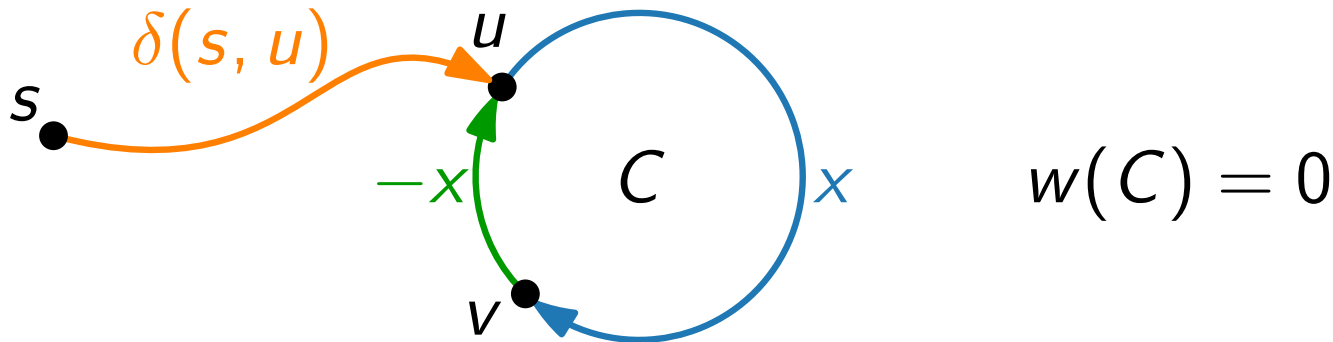
$$w(C) = 0$$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



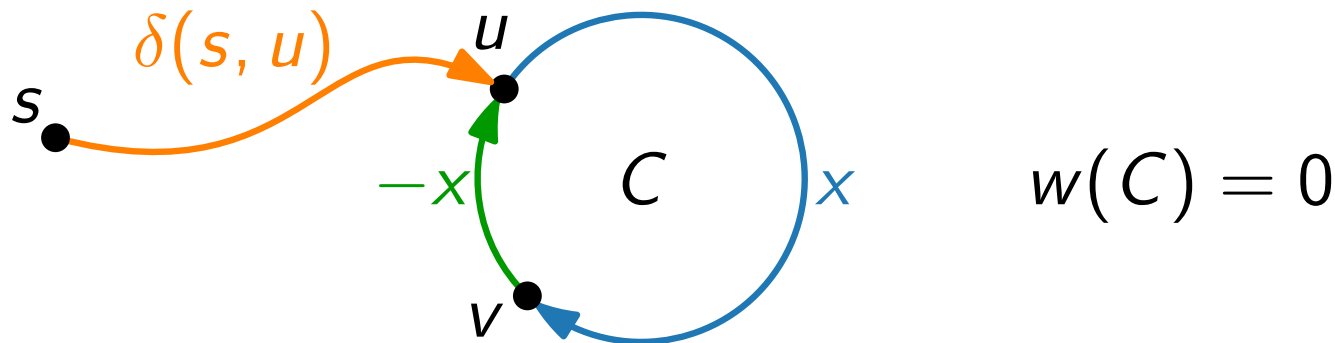
Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

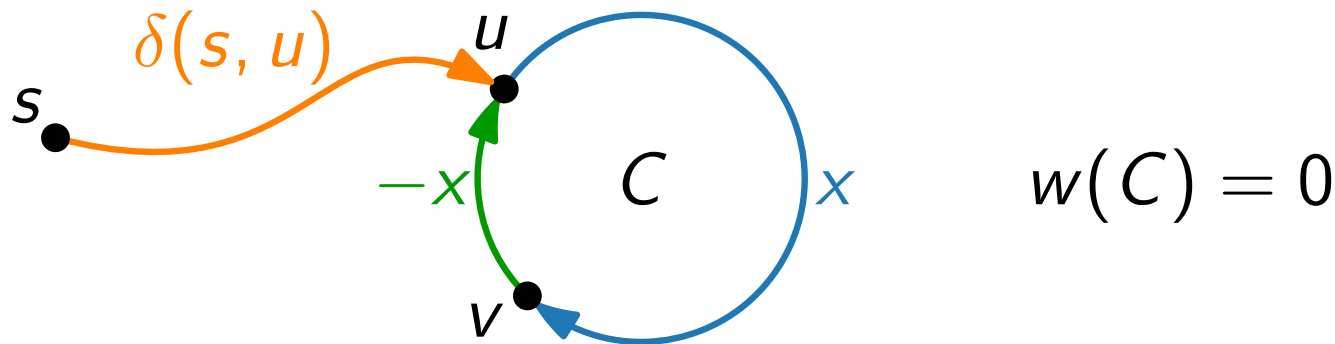
Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

