

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2025
25. Vorlesung

Leichte Kreise in Graphen

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s .

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit:

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $|V| \cdot O(V + E) =$

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $|V| \cdot O(V + E) = O(VE)$

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert $\text{BFS}(G, s)$ für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s . – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G .

Laufzeit: $|V| \cdot O(V + E) = O(VE)$ (Da G zusammenhängend, gilt $|E| \geq |V| + 1$.)

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

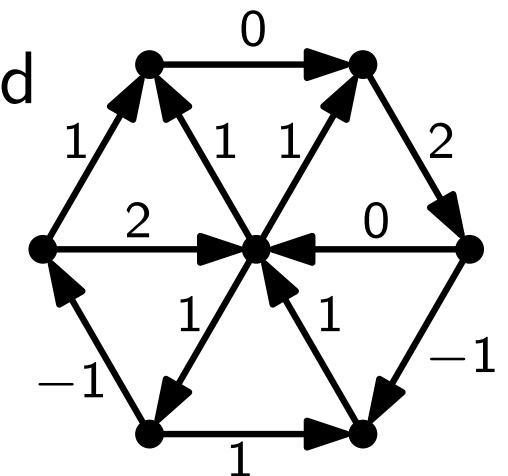
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

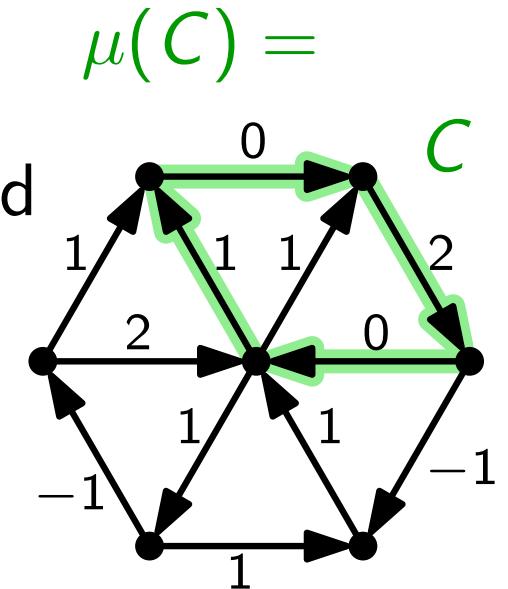
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

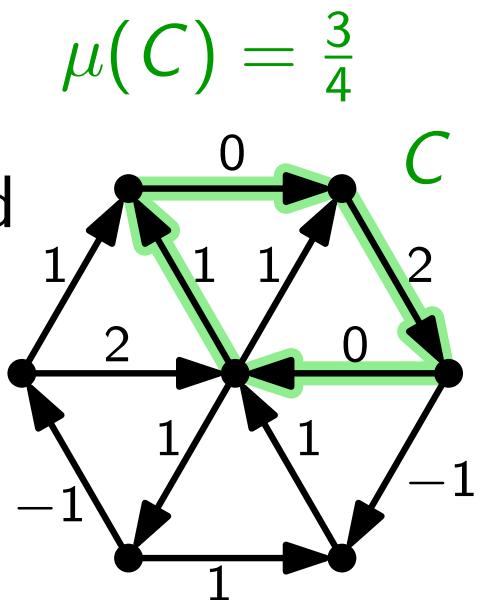
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

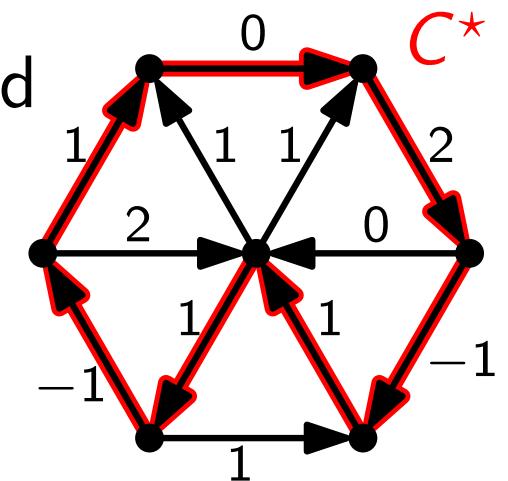
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

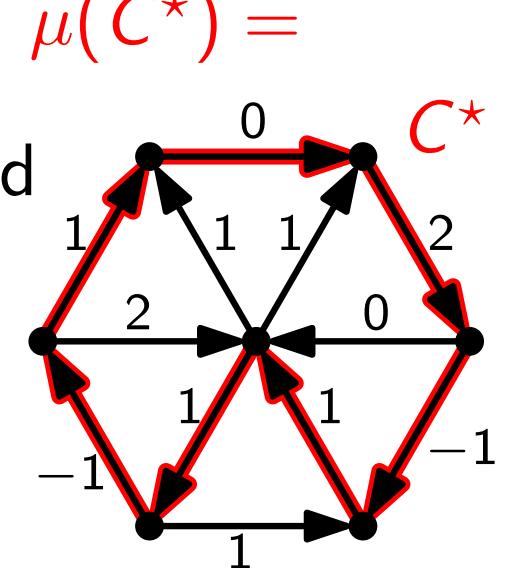
$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

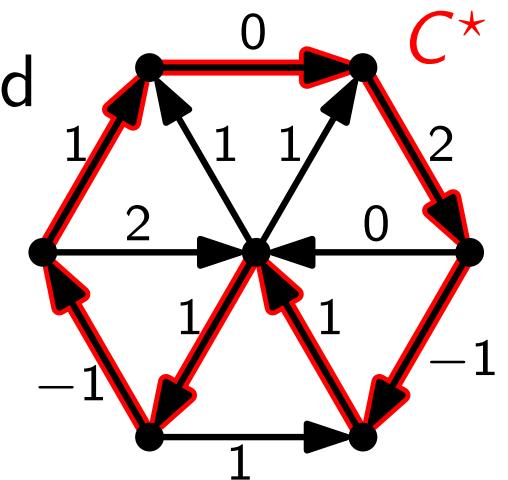
sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

$$\mu(C^*) = \frac{3}{7}$$

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

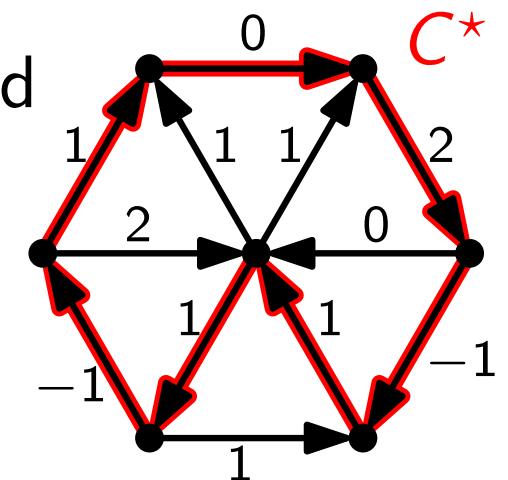
sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

$$\mu^* = \mu(C^*) = \frac{3}{7}$$

Sei \mathcal{C} die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
     $\mu_{\min} = \infty$ 
     $C = \text{new List}()$ 
    foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
        if  $\mu(C) < \mu_{\min}$  then
             $\mu_{\min} = \mu(C)$ 
             $C_{\min} = C$ 
    return  $C_{\min}$ 
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
   $\mu_{\min} = \infty$ 
   $C = \text{new List}()$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C_{\min} = C$ 
  return  $C_{\min}$ 
```

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
   $\mu_{\min} = \infty$ 
   $C = \text{new List}()$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C_{\min} = C$ 
  return  $C_{\min}$ 

```

Laufzeit?

