

Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 23: Greedy- und Approximationsalgorithmen

Operations Research

Optimierung für Wirtschaftsabläufe:

- Standortplanung
- Ablaufplanung
- Flottenmanagement
- Pack- und Zuschnittprobleme
- ...

Operations Research

Optimierung für Wirtschaftsabläufe:

- Standortplanung
- Ablaufplanung
- Flottenmanagement
- Pack- und Zuschnittprobleme
- ...

Werkzeuge:

Statistik, Algorithmen, Wahrscheinlichkeitstheorie, Spieltheorie, Graphentheorie, mathematische Programmierung, Simulation...

Operations Research

Optimierung für Wirtschaftsabläufe:

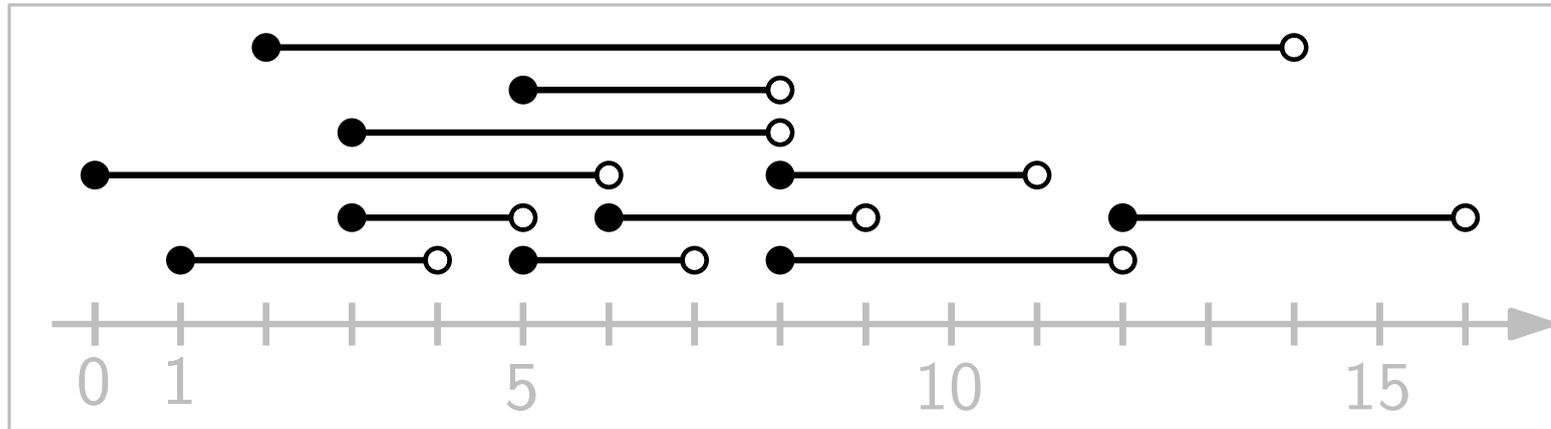
- Standortplanung
- Ablaufplanung
- Flottenmanagement
- Pack- und Zuschnittprobleme
- ...

Werkzeuge:

Statistik, Algorithmen, Wahrscheinlichkeitstheorie, Spieltheorie, Graphentheorie, mathematische Programmierung, Simulation...

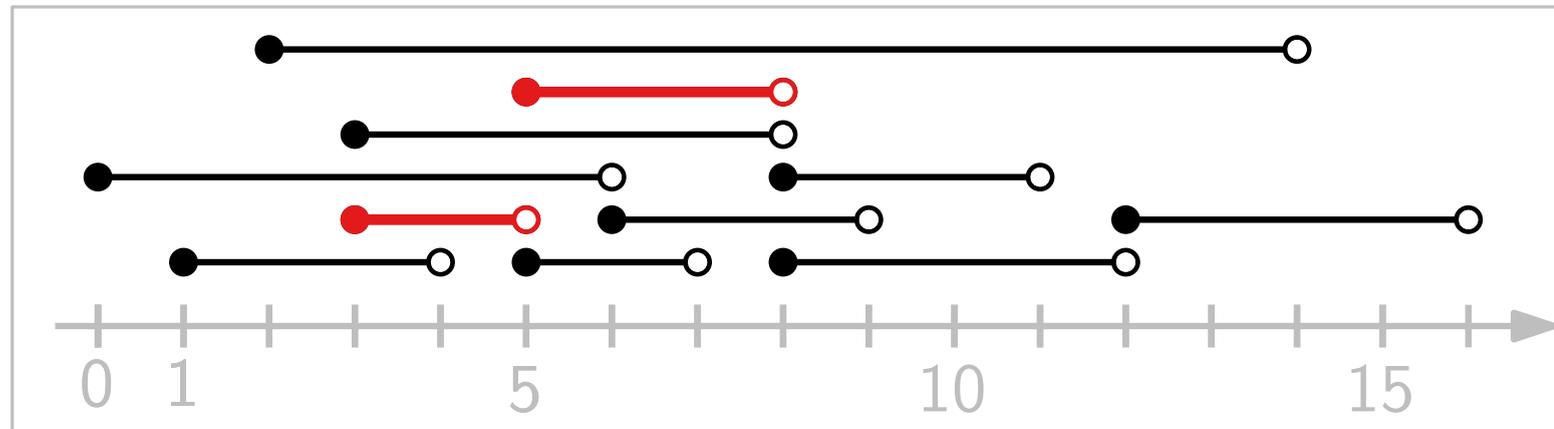
Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten* mit $a_1 = [s_1, e_1), \dots, a_n = [s_n, e_n)$.



Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

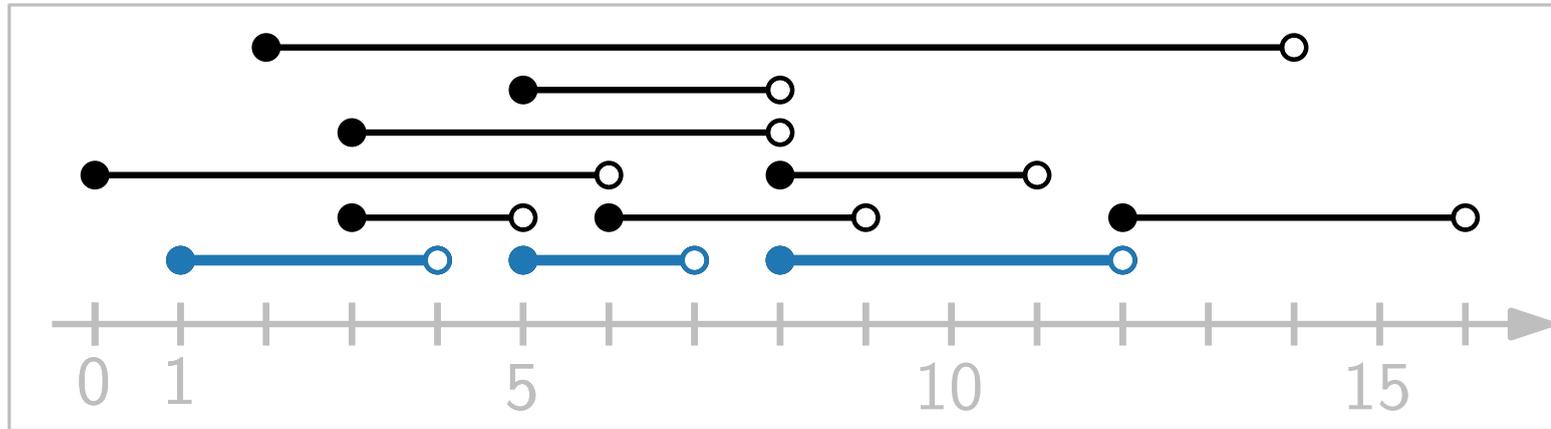
Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten* mit $a_1 = [s_1, e_1), \dots, a_n = [s_n, e_n)$.



Aktivitäten a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten* mit $a_1 = [s_1, e_1), \dots, a_n = [s_n, e_n)$.

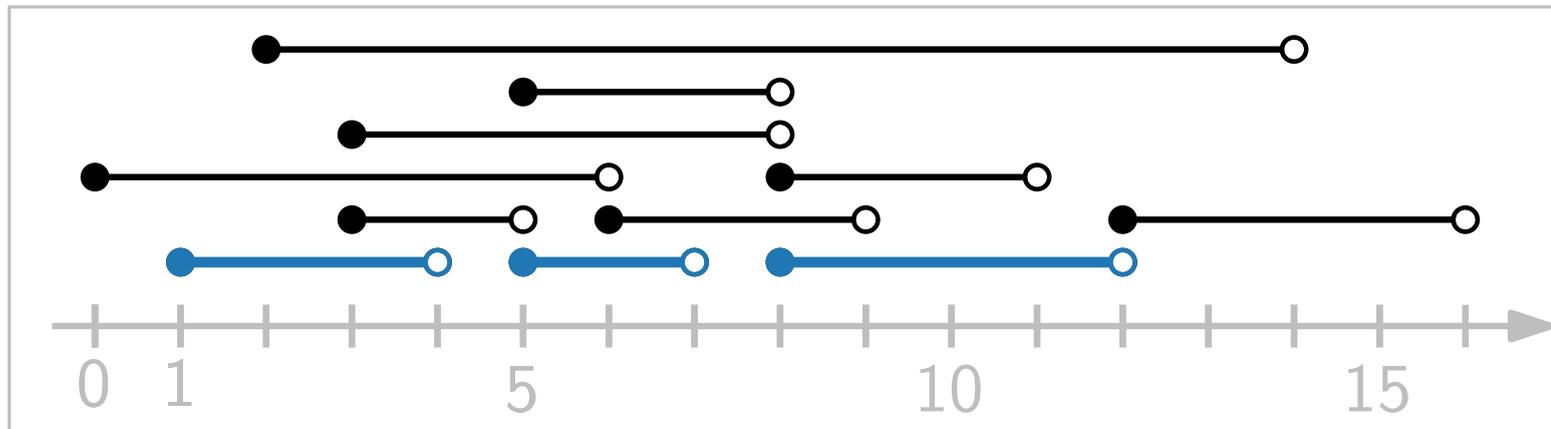


Aktivitäten a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten* mit $a_1 = [s_1, e_1), \dots, a_n = [s_n, e_n)$.



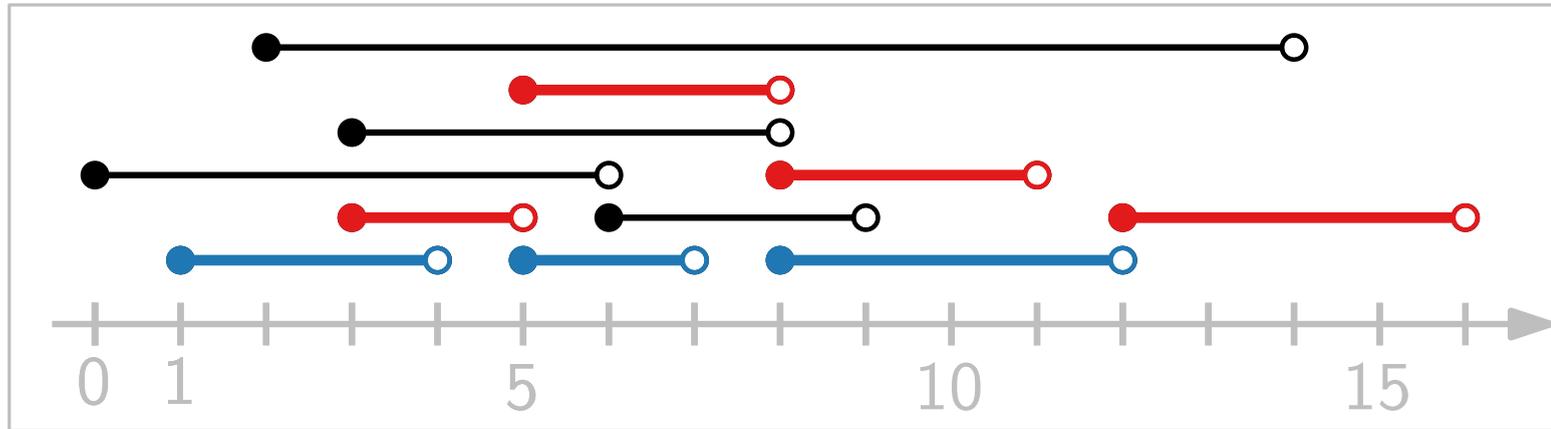
Aktivitäten a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten* mit $a_1 = [s_1, e_1), \dots, a_n = [s_n, e_n)$.