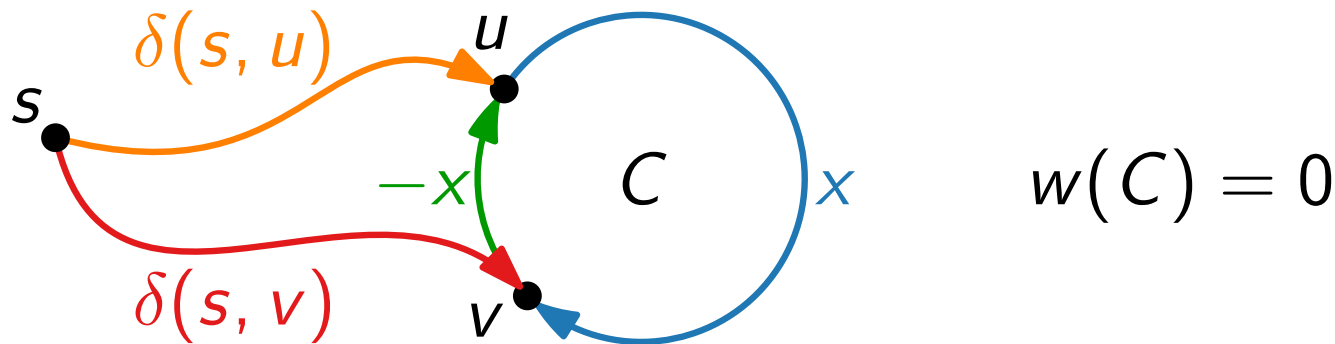
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

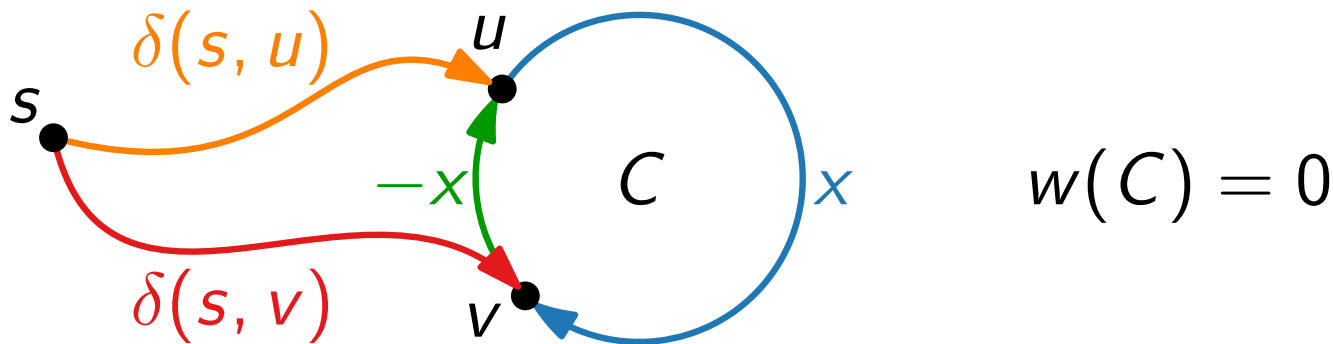
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