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
   $\mu_{\min} = \infty$ 
   $C = \text{new List}()$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C_{\min} = C$ 
  return  $C_{\min}$ 

```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-)*

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
   $\mu_{\min} = \infty$ 
   $C = \text{new List}()$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C_{\min} = C$ 
  return  $C_{\min}$ 

```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-(
höchstens exponentiell*

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis C^* mit $\mu(C^*) = \mu^*$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```

List MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
   $\mu_{\min} = \infty$ 
   $C = \text{new List}()$ 
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
       $\mu_{\min} = \mu$ 
       $C_{\min} = C$ 
  return  $C_{\min}$ 

```

Laufzeit? *Mindestens exponentiell in $|V|$:-(
höchstens exponentiell in $|E|$*

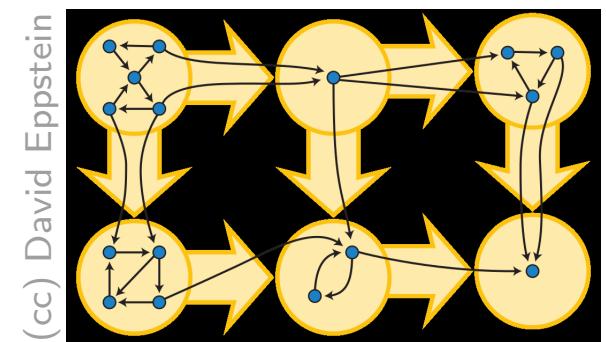
Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G stark zusammenhängend ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G stark zusammenhängend ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

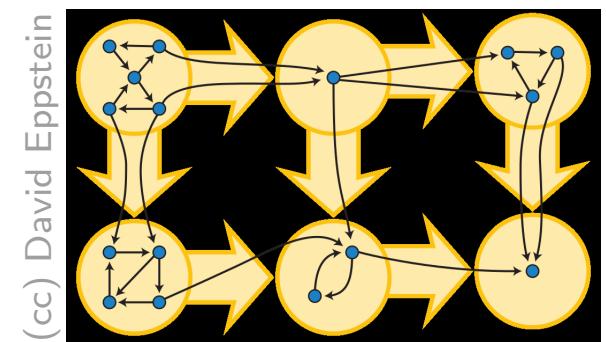
Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?) und betrachten jede separat.



Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G stark zusammenhängend ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.



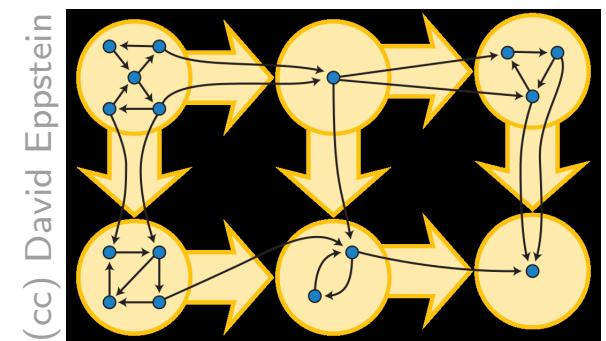
*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G stark zusammenhängend ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .



*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

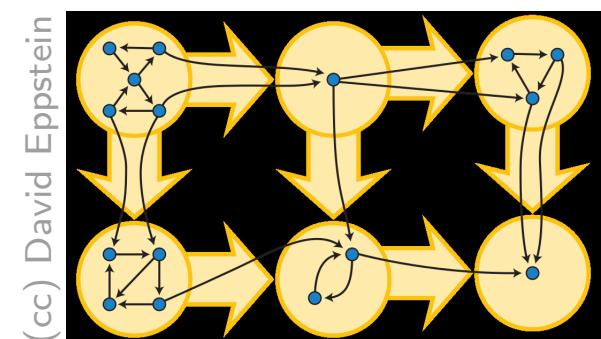
Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G stark zusammenhängend ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .

Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s - v -Wegs.



*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G stark zusammenhängend ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u - v -Weg.

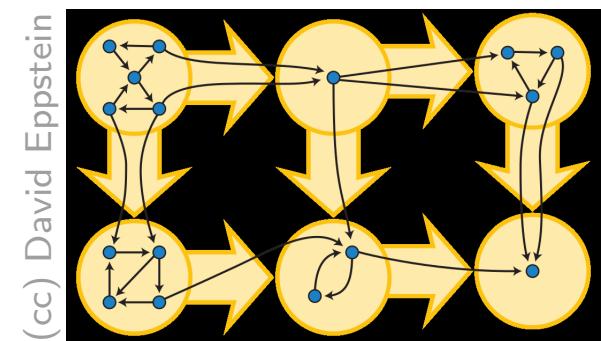
Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.

Sei s ein beliebiger Knoten von G .

Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s - v -Wegs.

Für $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ sei $\delta_k(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten s - v -Wegs, der aus *genau k* Kanten besteht (sonst ∞).

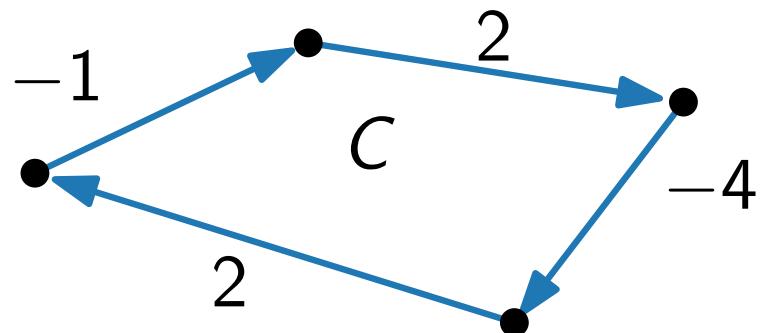
*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)



Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

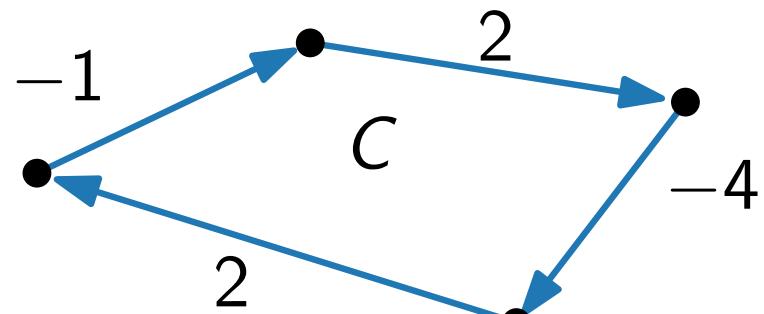
1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

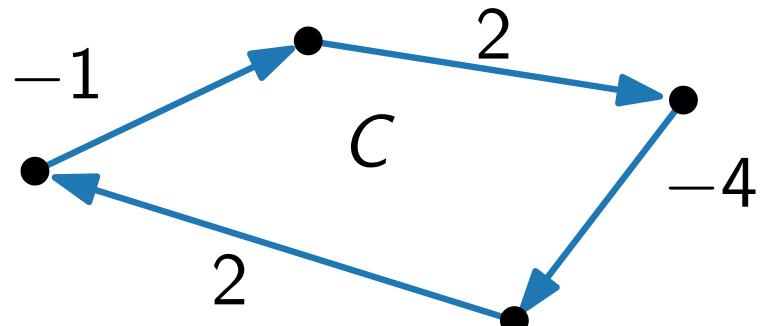


Beweis.

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

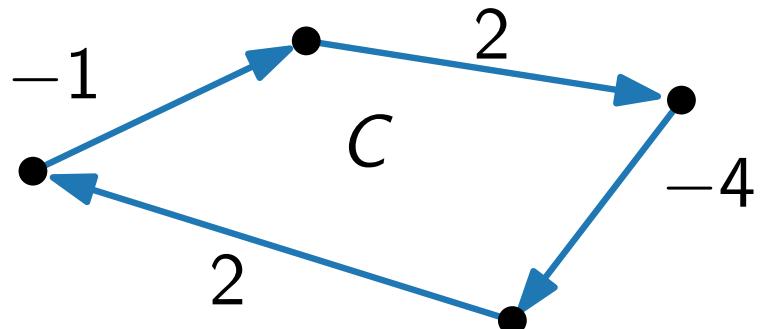
1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

\Rightarrow

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



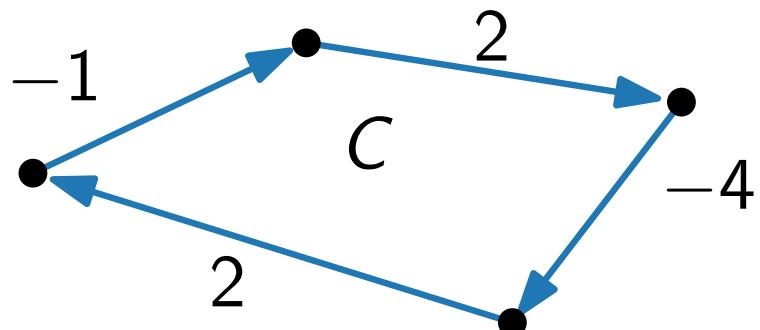
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C)$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



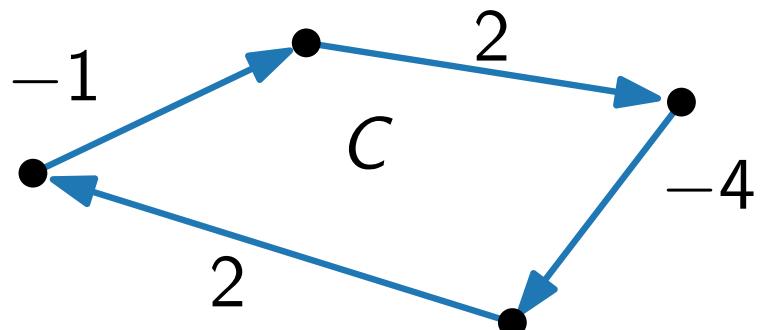
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



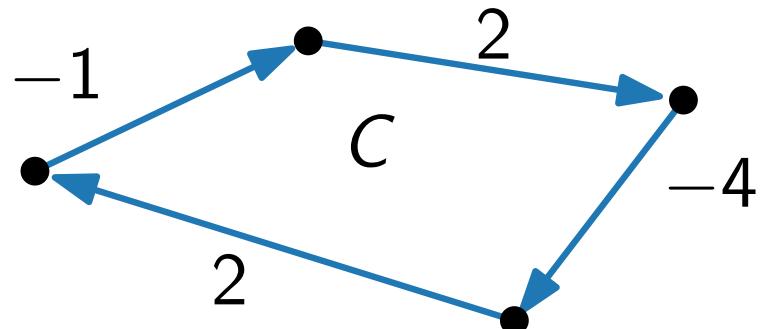
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



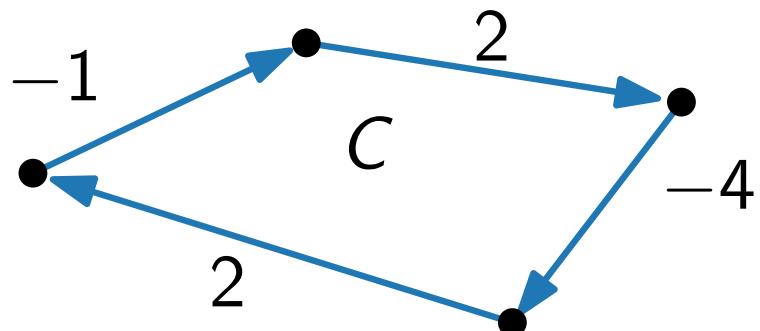
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^*$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



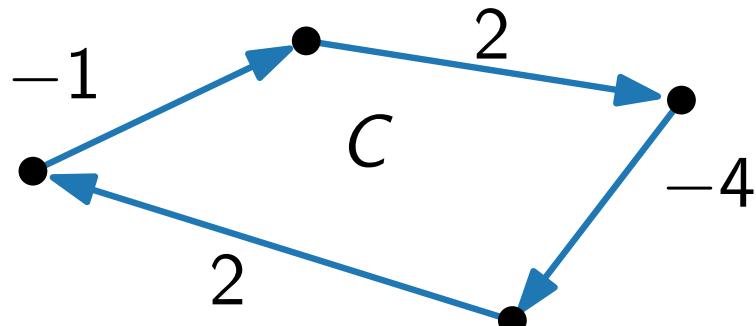
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

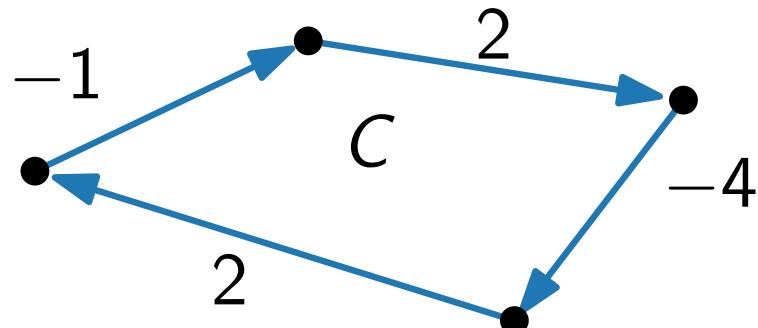
$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$



Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.

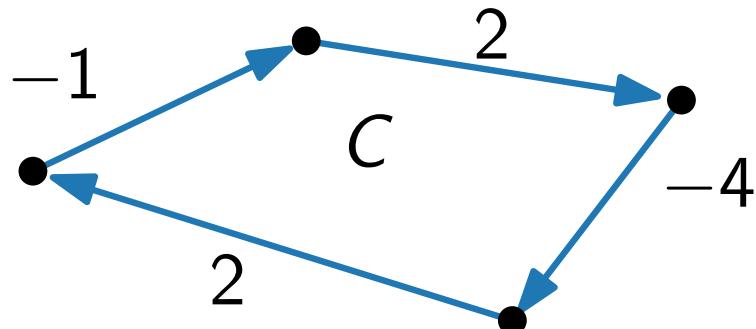
$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$$



Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



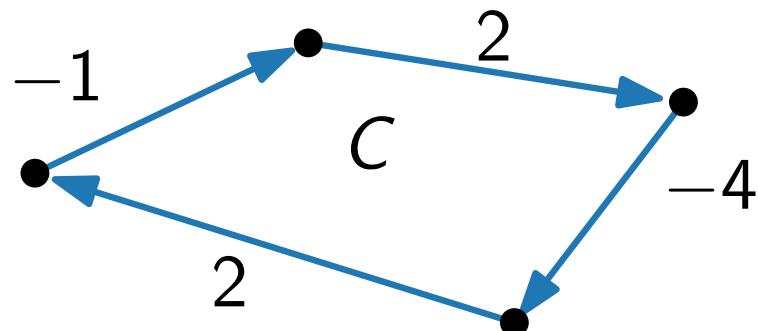
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ ⚡
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 \Rightarrow

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



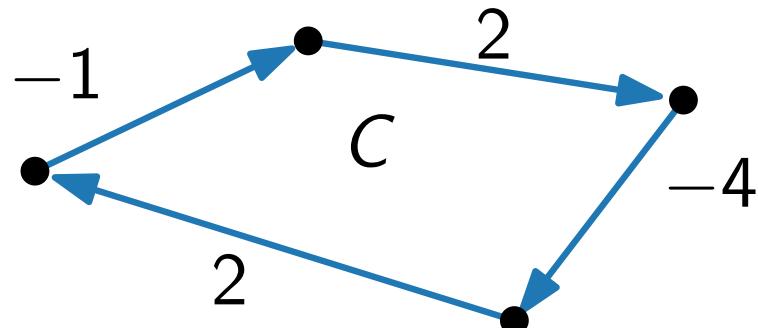
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ ⚡
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C .

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



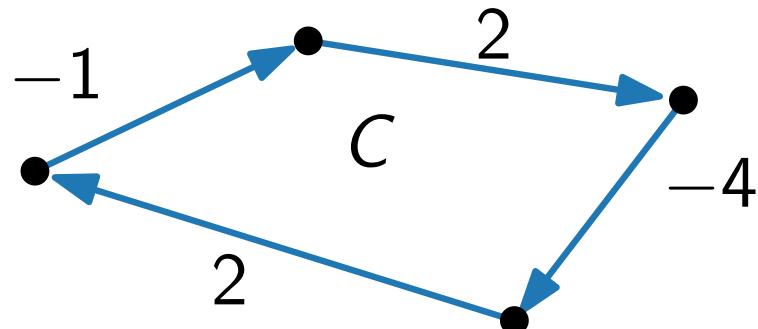
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ ⚡
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C . Aber $w(C) \geq 0$.