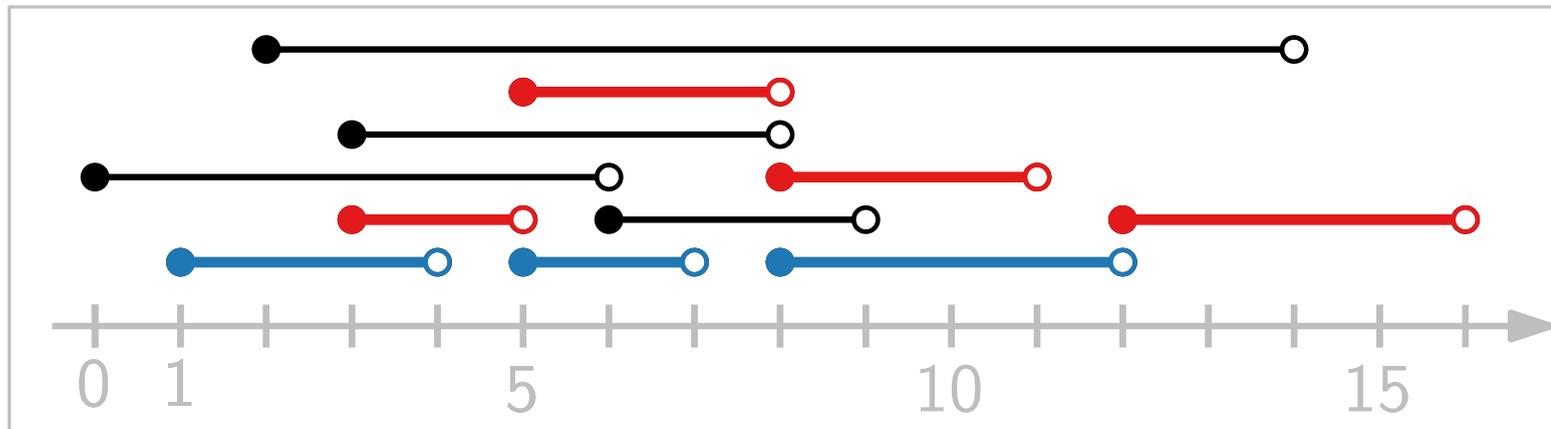
Aktivitäten a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten* mit $a_1 = [s_1, e_1), \dots, a_n = [s_n, e_n)$.



Aktivitäten a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

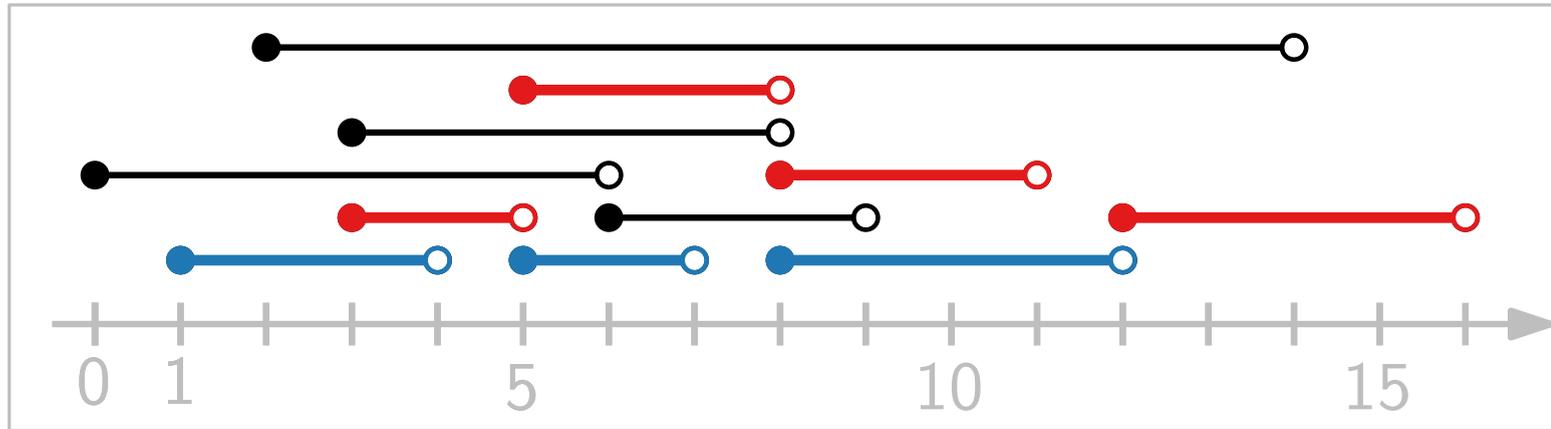
Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Grund:

Ein einfaches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von *Aktivitäten* mit $a_1 = [s_1, e_1), \dots, a_n = [s_n, e_n)$.



Aktivitäten a_i und a_j sind *kompatibel*, wenn $a_i \cap a_j = \emptyset$.

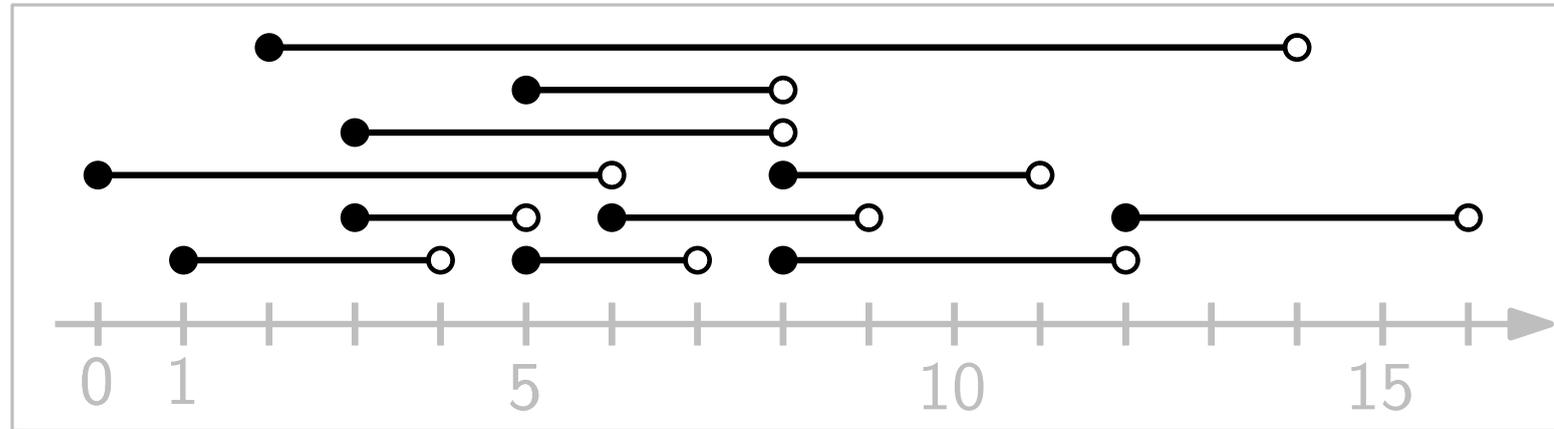
Die Aktivitäten in $A' \subset A$ sind *paarweise kompatibel*, wenn für jedes Paar $a_i, a_j \in A'$ gilt, dass a_i und a_j kompatibel sind.

Gesucht: eine größtmögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

Grund: Aktivitäten (à 1€), die gleiche Ressource benutzen

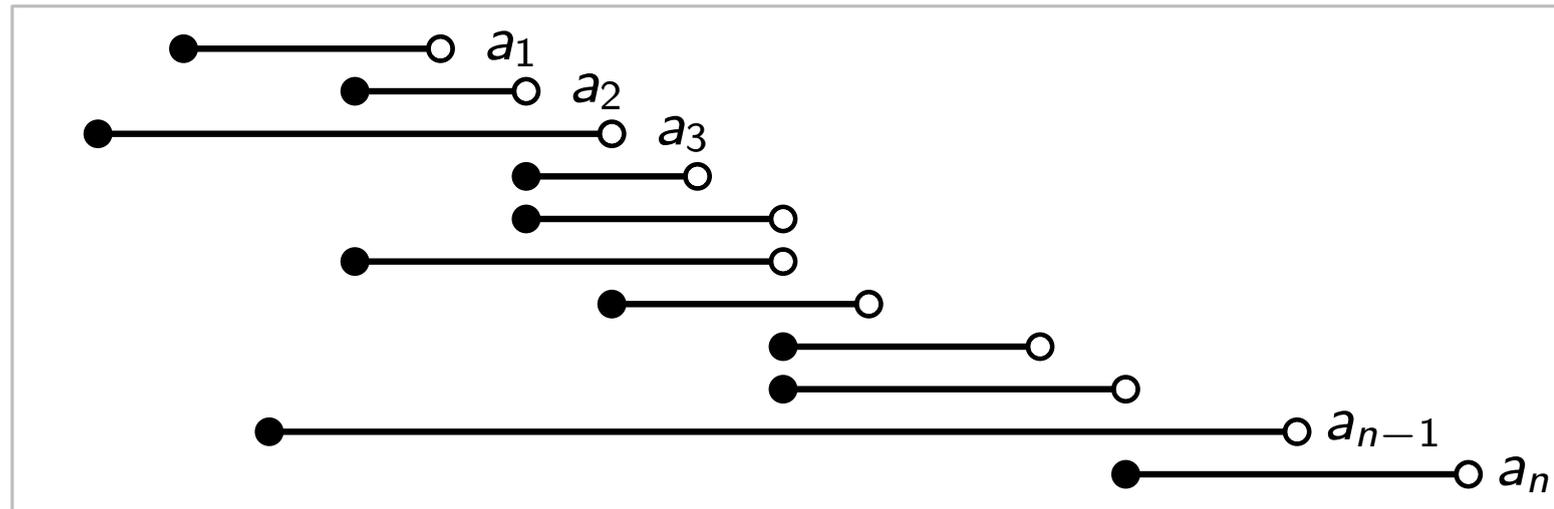
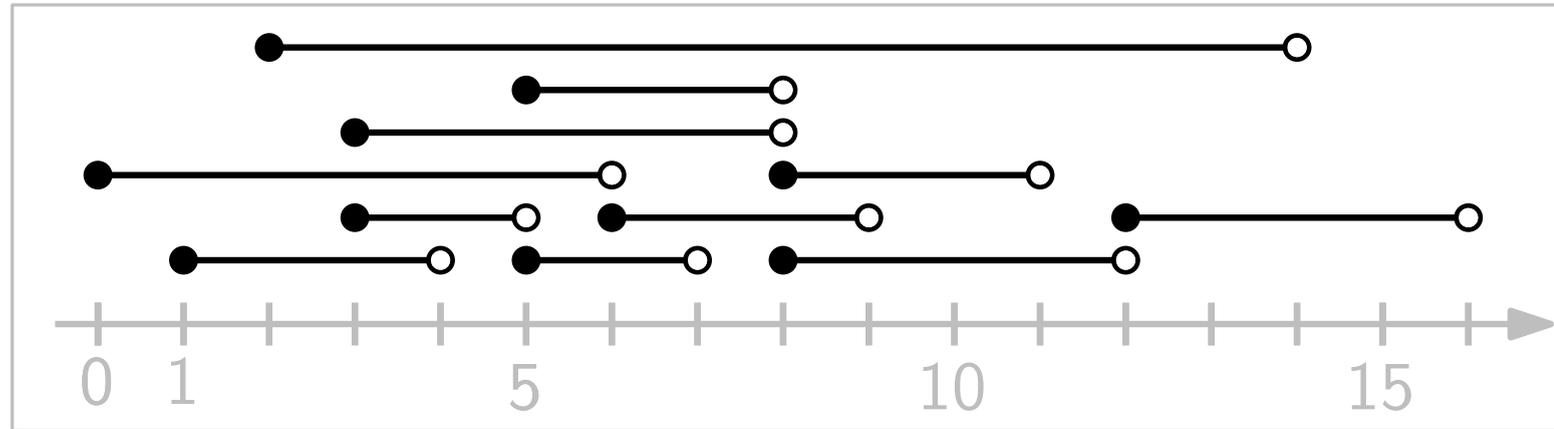
Ein kleiner technischer Trick

Wir nummerieren (für den Rest der Vorlesung) die Aktivitäten so, dass für die Endtermine gilt $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



Ein kleiner technischer Trick

Wir nummerieren (für den Rest der Vorlesung) die Aktivitäten so, dass für die Endtermine gilt $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



Charakterisierung optimaler Lösungen

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit

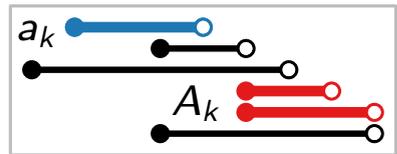
Charakterisierung optimaler Lösungen

- Idee:** Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?
- Intuition:** Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.

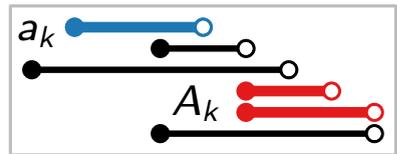


Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



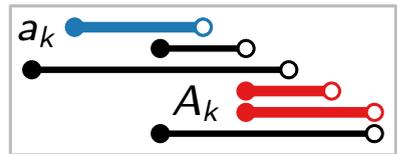
Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k .

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

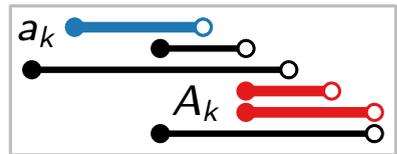
Sei L_k eine optimale Lösung von A_k .

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k .

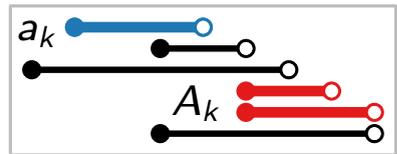
Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$. Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k .

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k .

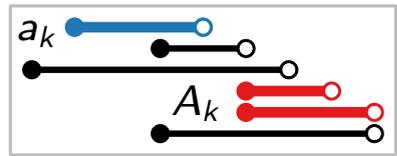
Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$. Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k .
 \Rightarrow es gibt eine opt. Lösung von A_k , die a_m enthält.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k .

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

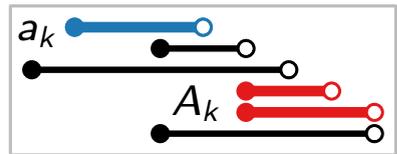
Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$. Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k .
 \Rightarrow es gibt eine opt. Lösung von A_k , die a_m enthält.

Beweis.

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k .

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

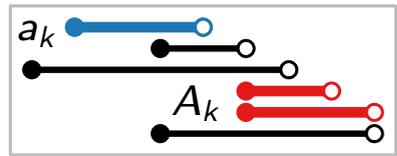
Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$. Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k .
 \Rightarrow es gibt eine opt. Lösung von A_k , die a_m enthält.