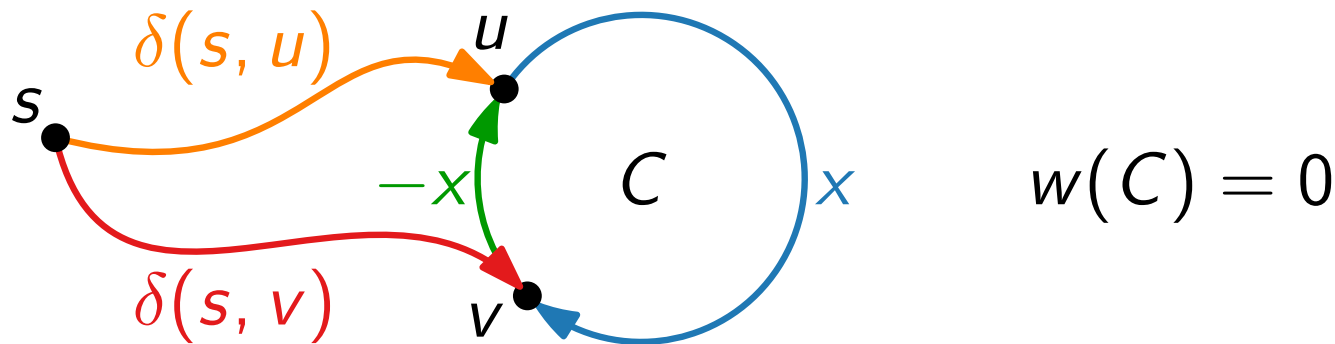
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u) \quad \text{⚡}$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$ ⚡ zur Def. von δ .



Schritt IV

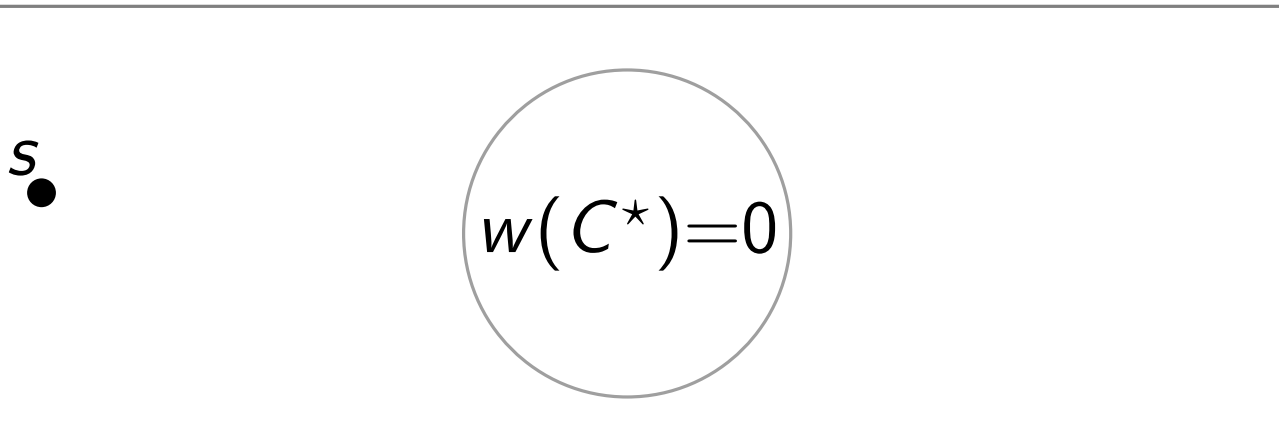
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

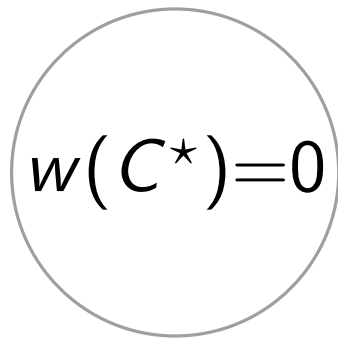
$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

s
●



Bestimme

$v \in C^*$:

Gehe von s
aus n Kanten.

