Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

# Algorithmen und Datenstrukturen

## Vorlesung 24:
## Problem des Handlungsreisenden (TSP) – Approximation & exakte Berechnung

*Alexander Wolff*

*Wintersemester 2025*

# Letzte Chance!

## Anmeldung zur Klausur nur bis 31. Januar.

(Aber die Nachklausur ist auch nicht schlecht – evtl. mit Repetitorium :-)

# Das Problem

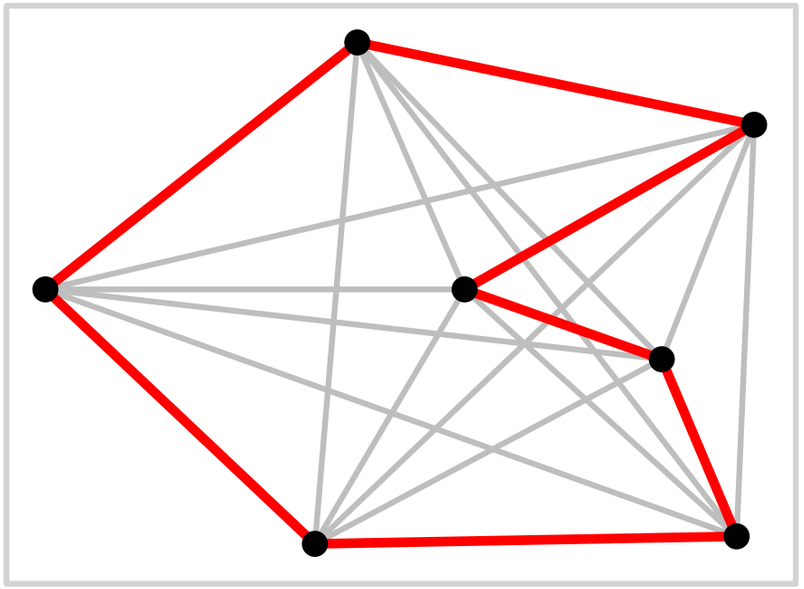
**Definition.** *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G$ mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis $K$ in $G$ mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein Hamiltonkreis besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

**Beispiel.** $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



**Problem.**

- TSP ist NP-schwer
- und schwer zu approximieren.