Beweis. *Austauschargument!*

Charakterisierung optimaler Lösungen

Idee: Sei L optimale Lösung für A .
Welche Aktivität hat gute Chancen die erste („linkeste“) in L zu sein?

Intuition: Die Aktivität a_1 mit frühester Endzeit –
weil a_1 die gemeinsame Ressource am wenigsten einschränkt.



Sei $A_k = \{a_i \in A : s_i \geq e_k\}$ die Menge der Aktivitäten, die nach Ablauf von a_k beginnen.

Sei L_k eine optimale Lösung von A_k .

Falls Intuition korrekt, dann ist $\{a_1\} \cup L_1$ optimal.

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$. Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k .
 \Rightarrow es gibt eine opt. Lösung von A_k , die a_m enthält.

optimale
Teilstruktur!

Beweis. *Austauschargument!*

Greedy – rekursiv

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$. Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k .
 \Rightarrow es gibt eine opt. Lösung von A_k , die a_m enthält.

optimale
Teilstruktur!

Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

Satz. Sei $A_k \neq \emptyset$. Sei a_m Aktivität mit frühester Endzeit in A_k .
⇒ es gibt eine opt. Lösung von A_k , die a_m enthält.

optimale
Teilstruktur!

Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
    e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
    // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
    return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
    return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

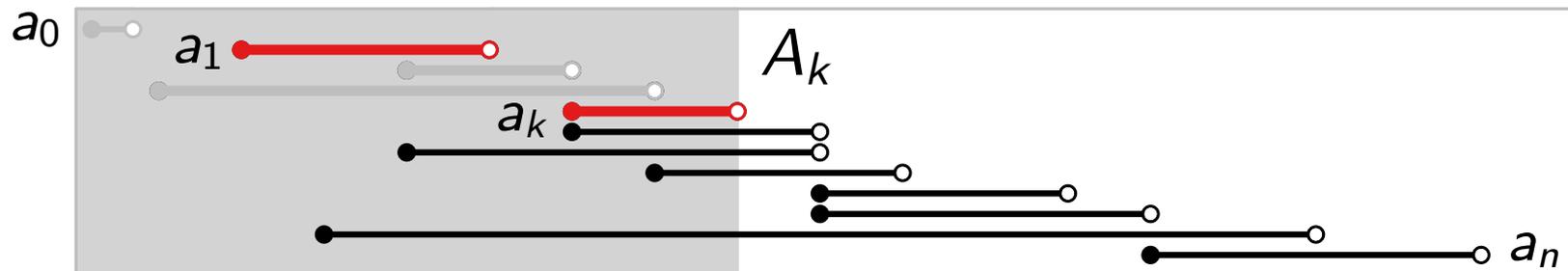
```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

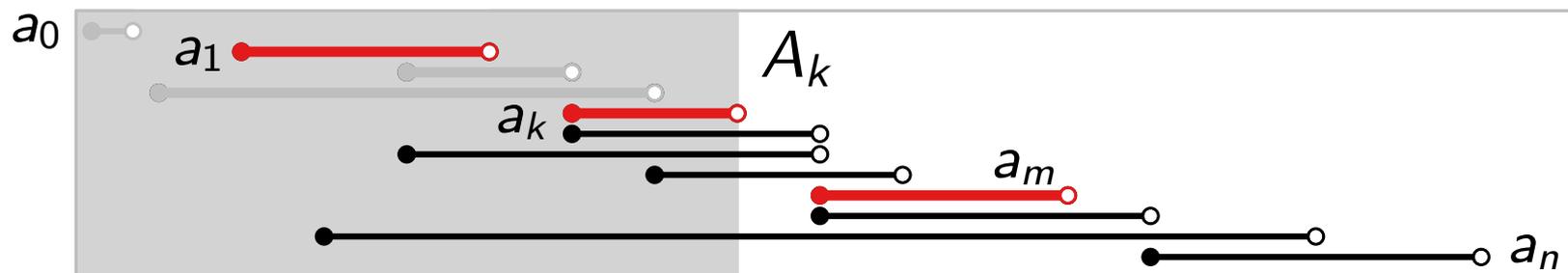
```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

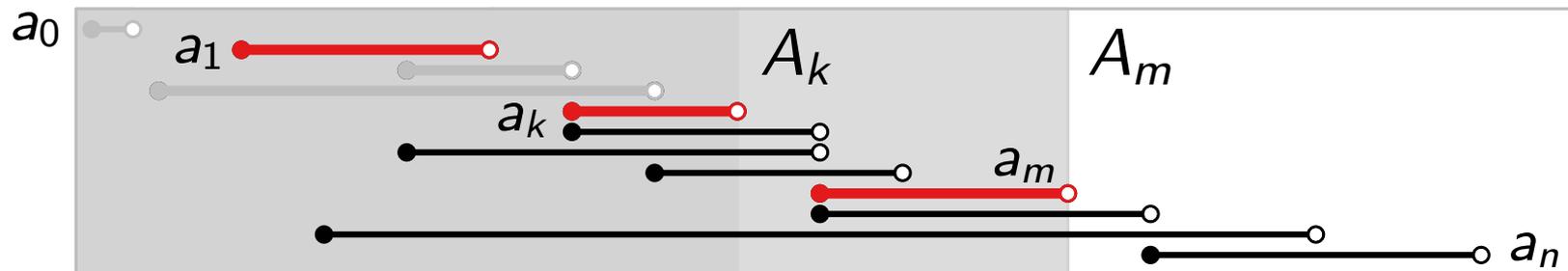
```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

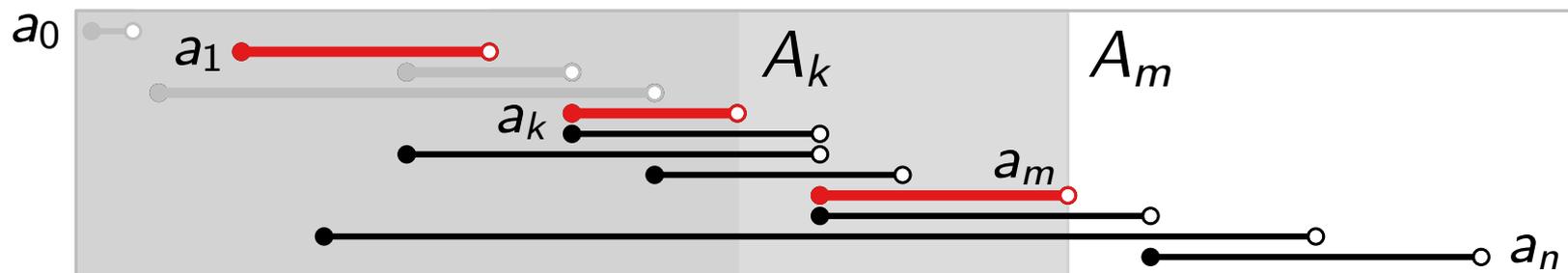
```
  m = k + 1; n = s.length
```

```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while
```

```
  |
```

```
  return  $\{a_m\} \cup \text{GreedyRecursiveMain}(s, e, m)$ 
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

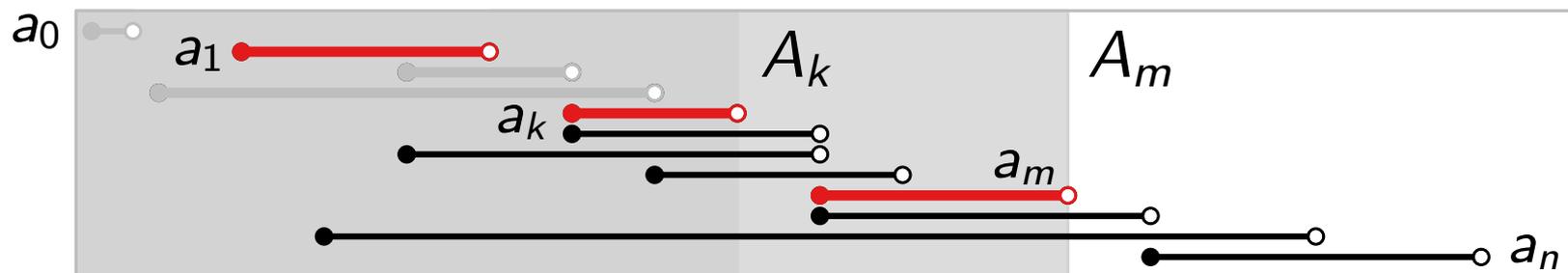
```
  m = k + 1; n = s.length
```

```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  return { $a_m$ }  $\cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒ A0 = A
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für Ak
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

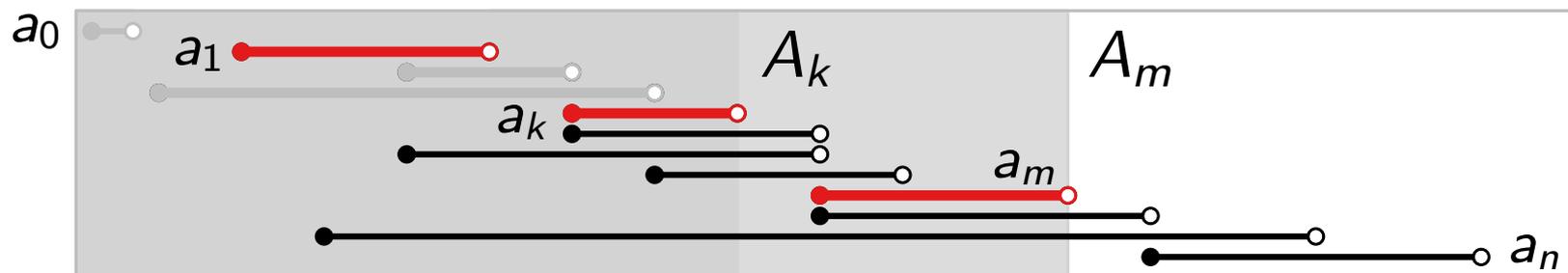
```
  // Finde Aktivität am mit kleinster Endzeit in Ak
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    ⊥ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return {am} ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

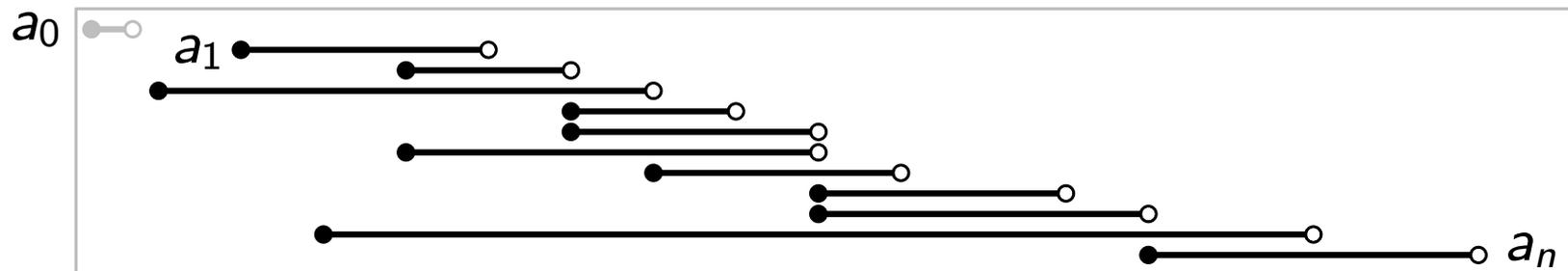
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

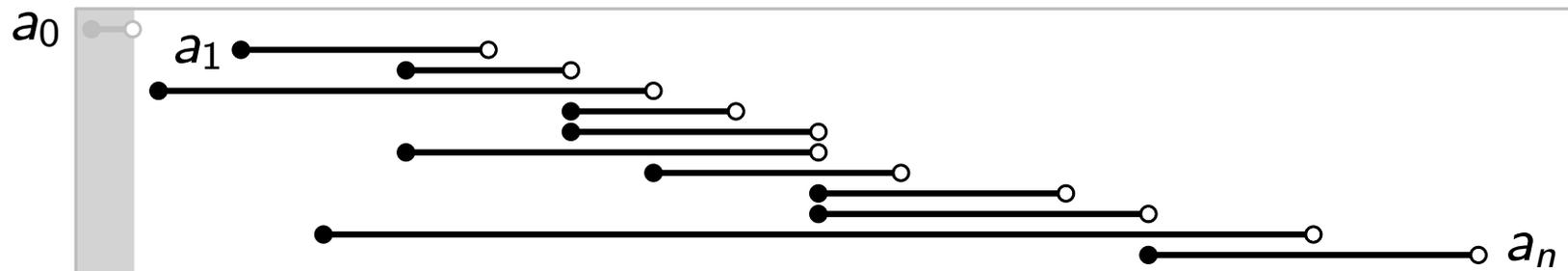
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

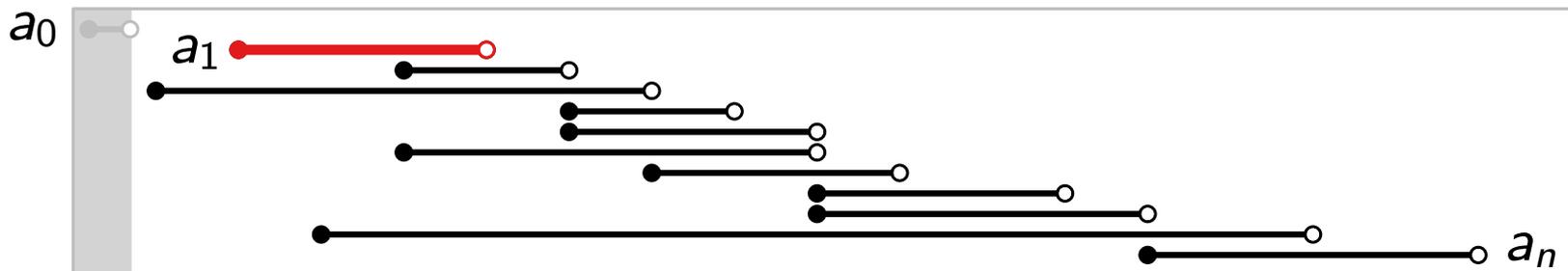
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    └ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