Schritt IV

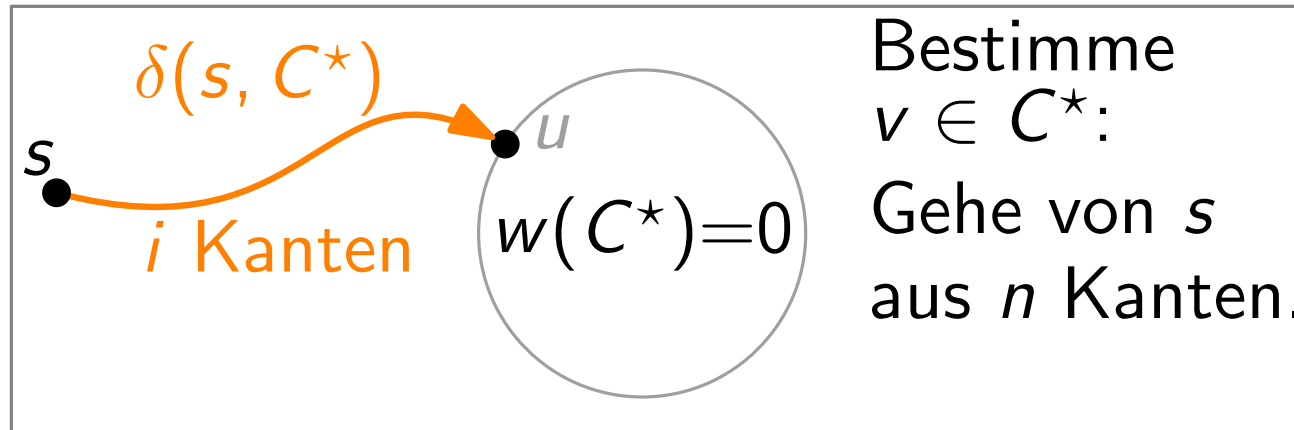
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

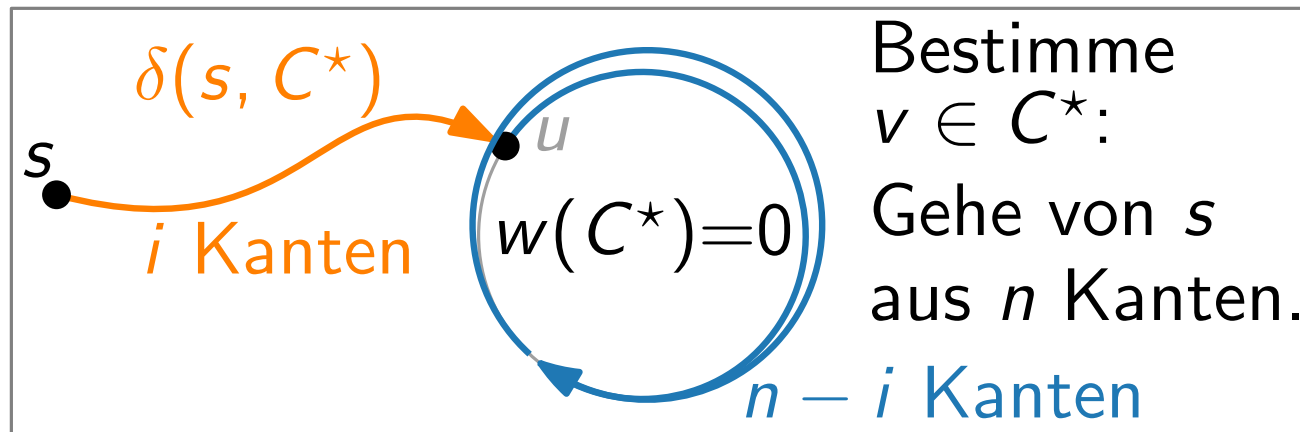
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