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



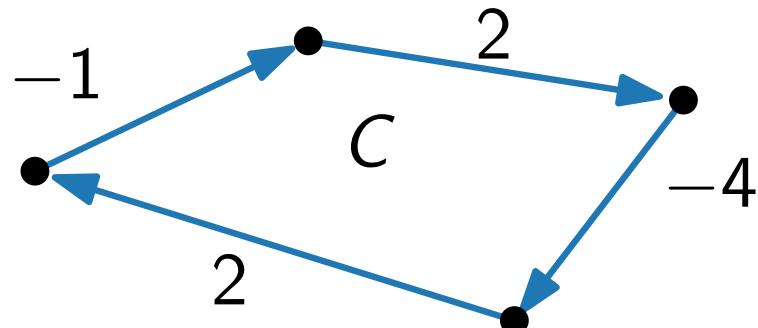
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ 
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C . Aber $w(C) \geq 0$. \Rightarrow

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



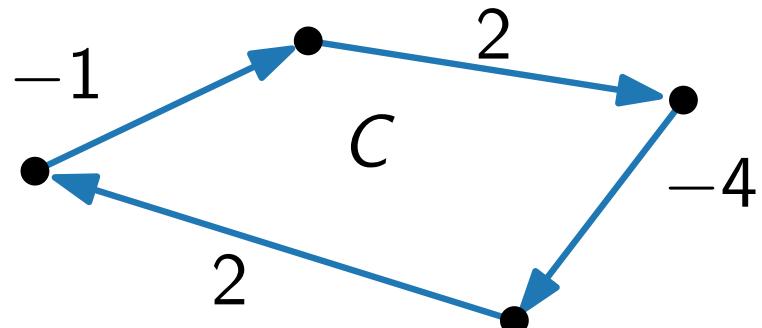
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ ⚡
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C . Aber $w(C) \geq 0$. $\Rightarrow w(\pi \setminus C)$

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



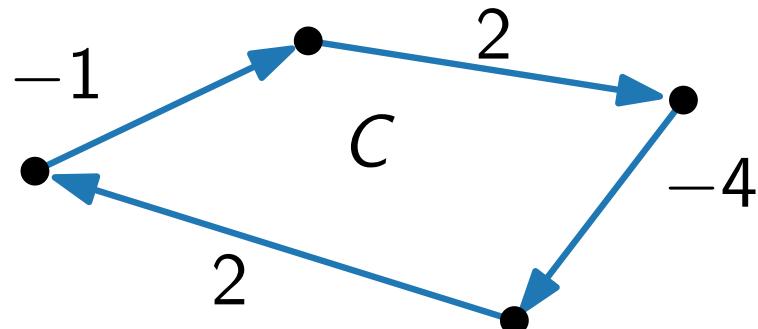
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ 
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C . Aber $w(C) \geq 0$. $\Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$
 \Rightarrow

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.



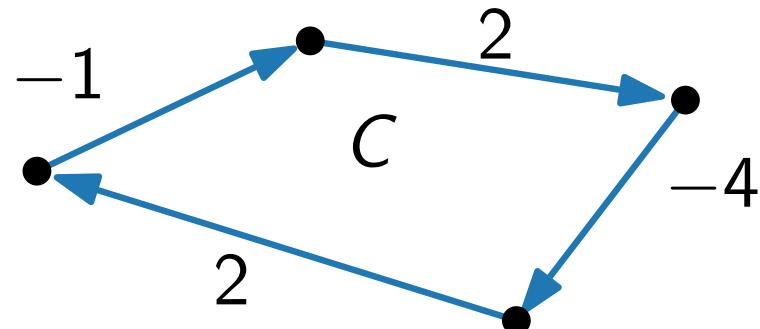
Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ ⚡
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C . Aber $w(C) \geq 0$. $\Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$
 \Rightarrow Es gibt einen kürzesten s - v -Weg mit $\leq n - 1$ Kanten.

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
 $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0$ 
2. Betrachte s - v -Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
 $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C . Aber $w(C) \geq 0$. $\Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$
 \Rightarrow Es gibt einen kürzesten s - v -Weg mit $\leq n - 1$ Kanten.

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \stackrel{?}{\leq} \delta(s, v)$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$.

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) =$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. $(*)$

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen $(*)$ gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. $(*)$

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen $(*)$ gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. $(*)$

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen $(*)$ gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt

$\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt

$\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

\Rightarrow