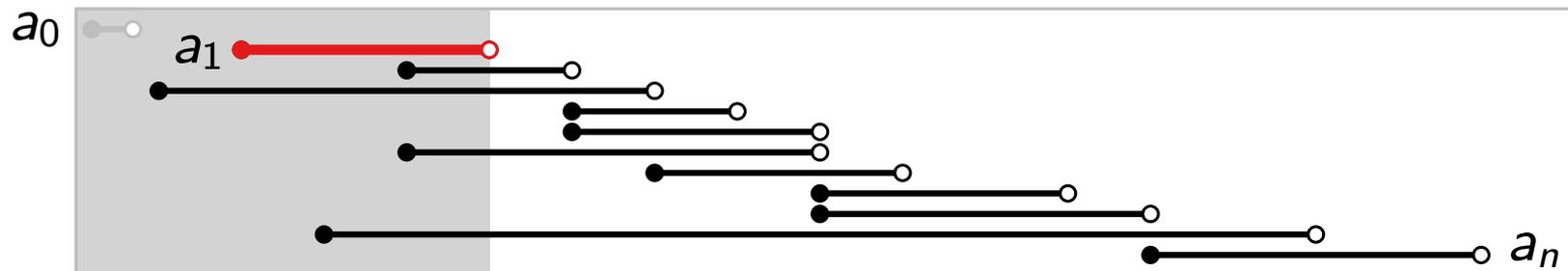
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

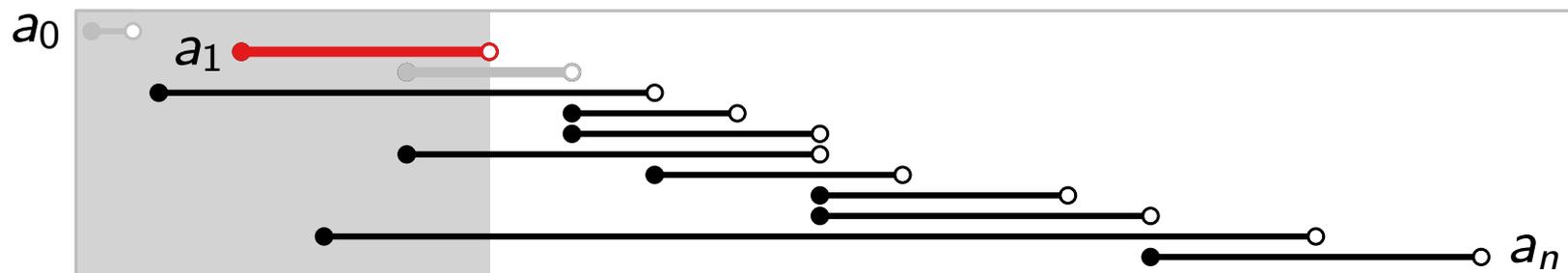
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

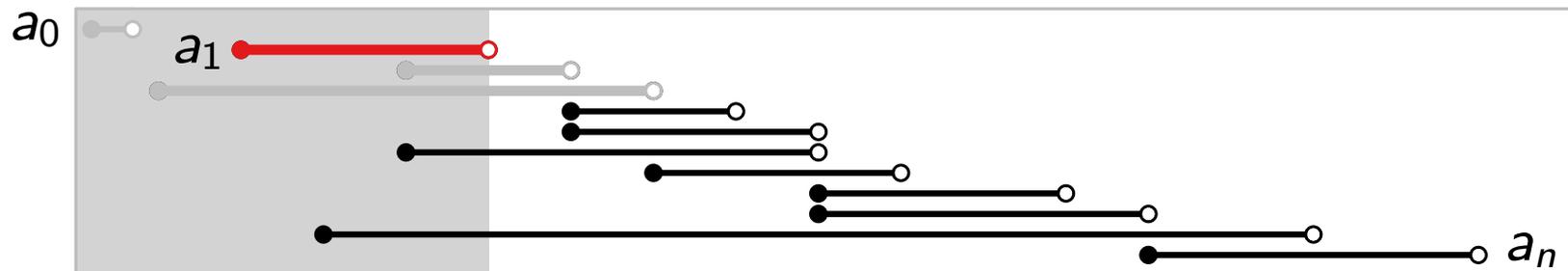
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

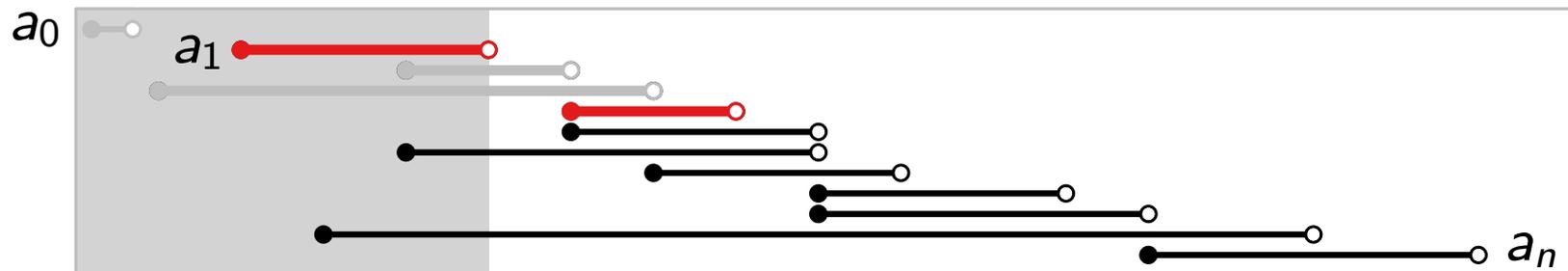
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    ⊥ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

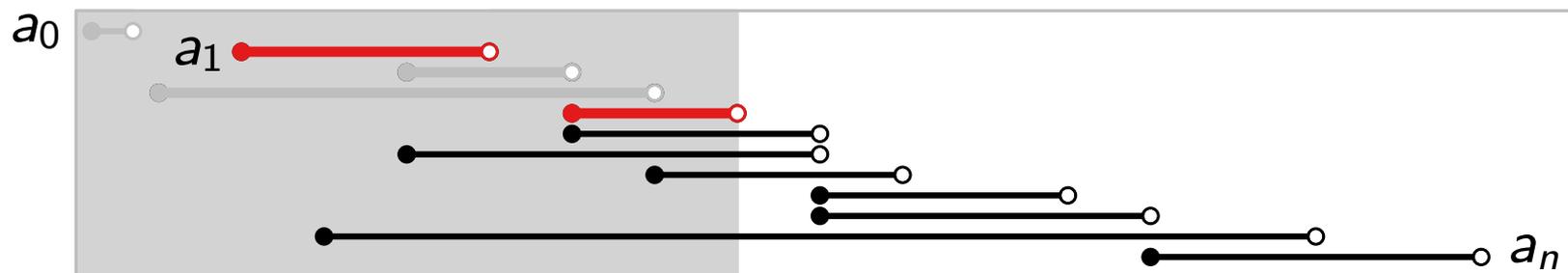
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

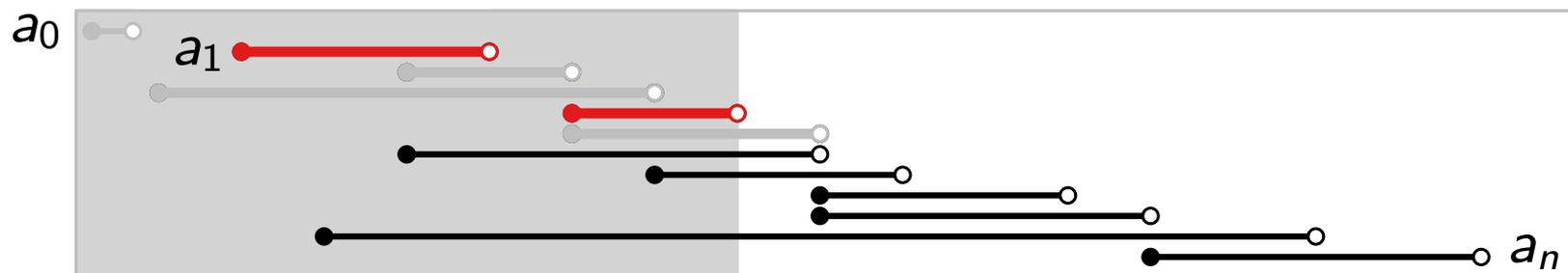
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒ A0 = A
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für Ak
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