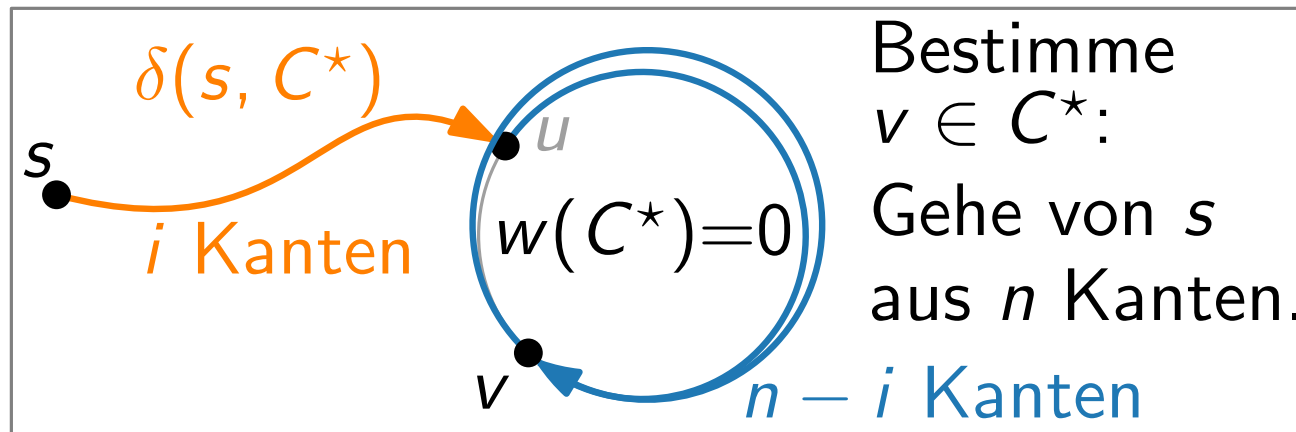
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

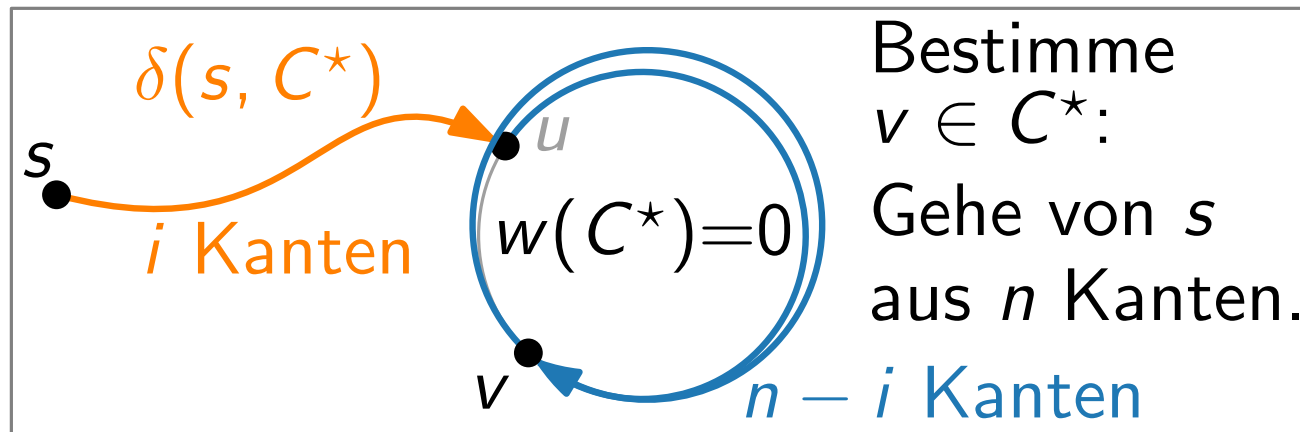
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v).$