$\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. $(*)$

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen $(*)$ gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0$

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0 \Rightarrow$ Beh.

Schritt II

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt:

1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

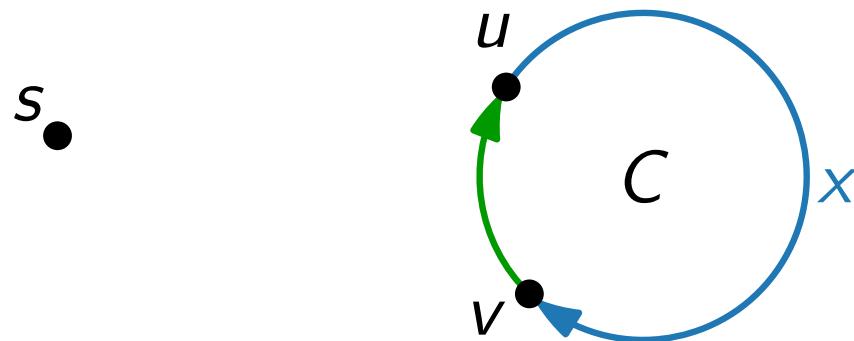
Wegen (*) gilt: $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0 \Rightarrow$ Beh. $n - k > 0$ □

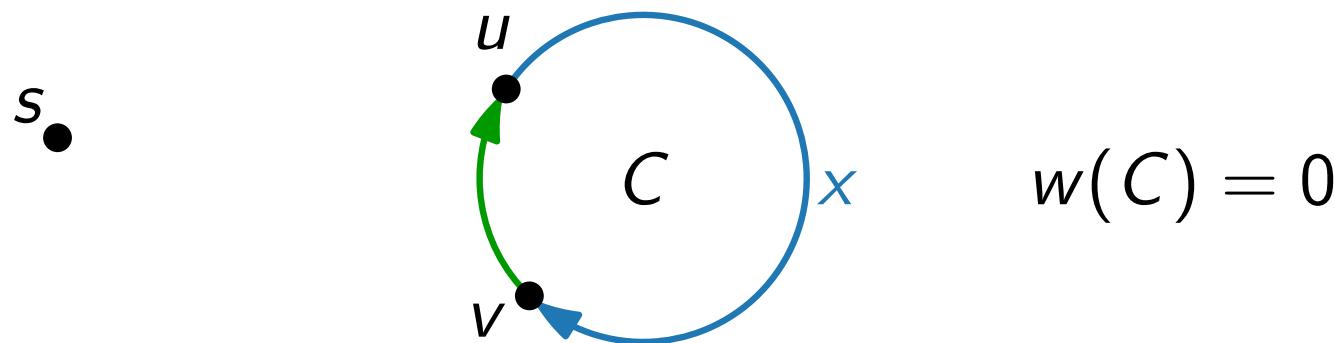
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



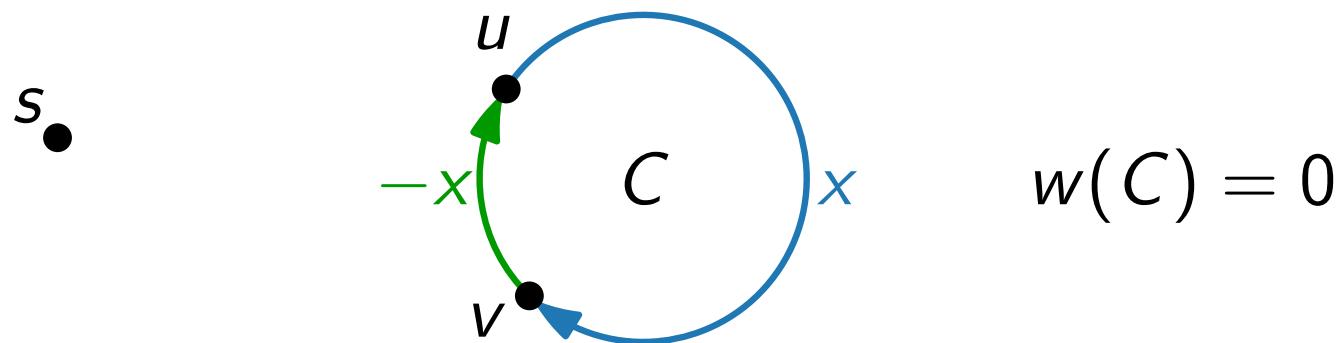
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



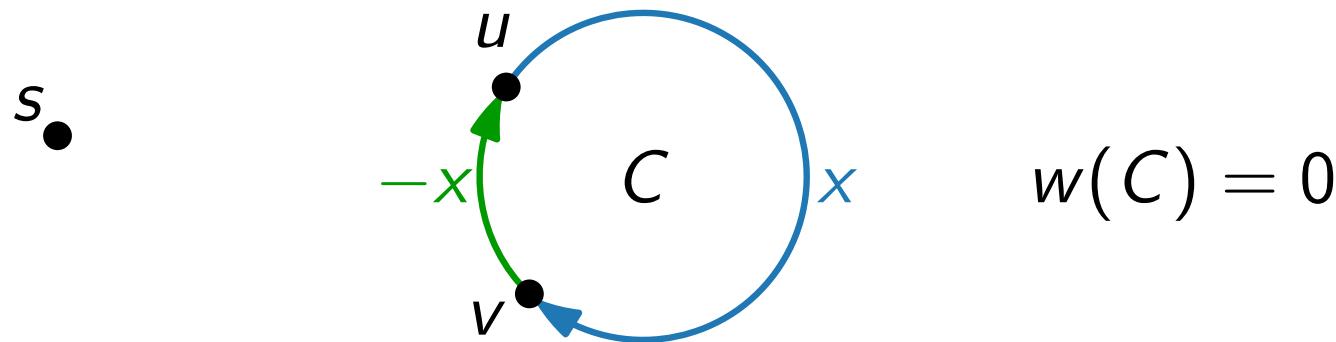
Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .

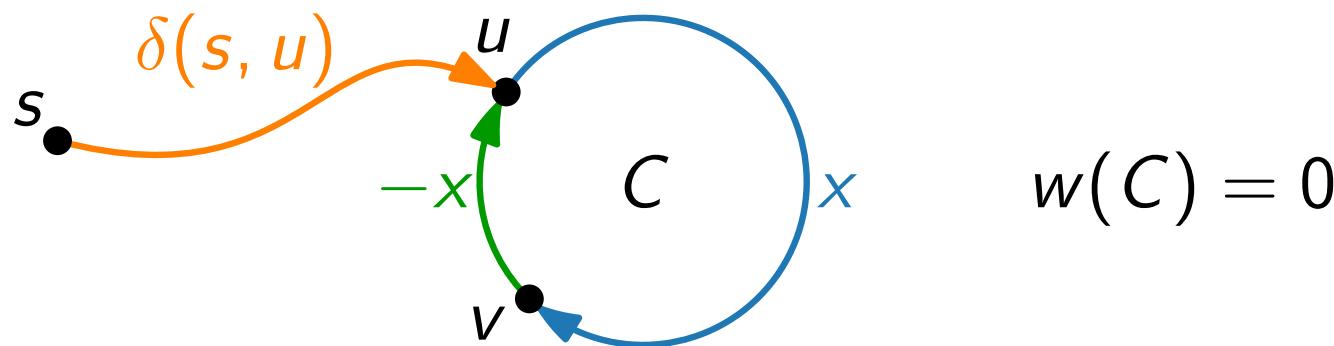


$$w(C) = 0$$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Schritt III

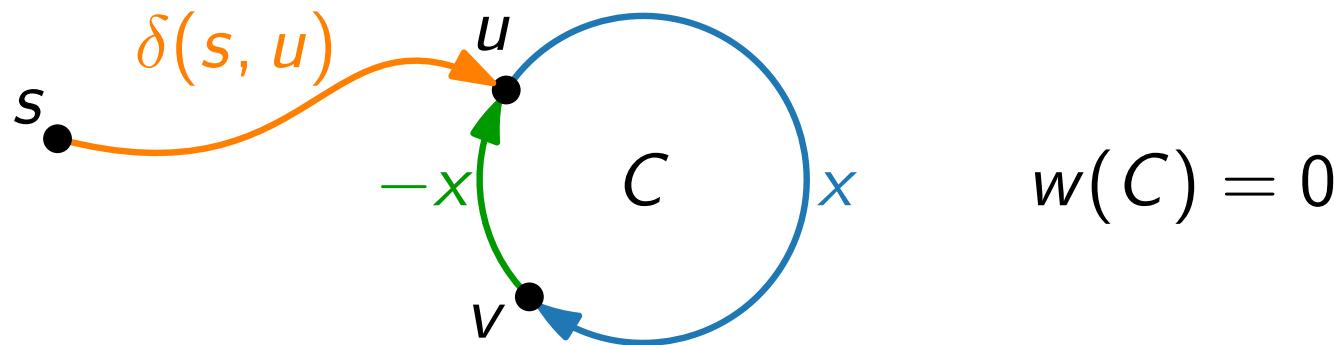
Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .

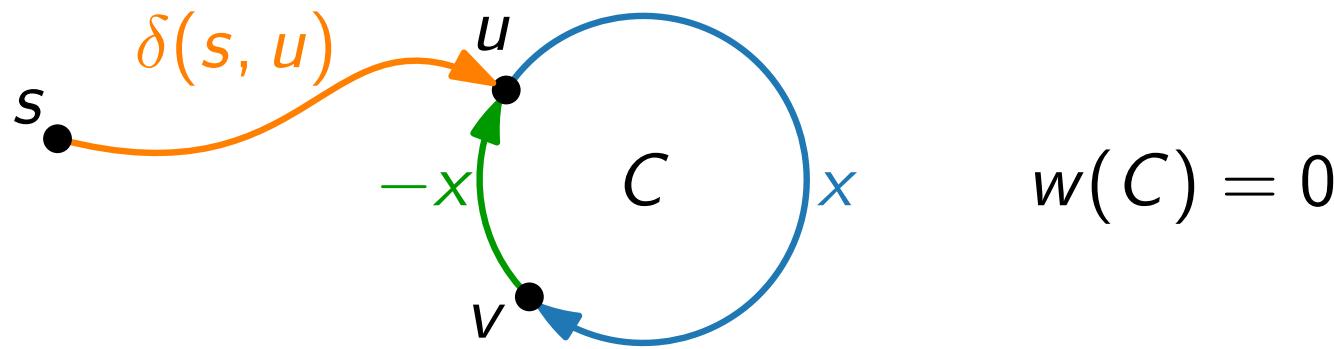


Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



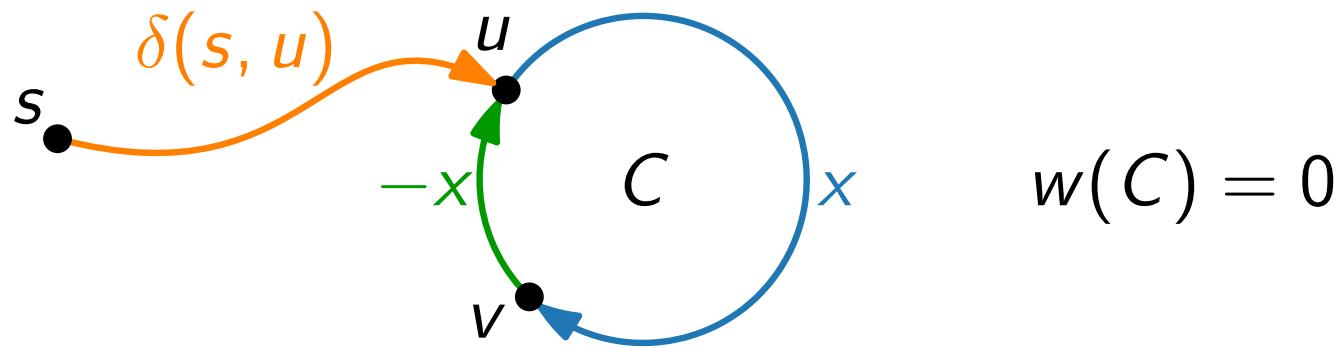
Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

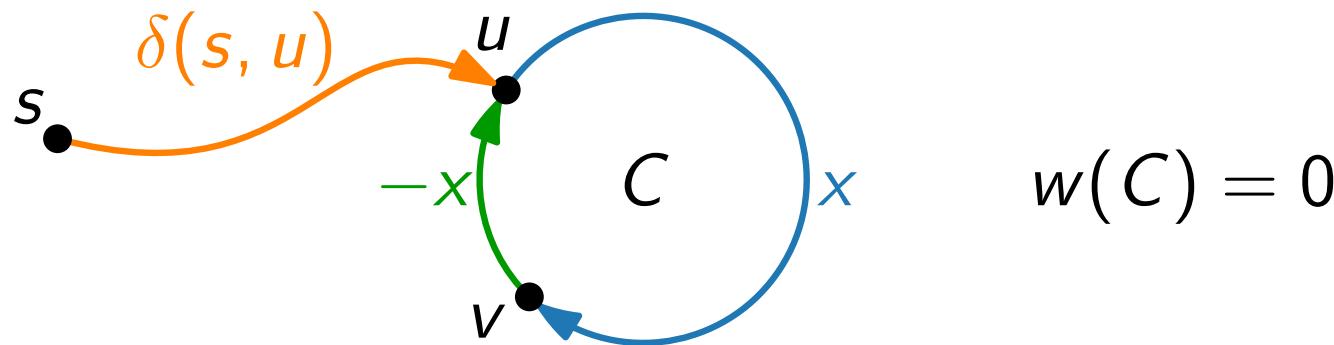
Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

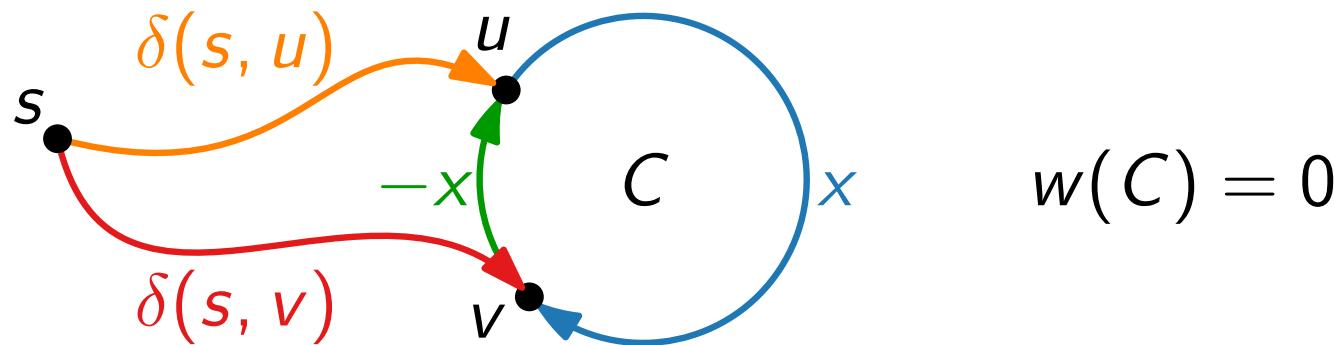
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

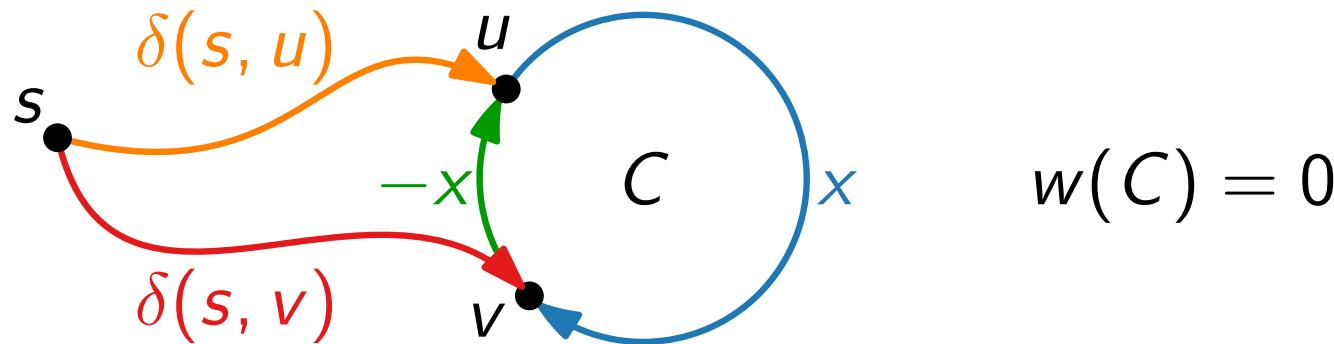
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



$$w(C) = 0$$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

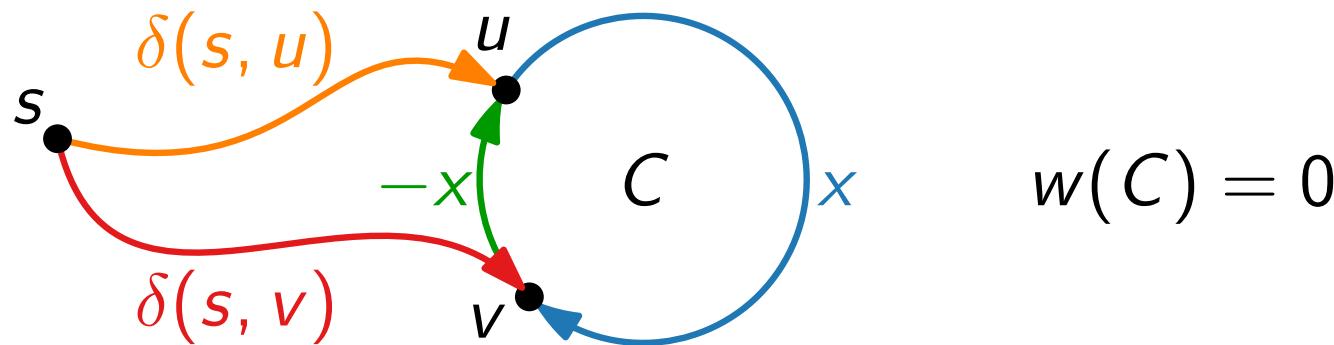
Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u) \quad \text{↯}$$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C .
 Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C .



Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$ ↳ zur Def. von δ .



Schritt IV

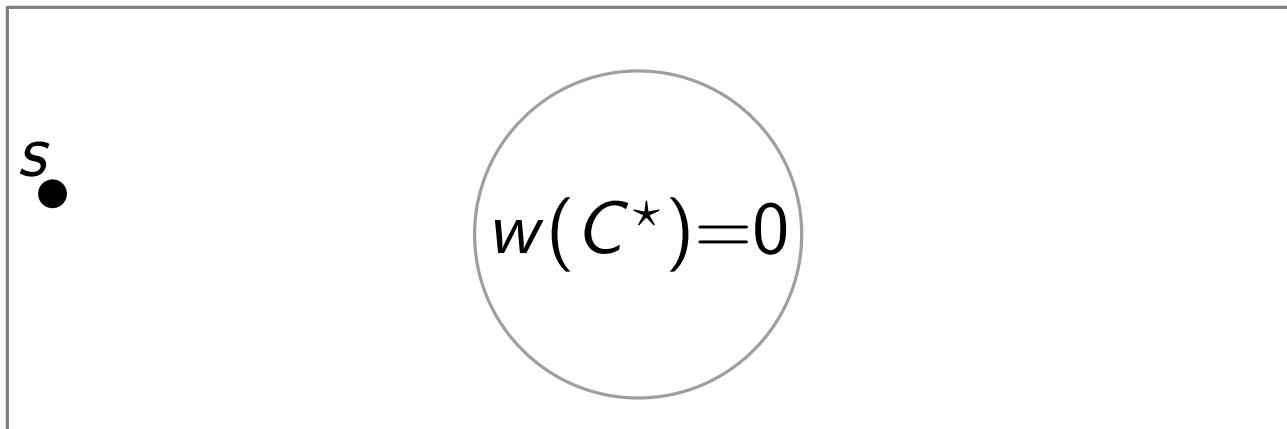
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

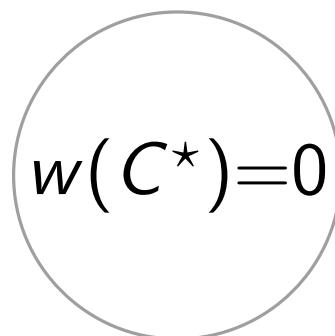
$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

s



Bestimme
 $v \in C^*$:
 Gehe von s
 aus n Kanten.

Schritt IV

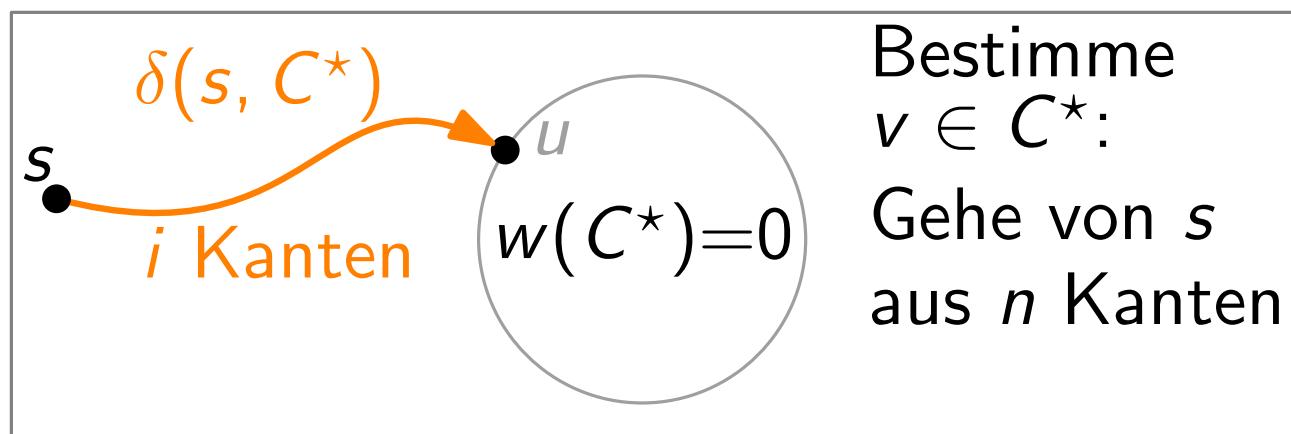
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

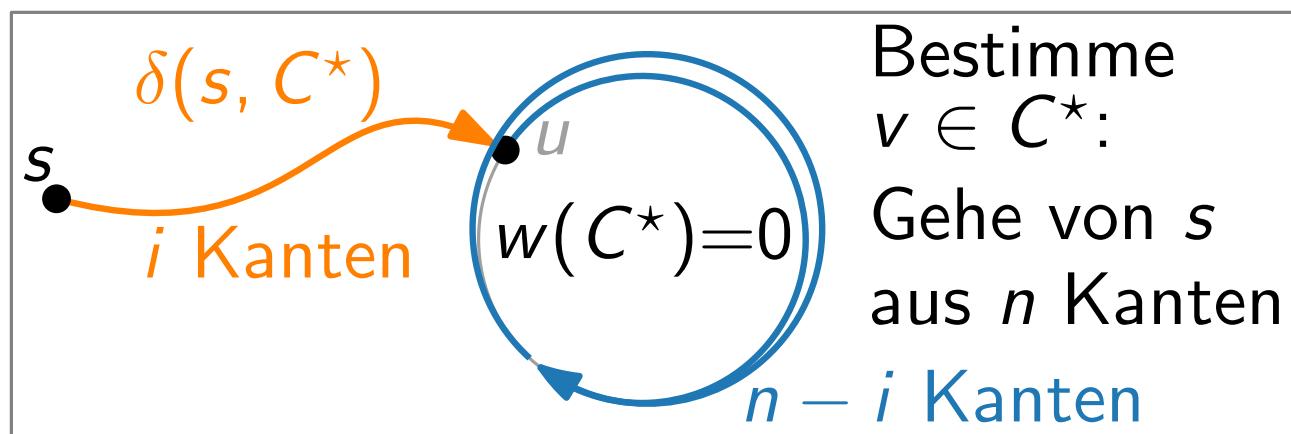