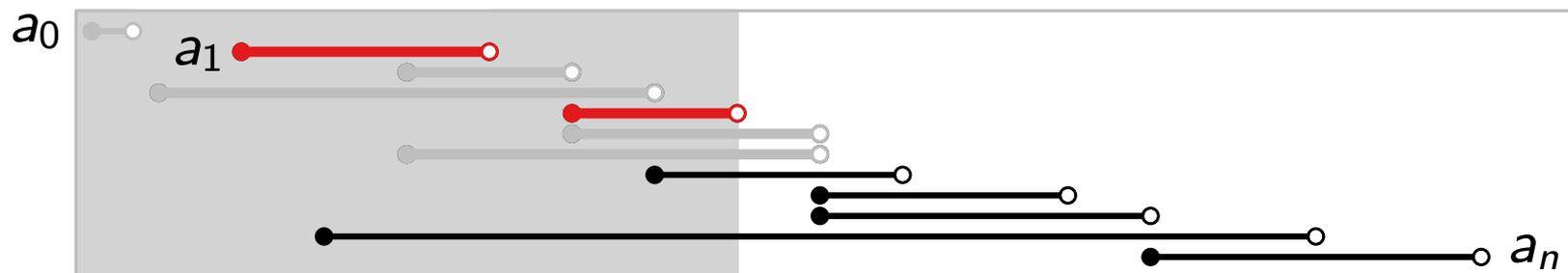
```
  // Finde Aktivität am mit kleinster Endzeit in Ak
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    ⊥ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return {am} ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

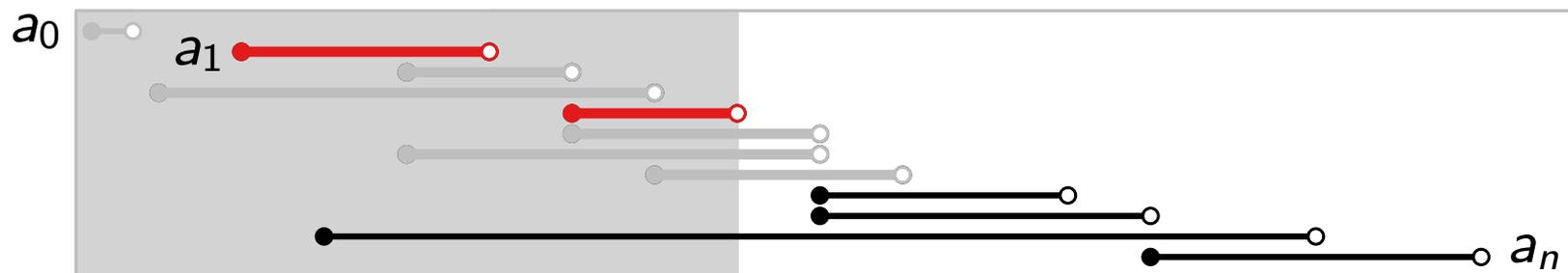
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    └ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

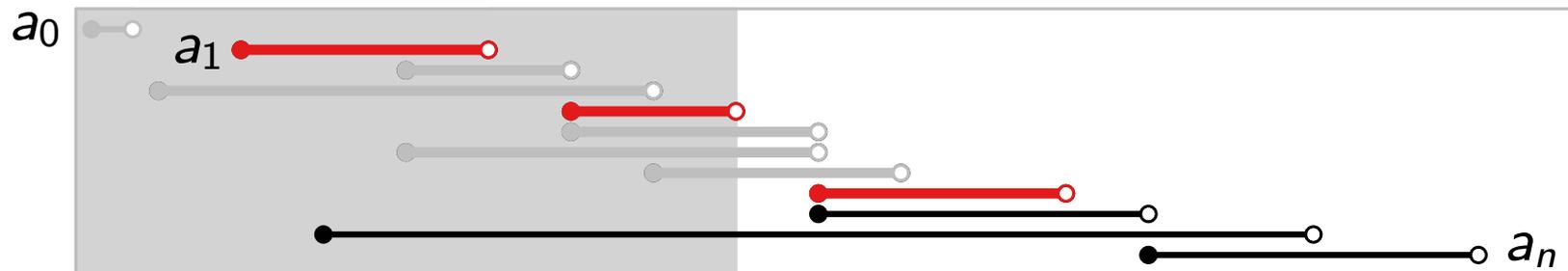
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\lfloor$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

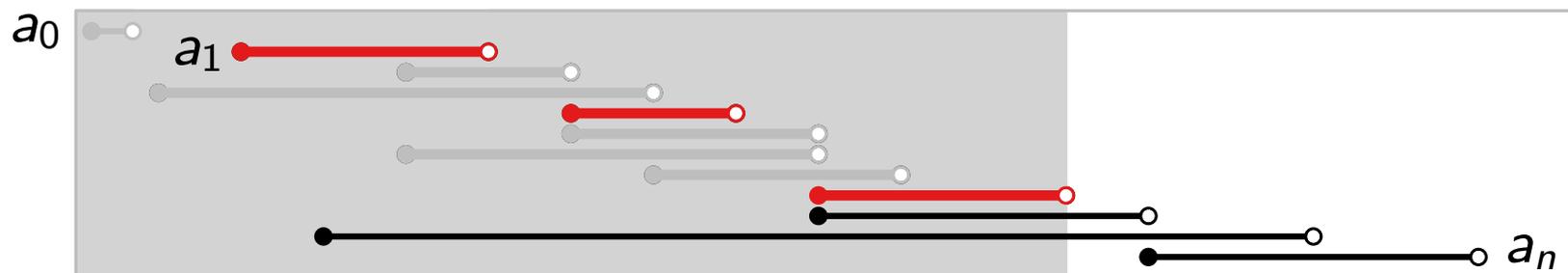
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

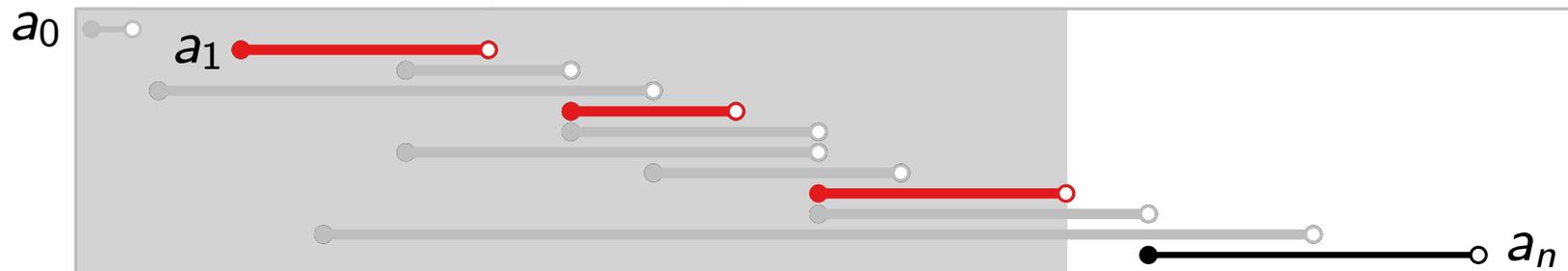
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

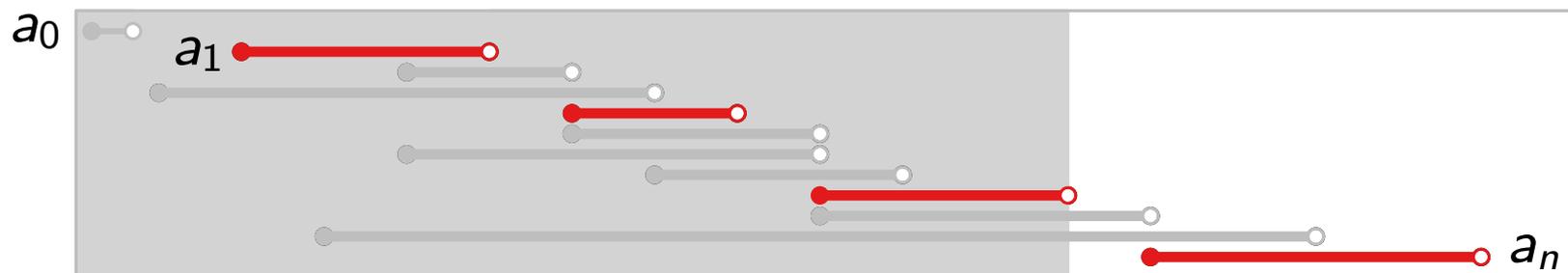
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    ⊥ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

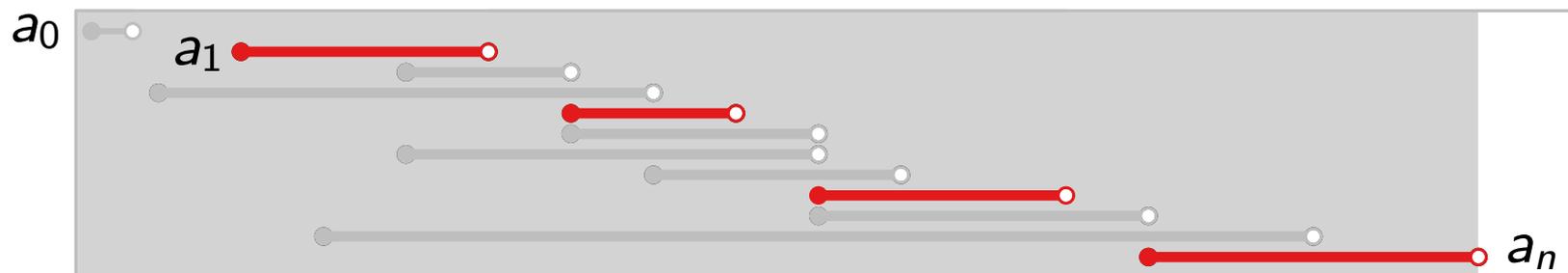
```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    ⊥ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```



Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    ⊥ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit?

Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒ A0 = A
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für Ak
  m = k + 1; n = s.length
  // Finde Aktivität am mit kleinster Endzeit in Ak
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
    ⊥ m = m + 1
  if m > n then return ∅
  else return {am} ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit? Wie oft wird m inkrementiert?

Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] =  $-\infty$  // technischer Kniff  $\Rightarrow A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m  $\leq$  n and s[m] < e[k] do
```

```
     $\perp$  m = m + 1
```

```
  if m > n then return  $\emptyset$ 
```

```
  else return  $\{a_m\} \cup$  GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit?

Wie oft wird m inkrementiert?

Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

Greedy – rekursiv

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
  m = k + 1; n = s.length
```

```
  // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
    ⊥ m = m + 1
```

```
  if m > n then return ∅
```

```
  else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit?

Wie oft wird m inkrementiert?

Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – ~~rekursiv~~

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒ A0 = A
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für Ak
  m = k + 1; n = s.length
  // Finde Aktivität am mit kleinster Endzeit in Ak
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
    m = m + 1
  if m > n then return ∅
  else return {am} ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit?

Wie oft wird m inkrementiert?

Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – ~~rekursiv~~ *iterativ!*

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
  e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒ A0 = A
  // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
  return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für Ak
  m = k + 1; n = s.length
  // Finde Aktivität am mit kleinster Endzeit in Ak
  while m ≤ n and s[m] < e[k] do
    m = m + 1
  if m > n then return ∅
  else return {am} ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit?

Wie oft wird m inkrementiert?

Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – ~~rekursiv~~ *iterativ!*

Schreiben Sie

GreedyIterative(int[]s, int[]e)!

```
GreedyRecursive(int[] s, int[] e)
```

```
    e[0] = -∞ // technischer Kniff ⇒  $A_0 = A$ 
```

```
    // Hier: falls nötig, sortiere Aktivitäten nach Endzeiten.
```

```
    return GreedyRecursiveMain(s, e, 0)
```

```
GreedyRecursiveMain(int[] s, int[] e, int k) // best. Lsg. für  $A_k$ 
```

```
    m = k + 1; n = s.length
```

```
    // Finde Aktivität  $a_m$  mit kleinster Endzeit in  $A_k$ 
```

```
    while m ≤ n and s[m] < e[k] do
```

```
        ⊥ m = m + 1
```

```
    if m > n then return ∅
```

```
    else return { $a_m$ } ∪ GreedyRecursiveMain(s, e, m)
```

Laufzeit?

Wie oft wird m inkrementiert?

Insgesamt, über alle rekursiven Aufrufe, n Mal.

D.h. GreedyRecursive läuft (ohne Sortieren) in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
```

```
   $n = s.length$ 
```

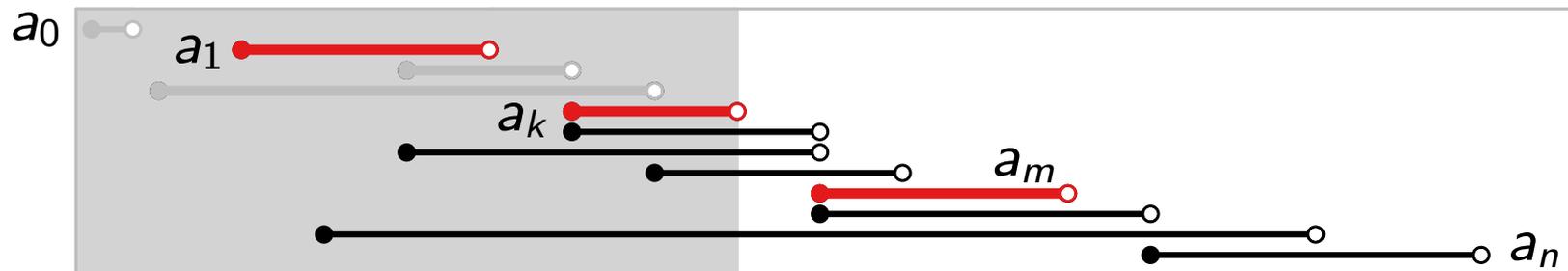
```
  if  $n = 0$  then return  $\emptyset$ 
```

```
   $L = \{a_1\}$ 
```

```
   $k = 1$  // höchster Index in  $L$ 
```

```
  for  $m = 2$  to  $n$  do
```

```
    return  $L$ 
```

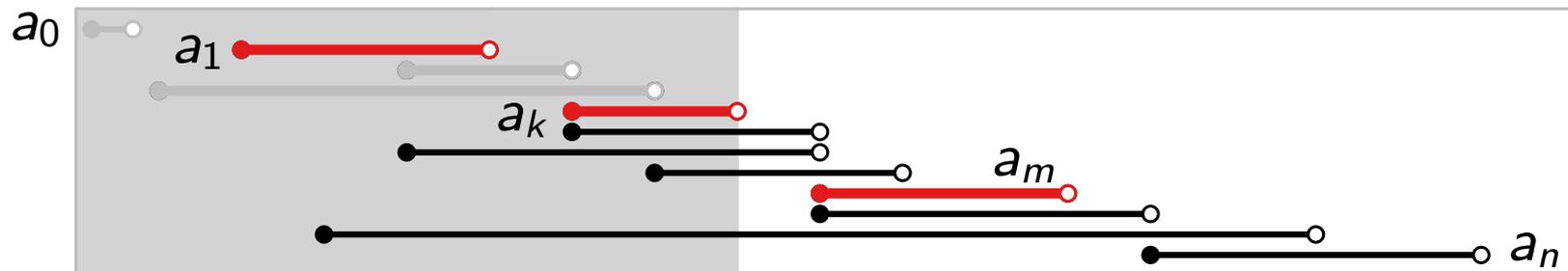


Greedy – iterativ

```

GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a1}
  k = 1 // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
    if s[m] ≥ e[k] then
      L = L ∪ {am}
      k = m
  return L

```



Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return  $\emptyset$ 
  L = {a1}
  k = 1 // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
    if s[m] ≥ e[k] then
      L = L ∪ {am}
      k = m
  return L
```

Laufzeit?

Greedy – iterativ

```
GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return  $\emptyset$ 
  L = {a1}
  k = 1 // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
    if s[m] ≥ e[k] then
      L = L ∪ {am}
      k = m
  return L
```

Laufzeit?

GreedyIterative läuft ebenfalls in $\Theta(n)$ Zeit.

Greedy – iterativ

```

GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a1}
  k = 1 // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
    if s[m] ≥ e[k] then
      L = L ∪ {am}
      k = m
  return L

```

Laufzeit? GreedyIterative läuft ebenfalls in $\Theta(n)$ Zeit.

Bemerkung: GreedyIterative berechnet dieselbe optimale Lösung wie GreedyRecursive

Greedy – iterativ

```

GreedyIterative(int[] s, int[] e)
  n = s.length
  if n = 0 then return ∅
  L = {a1}
  k = 1 // höchster Index in L
  for m = 2 to n do
    if s[m] ≥ e[k] then
      L = L ∪ {am}
      k = m
  return L

```

Laufzeit? GreedyIterative läuft ebenfalls in $\Theta(n)$ Zeit.

Bemerkung: GreedyIterative berechnet dieselbe optimale Lösung wie GreedyRecursive – die „linkeste“.

Die Greedy-Strategie

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung.

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung.
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt.

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung.
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt.
4. Beweise, dass die Greedy-Wahl „sicher“ ist (vgl. Kruskal!).

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung.
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt.
4. Beweise, dass die Greedy-Wahl „sicher“ ist (vgl. Kruskal!).
5. Entwickle einen rekursiven Greedy-Algorithmus.

Die Greedy-Strategie

1. Teste, ob das Problem optimale Teilstruktur aufweist.
2. Entwickle eine rekursive Lösung.
3. Zeige, dass bei einer Greedy-Entscheidung nur *ein* Teilproblem bleibt.
4. Beweise, dass die Greedy-Wahl „sicher“ ist (vgl. Kruskal!).
5. Entwickle einen rekursiven Greedy-Algorithmus.
6. Konvertiere den rekursiven in einen iterativen Algorithmus.