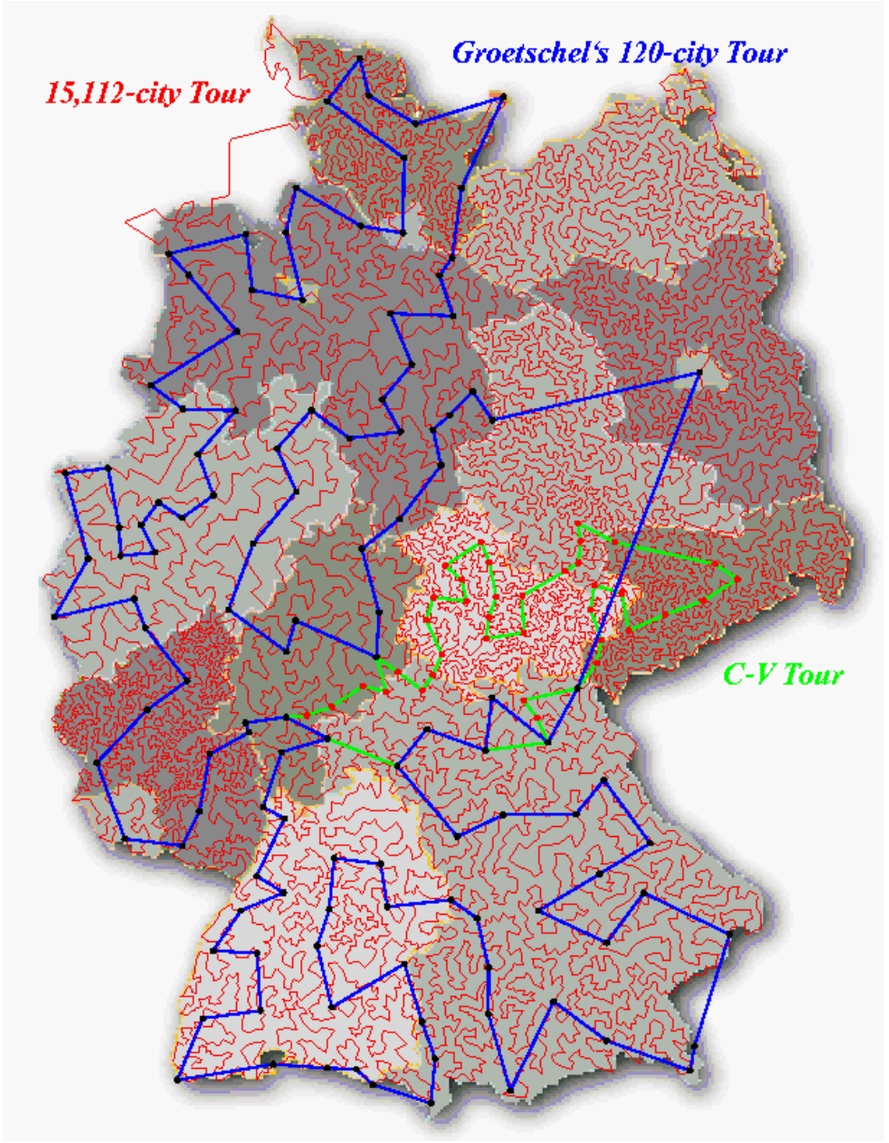
# Etwas Geschichte

Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein.

Von einem alten Commis-Voyageur [1832]

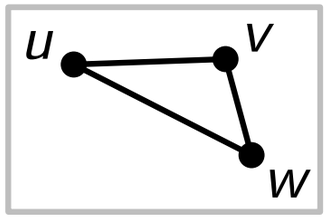
Rekord I: optimale 120-Städte-Tour [Groetschel, 1977]

Rekord II: optimale 15.112-Städte-Tour
[Applegate, Bixby, Chvátal, Cook 2001]



# Was tun? – Mach das Problem leichter!

**Problem:** *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

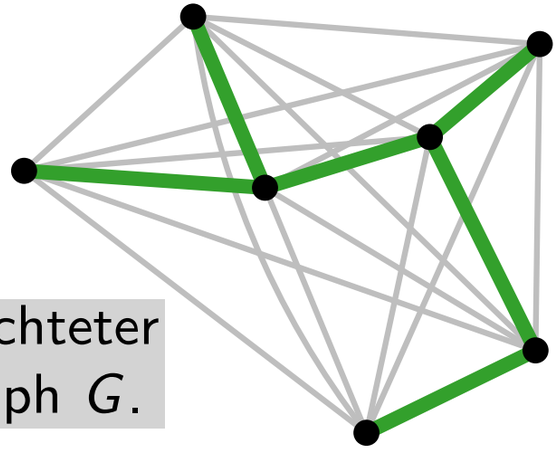



Gegeben: unger. vollständiger Graph $G$ mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in $G$ mit minimalen Kosten.

**Satz.** Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für $\Delta$-TSP.

*Beweis.*



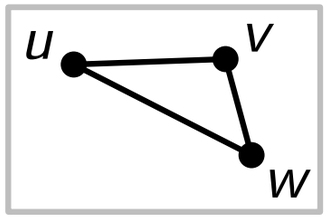
Geg. gewichteter vollst. Graph $G$.

*Algorithmus:*

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

# Was tun? – Mach das Problem leichter!

**Problem:** *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

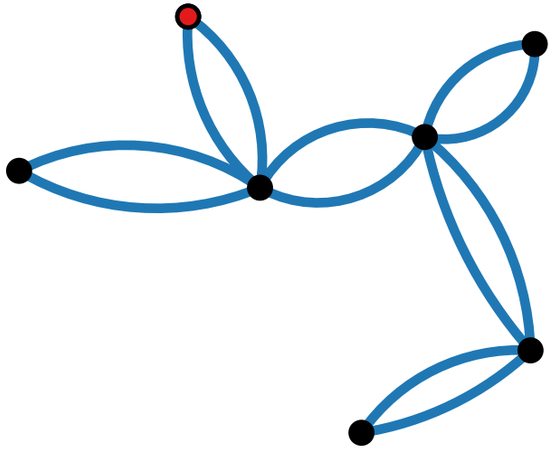



Gegeben: unger. vollständiger Graph $G$ mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in $G$ mit minimalen Kosten.

**Satz.** Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für $\Delta$-TSP.

*Beweis.*



*Algorithmus:*

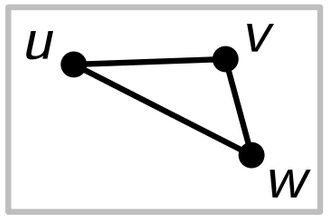
Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

# Was tun? – Mach das Problem leichter!

**Problem:** *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

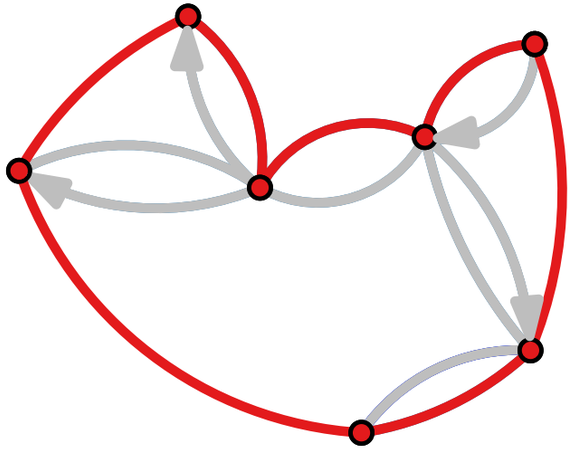



Gegeben: unger. vollständiger Graph $G$ mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in $G$ mit minimalen Kosten.