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

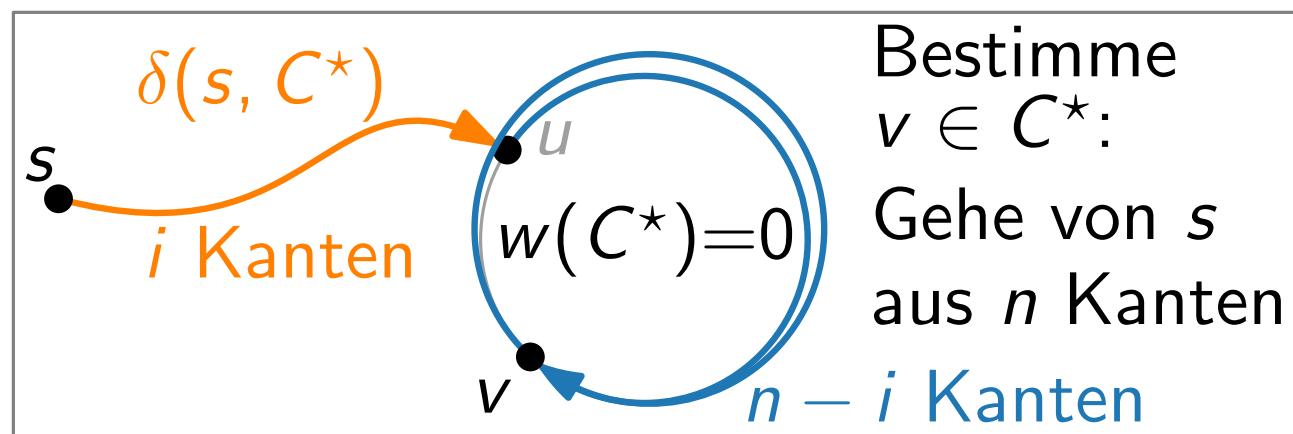
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt IV

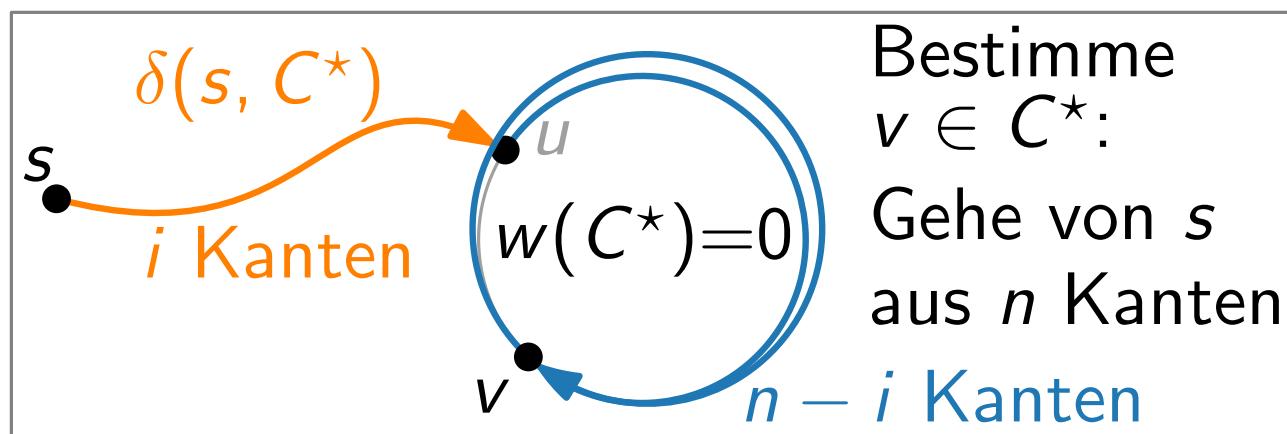
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für dieses v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v)$.

Schritt IV

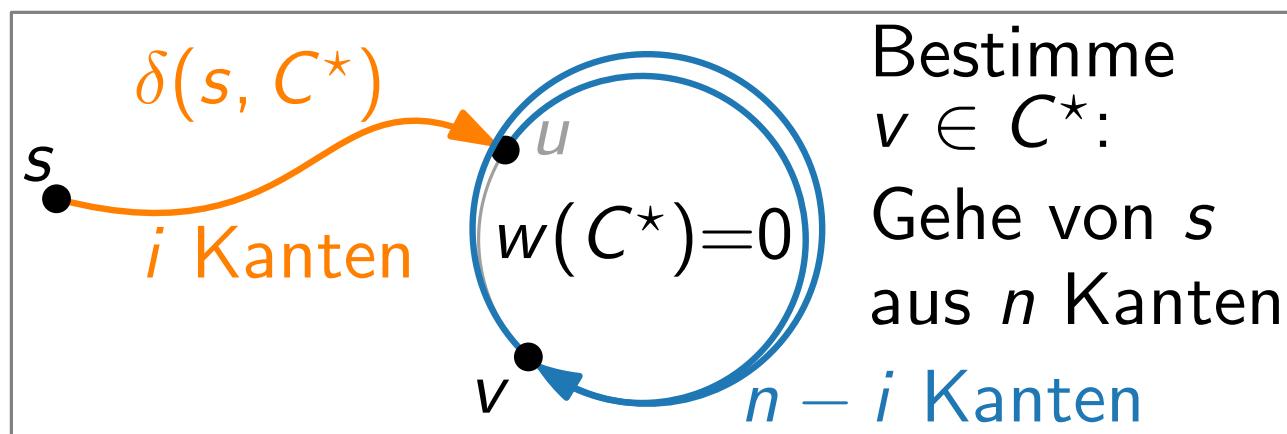
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für dieses v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v)$.
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v)$!!

Schritt IV

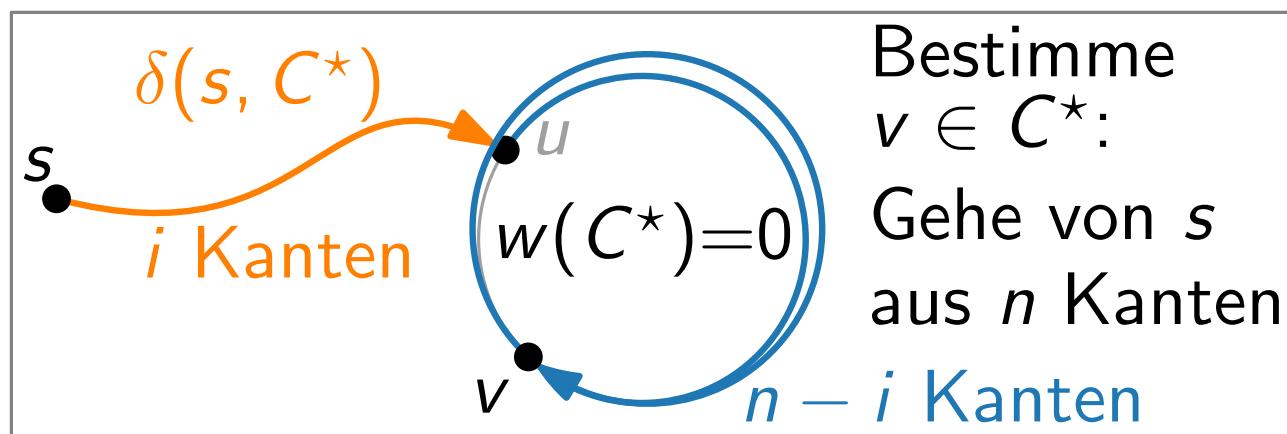
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für dieses v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v)$.
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v)$!!
Aber für welches k gilt
 $\delta_n(s, v) = \delta_k(s, v)$?

Schritt IV

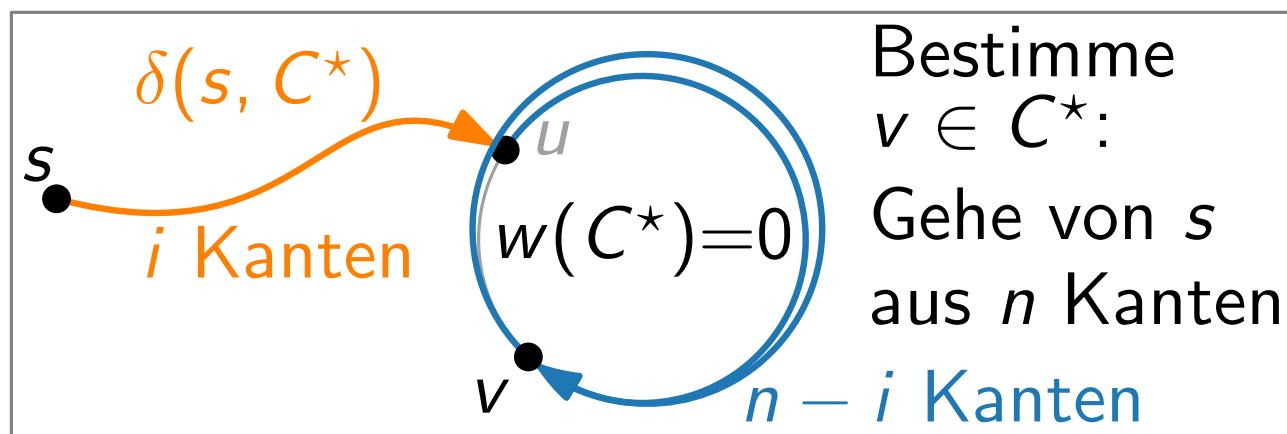
Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für dieses v :
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v)$.
 $\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v)$!!
Aber für welches k gilt
 $\delta_n(s, v) = \delta_k(s, v)$?
z.B. $k = n - |C^*|$, denn
 $w(C^*) = 0$ und $|C^*| \leq n$.

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = ?$$

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Schritt V

Falls $\mu^* = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls $\mu^* = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis C^* , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Klar...

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \overbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}^{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{+nt}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \overbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}^{+nt}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{+nt} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{+kt}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt} + kt}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t . $+ \frac{t(n-k)}{n-k} =$

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt + kt}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$



Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\overbrace{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}^{+nt + kt}}{n - k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t . $+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} =: \beta(t)$$

$+nt$ $+kt$
 $\underbrace{}_{\text{nt}}$ $\underbrace{}_{\text{kt}}$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t . $+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} =: \beta(t)$$

+nt
+kt

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .



Also:

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t . $+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} =: \beta(t)$$

+nt
+kt

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .



Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t

Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} =: \beta(t)$$

$$\overbrace{+nt}^{\text{+nt}} \quad \overbrace{+kt}^{\text{+kt}}$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(\quad) = \beta(\quad)$



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \quad \left. \right\} \quad (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \\ +kt}} =: \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(\quad) = \beta(\quad)$

$$(**)$$



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \quad \left. \right\} \quad (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} =: \beta(t)$$

$$\overbrace{+nt}^{\text{+nt}} \quad \overbrace{+kt}^{\text{+kt}}$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \quad \left. \right\} \quad (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} =: \beta(t)$$

$$\overbrace{+nt}^{\text{+nt}} \quad \overbrace{+kt}^{\text{+kt}}$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$ und Steigung 1



Schritt VI

Falls $\mu^* = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \quad \left. \right\} \quad (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt μ^* um t .

$$+ \frac{t(n-k)}{n-k} = +t$$



Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} =: \beta(t)$$

$$\overbrace{+nt}^{\text{+nt}} \quad \overbrace{+kt}^{\text{+kt}}$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t .

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$ und Steigung 1 $\Rightarrow \alpha \equiv \beta$. (**) 

Schritt VII

Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.



[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne