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

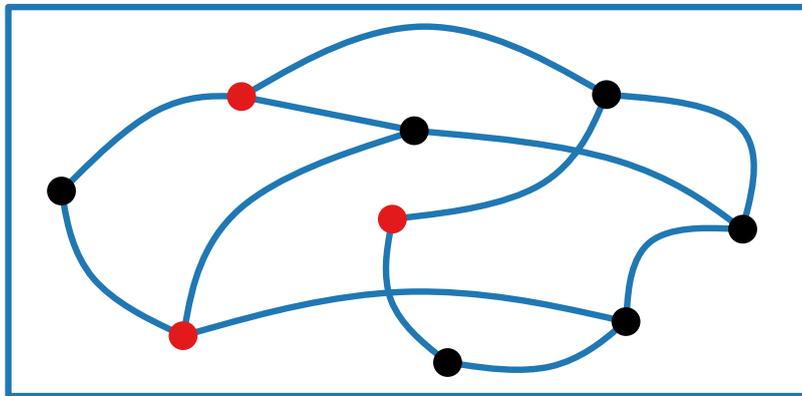
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



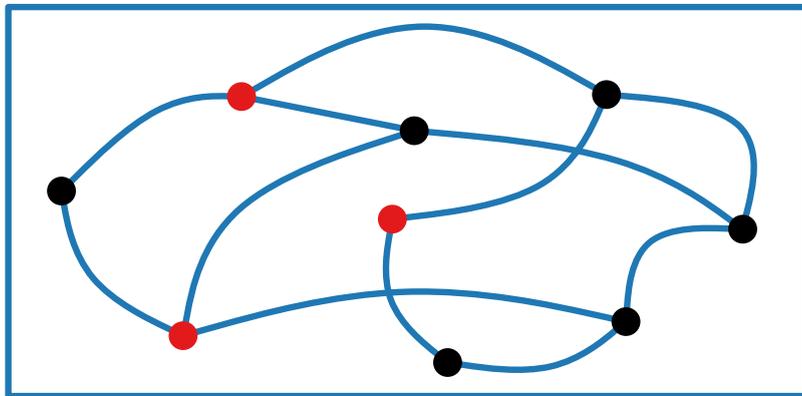
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

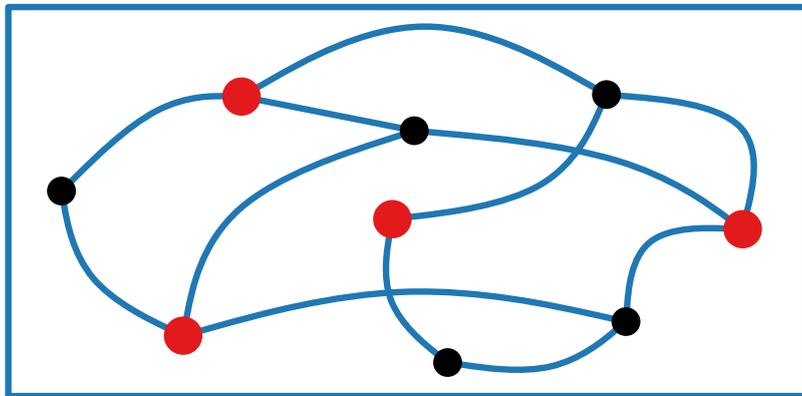
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

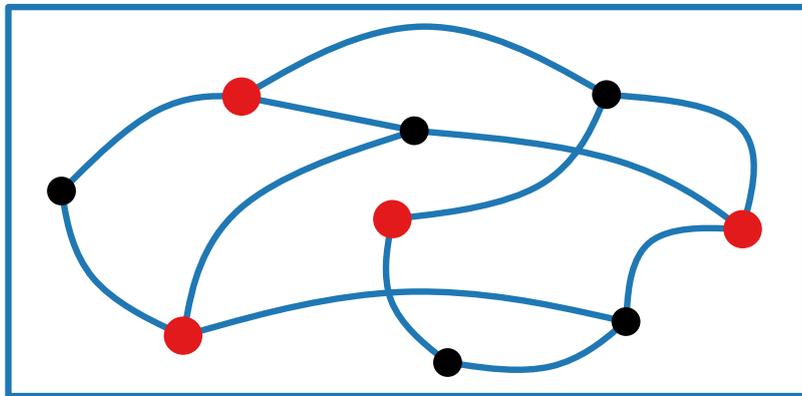
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

– Was hat guM mit unserem Ablaufplanungsproblem zu tun?

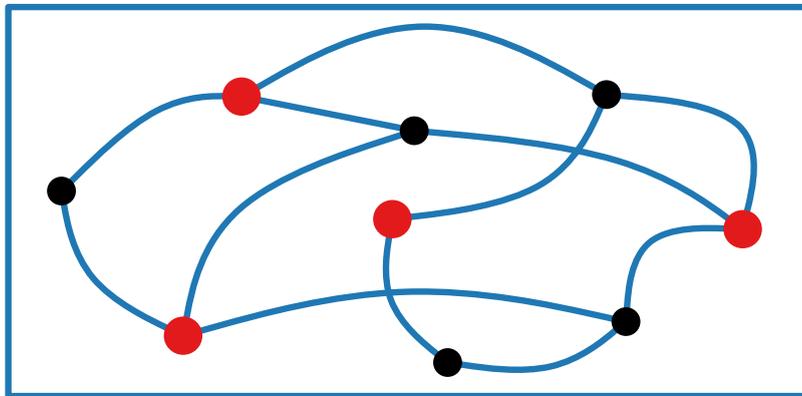
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

- Was hat guM mit unserem Ablaufplanungsproblem zu tun?
- Welche Graphen kommen bei der Ablaufplanung nicht vor?

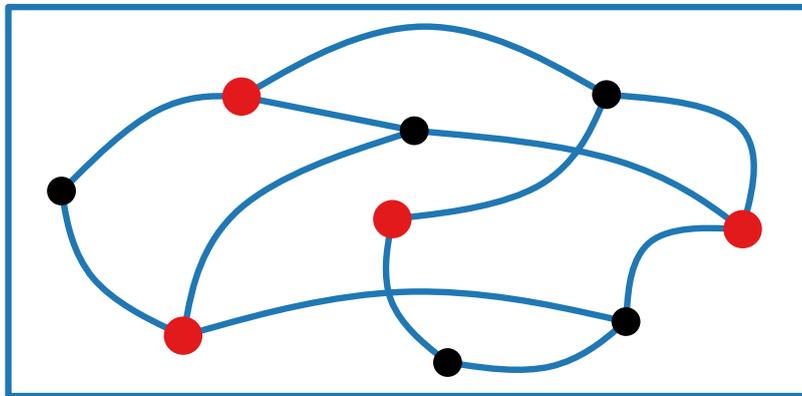
Food for Thought

1. Welches allgemeinere Ablaufproblem kann der Greedy-Algorithmus (GA) nicht lösen?

Wenn jede Aktivität $a \in A$ ihren eigenen Ertrag $w(a)$ erbringt:

Finde $L \subseteq A$ mit L kompatibel und $w(L) := \sum_{a \in L} w(a)$ max.

2. Problem *größte unabhängige Menge (guM)* in Graphen:



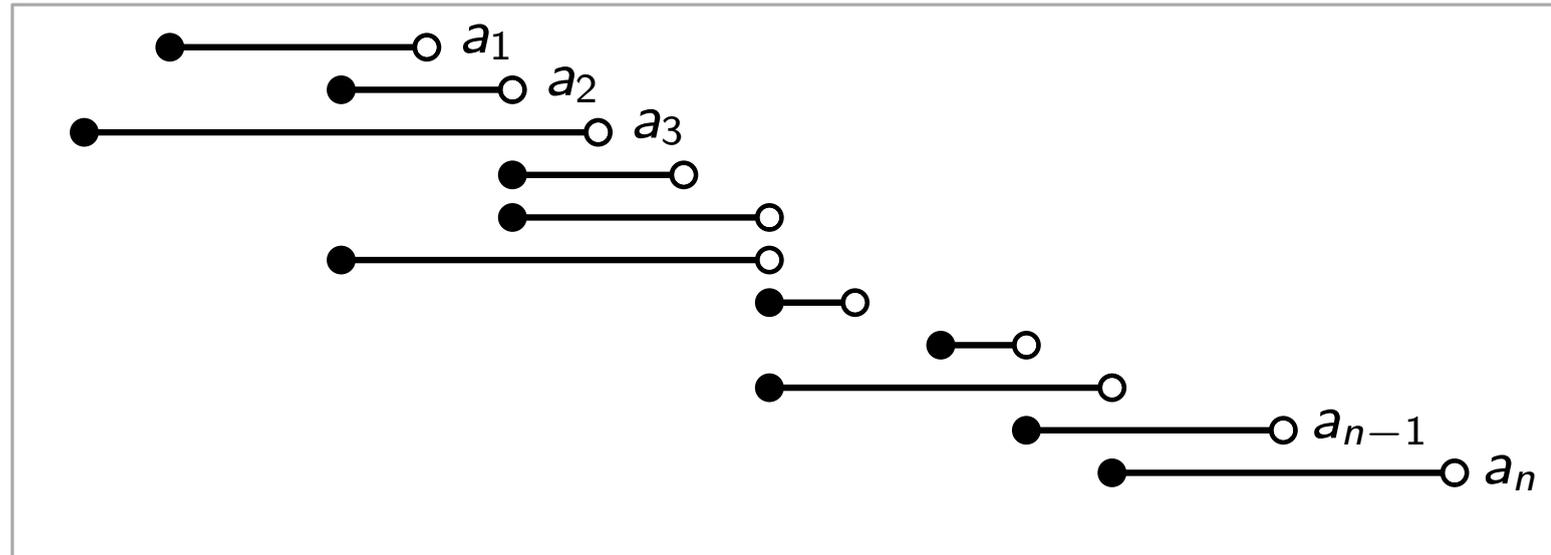
Finde eine größte Teilmenge U der Knoten, so dass keine zwei Knoten in U benachbart sind.

- Was hat guM mit unserem Ablaufplanungsproblem zu tun?
- Welche Graphen kommen bei der Ablaufplanung nicht vor?
- Kann man guM mittels dynamischer Programmierung oder Greedy-Alg. lösen?

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

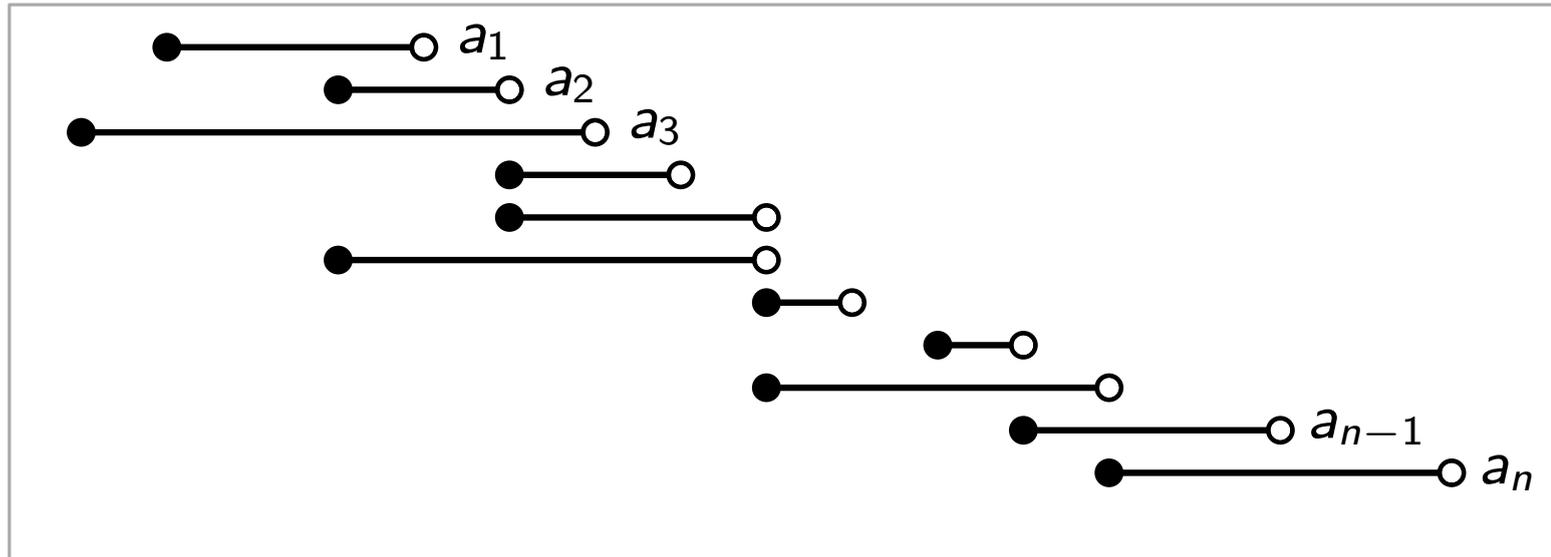
Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.