Schritt IV

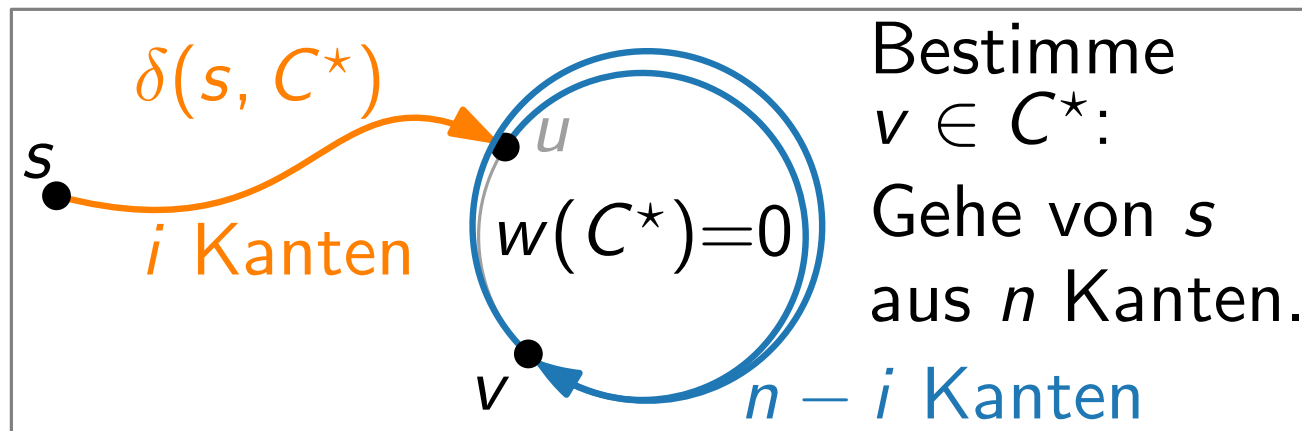
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v).$$

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v) !!$$

Schritt IV

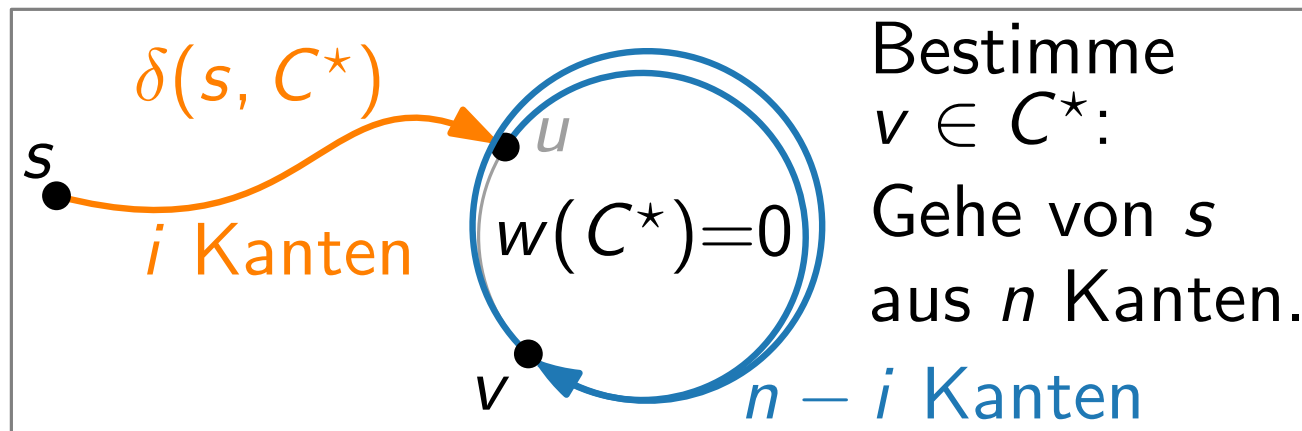
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v)$.
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v) !!$
 Aber für welches k gilt
 $\delta_n(s, v) = \delta_k(s, v)$?