**Satz.** Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für $\Delta$-TSP.

*Beweis.*



*Algorithmus:*

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

*Die „Kunst“ der unteren Schranke!*

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!

# Exakte Berechnung: Brute Force

**Algorithmus:**

- Für jede Permutation $\sigma$ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

**Laufzeit:**

Anzahl Permutationen von $n$ Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$

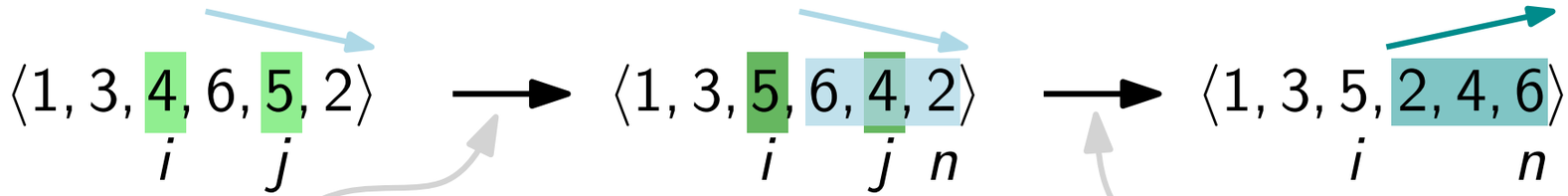
**Speicher:** $O(n)$ für: bisher beste, aktuelle & nächste Permutation.

# Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation $\sigma$, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index $j$ mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*




- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \ldots, \sigma(n)\rangle$ um.

# Wie groß ist $n!$ ?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Stirlingformel [James Stirling, 1692–1770]

Für $n \to \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi}\, \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\, \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

# Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten $v_1$.

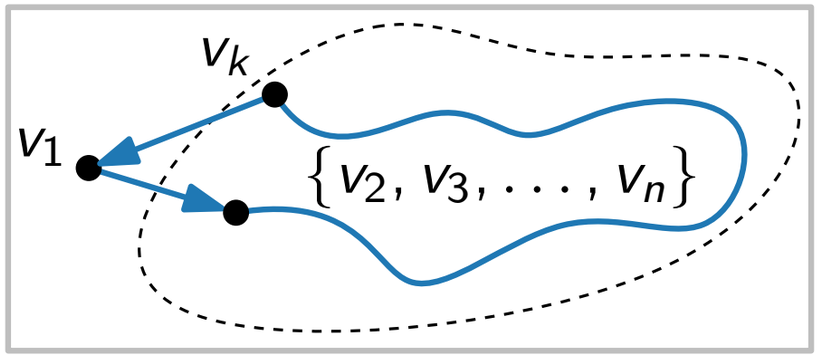
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines $v_1$-$v_i$-Wegs *durch alle Knoten in* $W$.

## Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$




Und für $W$ mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor $v_i$

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \; T[W \setminus \{v_i\}, v_j] \; + \; c(v_j, v_i)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{OPT} = \min_{k \neq 1} \; T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] \; + \; c(v_k, v_1)$$

Index des letzten Knotens vor $v_1$

# Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge $V$, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

**for** $i = 2$ **to** $n$ **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

**for** $j = 2$ **to** $n-1$ **do**
  **foreach** $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    **foreach** $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

**return** $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

**Laufzeit:** Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare $(W, v_i)$ mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq 2^{n-1} \cdot n$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:** $O(n \cdot 2^n)$

# Vergleich

| | Brute Force | Bellman-Held-Karp |
|---|---|---|
| Laufzeit | $2^{\Theta(n \log n)}$ | $O\big(n^2 \cdot 2^n\big)$ |
| Speicher | $O(n)$ | $O\big(n \cdot 2^n\big)^\star$ |

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

$^\star$) Wie wär's, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot,\cdot]$ speichern würden?

Zur Berechnung von $T[W,\cdot]$ brauchen wir nur die Einträge $T[W',\cdot]$ mit $|W'| = |W| - 1$.

Welches $j$ maximiert $\binom{n}{j}$? $j = \frac{n}{2}$.

Wie groß ist $\binom{n}{n/2}$? In $\Theta(2^n/\sqrt{n})$. :-(

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)