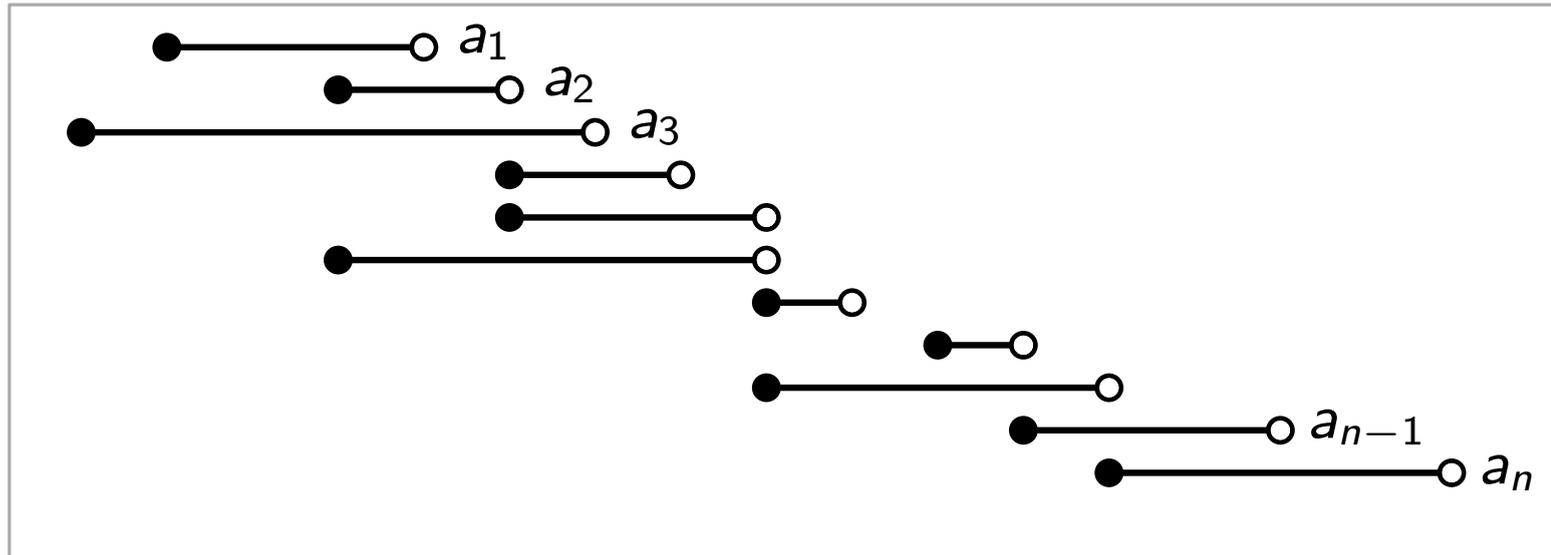


Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren **Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal** ist.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



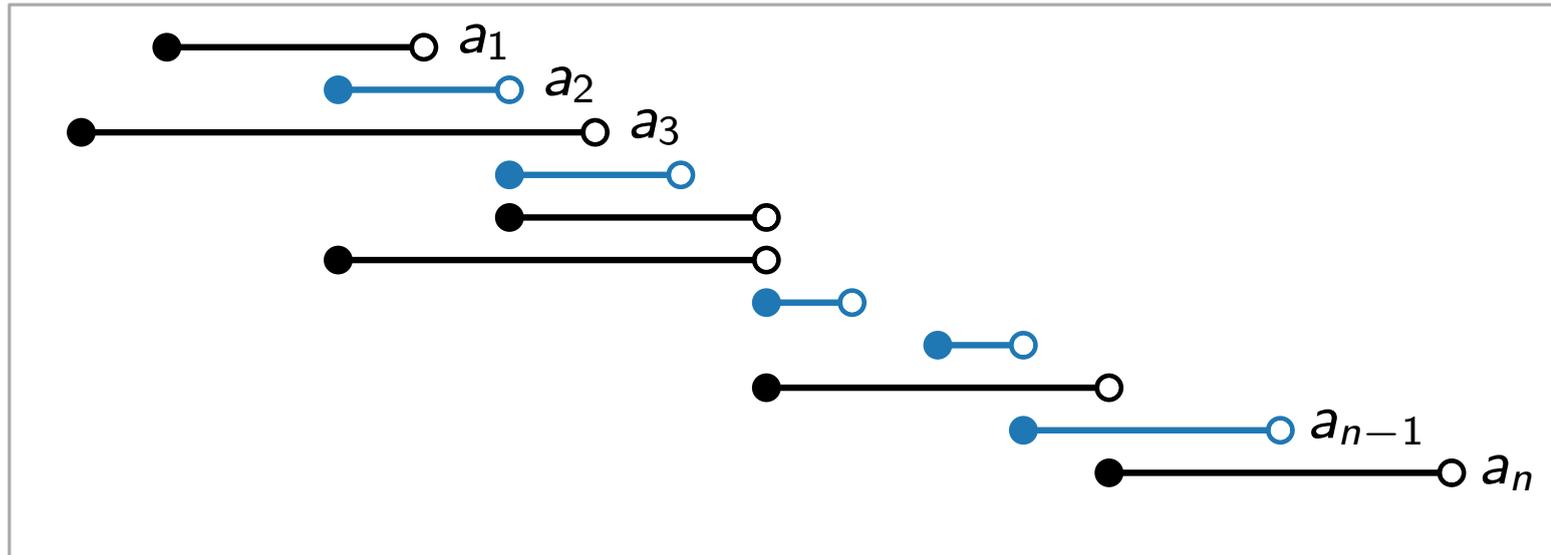
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren **Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal** ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



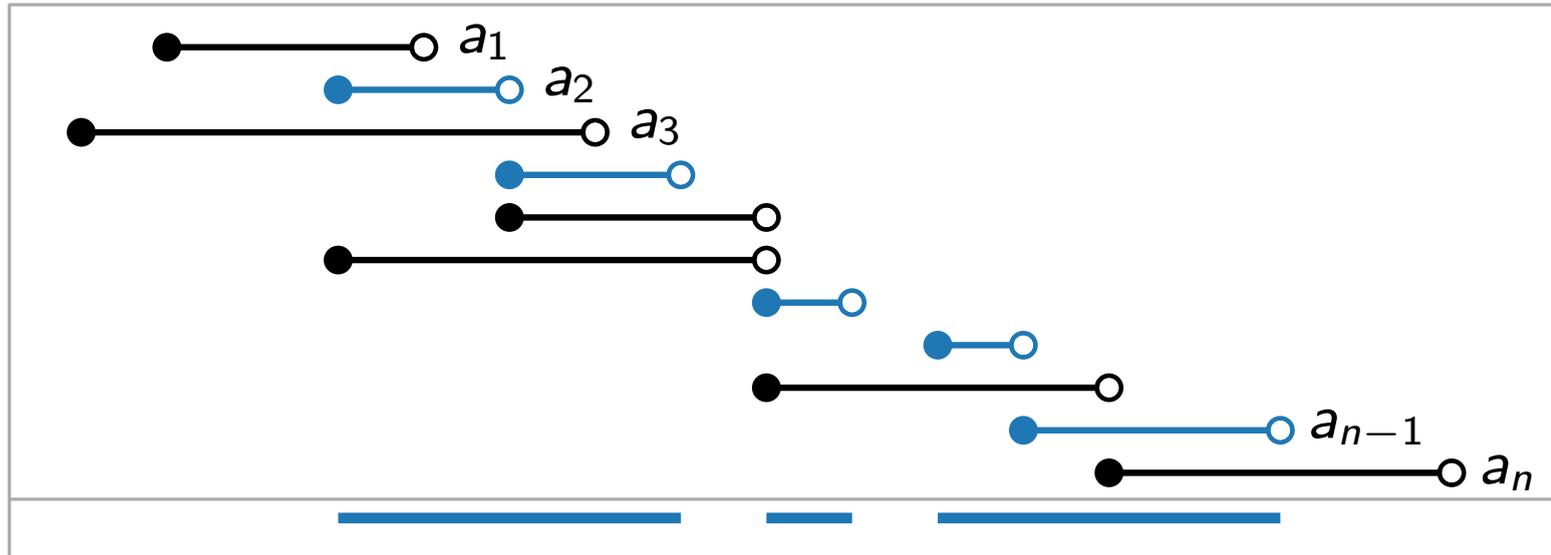
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren **Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal** ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



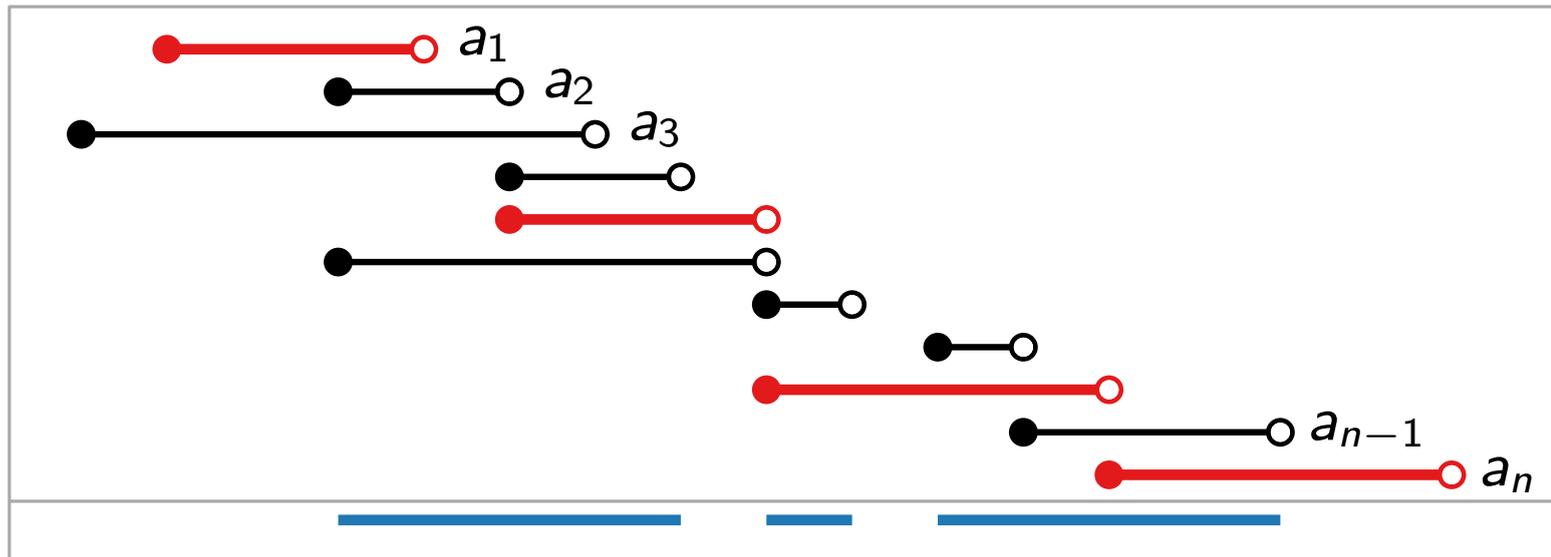
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren **Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal** ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



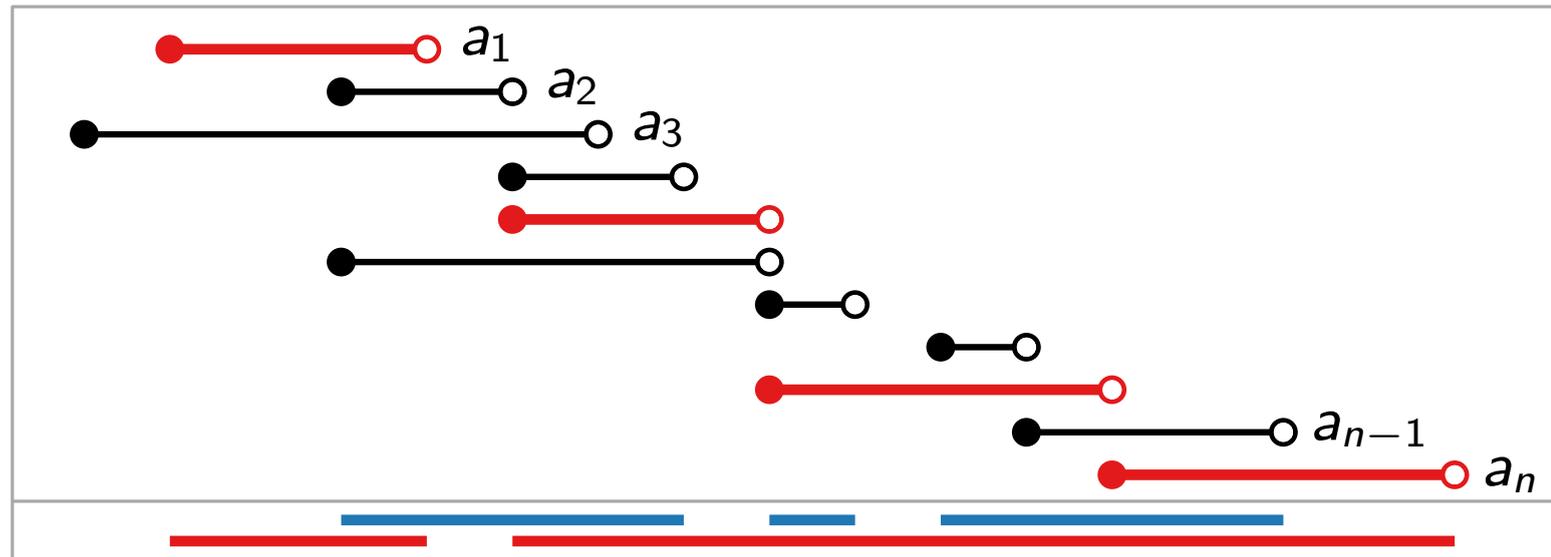
Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren **Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal** ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Ein ähnliches Problem der Ablaufplanung

Gegeben: Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von halboffenen Intervallen, mit $a_i = [s_i, e_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Für die Endpunkte gelte $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$.



Gesucht: eine Menge $A' \subseteq A$ paarweise disjunkter Intervalle, deren **Gesamtlänge $\ell(A')$ maximal** ist.

Grund: Intervalle $\hat{=}$ Prozesse, die die gleiche Ressource nutzen; der Gesamtertrag ist proportional zur Auslastung.

Greedy?

Greedy?

- 1. Versuch:** *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin,
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin,
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin,
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



2. Versuch:

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin,
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



2. Versuch: *Nimm längste Aktivität,
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Greedy?

1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin,
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



2. Versuch: *Nimm längste Aktivität,
streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:

Greedy?