Schritt IV

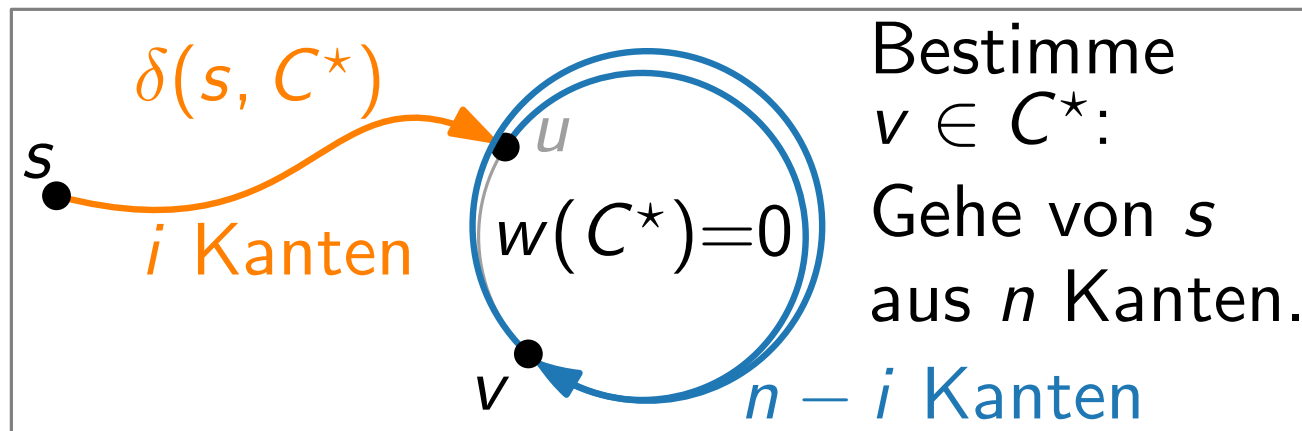
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses* v :

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v).$$

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v) !!$$

Aber für welches k gilt

$$\delta_n(s, v) = \delta_k(s, v)?$$

z.B. $k = n - |C^*|$, denn $w(C^*) = 0$ und $|C^*| \leq n$.

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* ,
so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = ?$$

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = \mathbf{0}.$$

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = \mathbf{0}.$$

Klar...

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v)}^{+nt} - \overbrace{\delta_k(s, v)}^{+kt}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt \quad +kt}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} =$$



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt \quad +kt}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \stackrel{+nt \quad +kt}{=} \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \overset{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \overset{+nt \quad +kt}{=} \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also:

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \stackrel{+nt \quad +kt}{=} \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \stackrel{+nt \quad +kt}{=} \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(\quad) = \beta(\quad)$

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \overbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}^{+nt \quad +kt} =: \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(\quad) = \beta(\quad)$
(**)

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) \stackrel{(**)}{=} \beta(-\mu^*)$

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \overset{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \overbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}^{+nt \quad +kt} =: \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$ und Steigung 1 (**)

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\left. \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?!}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \overbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}^{+nt \quad +kt} =: \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$ und Steigung 1 $\Rightarrow \alpha \equiv \beta$. (**) \square

Schritt VII

Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Schritt VII

Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

Schritt VII



Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.

Schritt VII



Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne

$$\delta_k(s, v) =$$

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII



Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\quad)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(\quad)$ Zeit.

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt
$$\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt $\mu^{\star} = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

- Berechne μ^* nach (***) in $O(\quad)$ Zeit.

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt $\mu^{\star} = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

- Berechne μ^* nach (***) in $O(V^2)$ Zeit. □

Schritt VII



[Karp, 1978]

Es gilt $\mu^{\star} = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

Das ist ein kleines dynamisches Programm! :-)

- Berechne μ^* nach (***) in $O(V^2)$ Zeit. □

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
- Wie soll ich lernen?
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.

Wie lerne ich auf die Klausur?


- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!
 - Keep cool!




Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!
 - Keep cool!  (Mehr siehe WueCampus.)
 - In der Woche 23.–27.3. findet ein Repetitorium statt.

Wie lerne ich auf die Klausur?

Viel Erfolg!

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!
 - Keep cool!  (Mehr siehe WueCampus.)
 - In der Woche 23.–27.3. findet ein Repetitorium statt.