$$\delta_k(s, v) =$$

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\quad)$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(\quad)$ Zeit.

Schritt VII



Es gilt $\mu^* = \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

Schritt VII



Es gilt $\mu^* \stackrel{(***)}{=} \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

- Berechne μ^* nach $(***)$ in $O(\quad)$ Zeit.

Schritt VII



Es gilt $\mu^* \stackrel{(***)}{=} \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

- Berechne μ^* nach $(***)$ in $O(V^2)$ Zeit. □

Schritt VII



Es gilt $\mu^* \stackrel{(***)}{=} \min_{v \in V(G)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$.

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis C^* mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^*) = \mu^*$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der μ^* in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s, s) = 0$ und für jedes $v \neq s$, setze $\delta_0(s, v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$

Für jedes $v \in V(G)$, berechne // in $O(\text{indeg}(v))$ Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{u: uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

Das ist ein kleines
dynamisches Programm! :-)

- Berechne μ^* nach $(***)$ in $O(V^2)$ Zeit. □

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
- Wie soll ich lernen?
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!

Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!
 - Keep cool!



Wie lerne ich auf die Klausur?

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!
 - Keep cool!  (Mehr siehe WueCampus.)
 - In der Woche 23.–27.3. findet ein Repetitorium statt.

Wie lerne ich auf die Klausur?

Viel Erfolg!

- Welcher Stoff kommt dran?
Alles außer den Details von Insert/Delete bei RS-Bäumen.
- Wie soll ich lernen?
 - Übungsaufgaben im Buch (oder im Internet) lösen.
 - Durch die Folien gehen, wichtige Definitionen abschreiben.
 - Bei Fragen auf den Folien anhalten und antworten.
 - Sich gegenseitig abfragen.
- Erstklausur (Mi, 18.02.) oder Zweitklausur (Fr, 10.04.)?
 - Je nachdem, wie gut Sie sich vorbereitet fühlen.
 - Nehmen Sie sich nicht zu viel auf einmal vor!
 - Keep cool!  (Mehr siehe WueCampus.)
 - In der Woche 23.–27.3. findet ein Repetitorium statt.