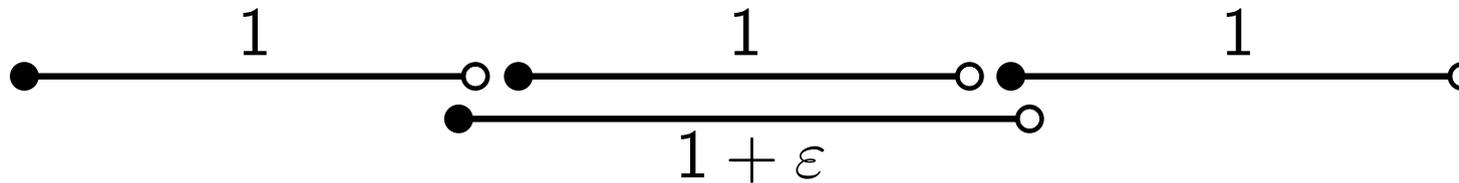
- 1. Versuch:** *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



- 2. Versuch:** *Nimm längste Aktivität, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



Greedy?

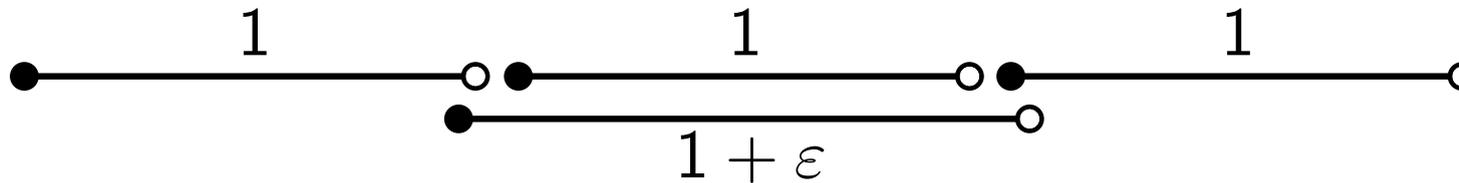
1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



2. Versuch: *Nimm längste Aktivität, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



Aufgabe: Können Sie den 2. GA in $O(n \log n)$ Zeit implementieren?

Greedy?

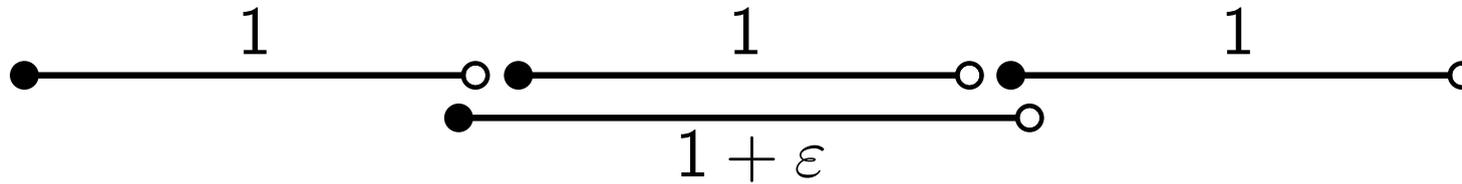
1. Versuch: *Nimm Aktivität mit frühestem Endtermin, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



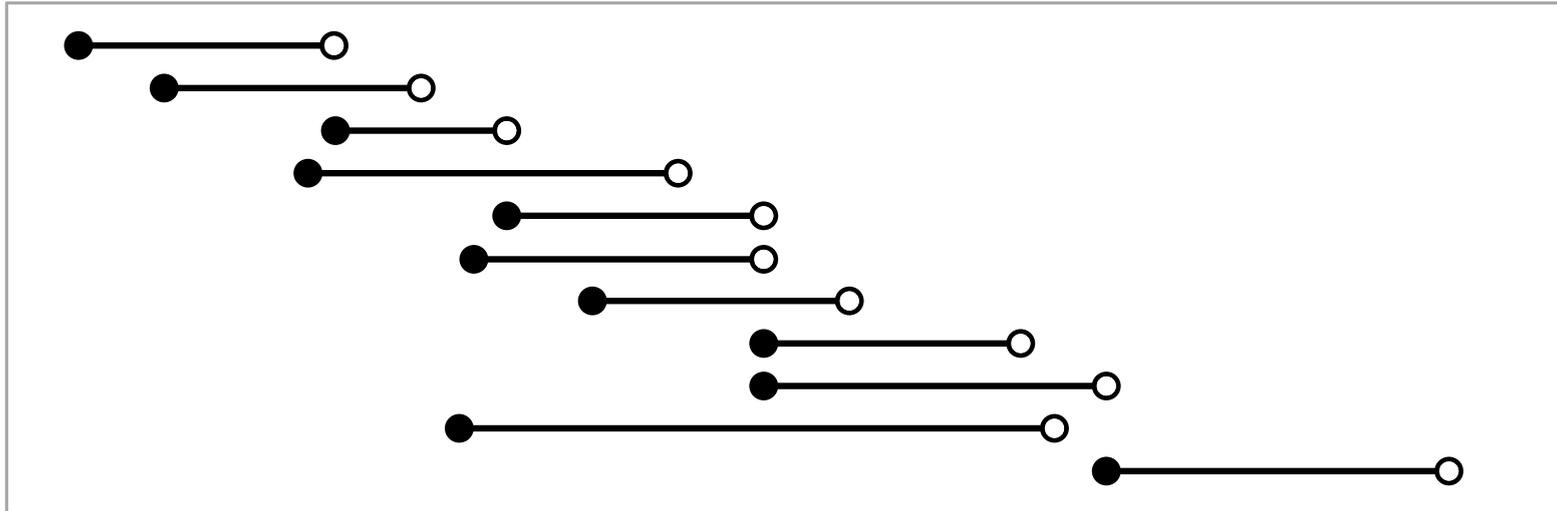
2. Versuch: *Nimm längste Aktivität, streiche dazu inkompatible Aktivitäten und iteriere.*

Gegenbsp.:



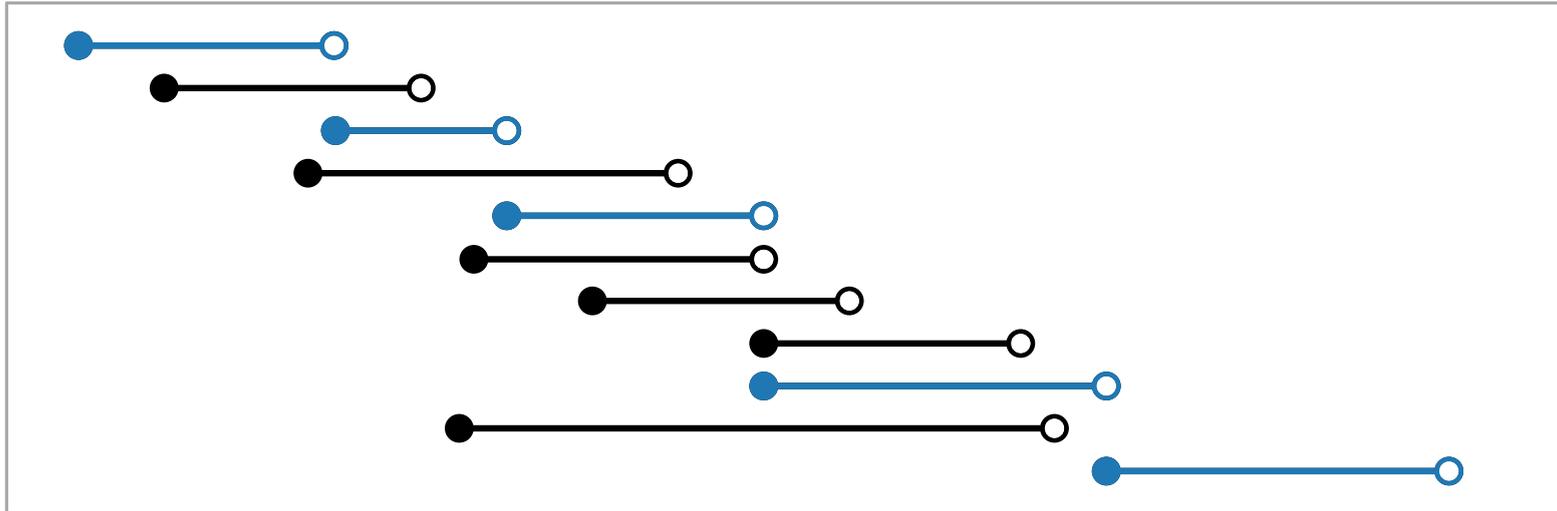
Aufgabe: Können Sie den 2. GA in $O(n \log n)$ Zeit implementieren?
Tipp: Gehen Sie so ähnlich wie Kruskal vor!

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?



Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

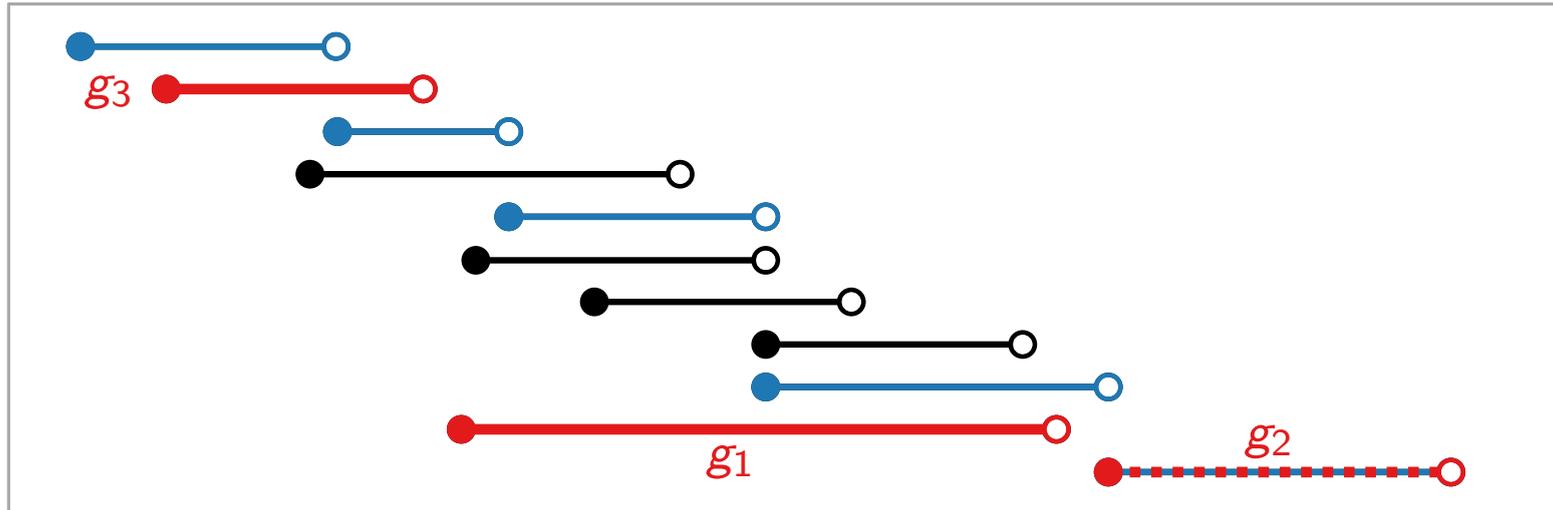
Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.



Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (*in dieser Rf.*).

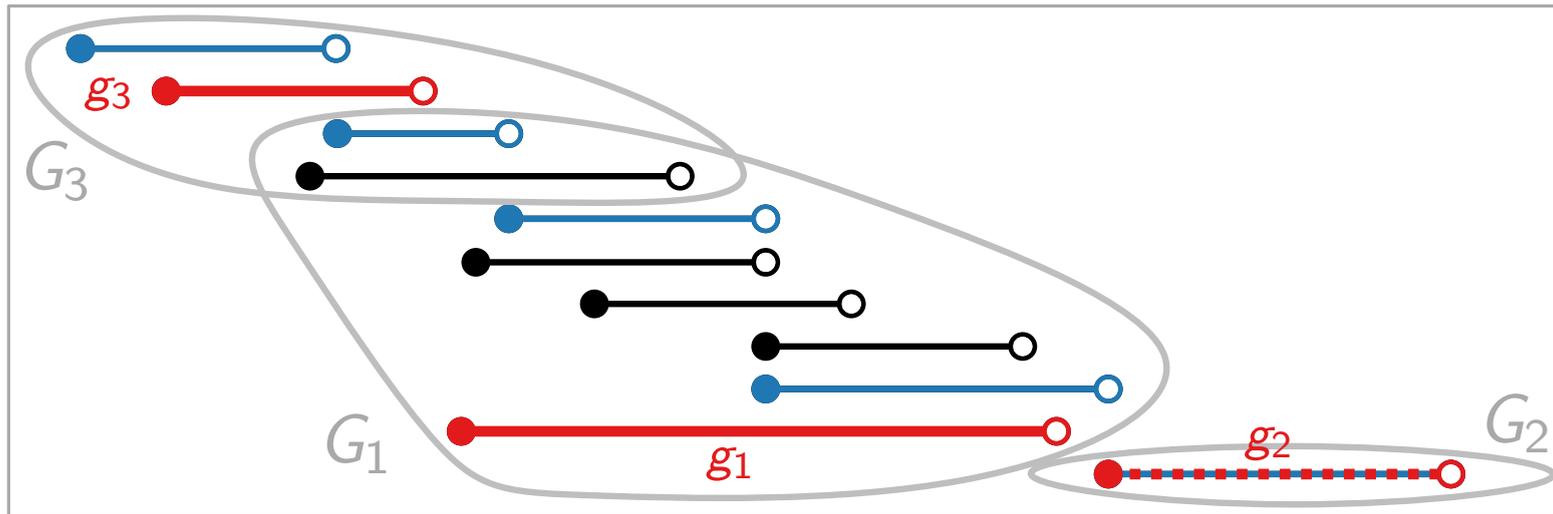


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G$

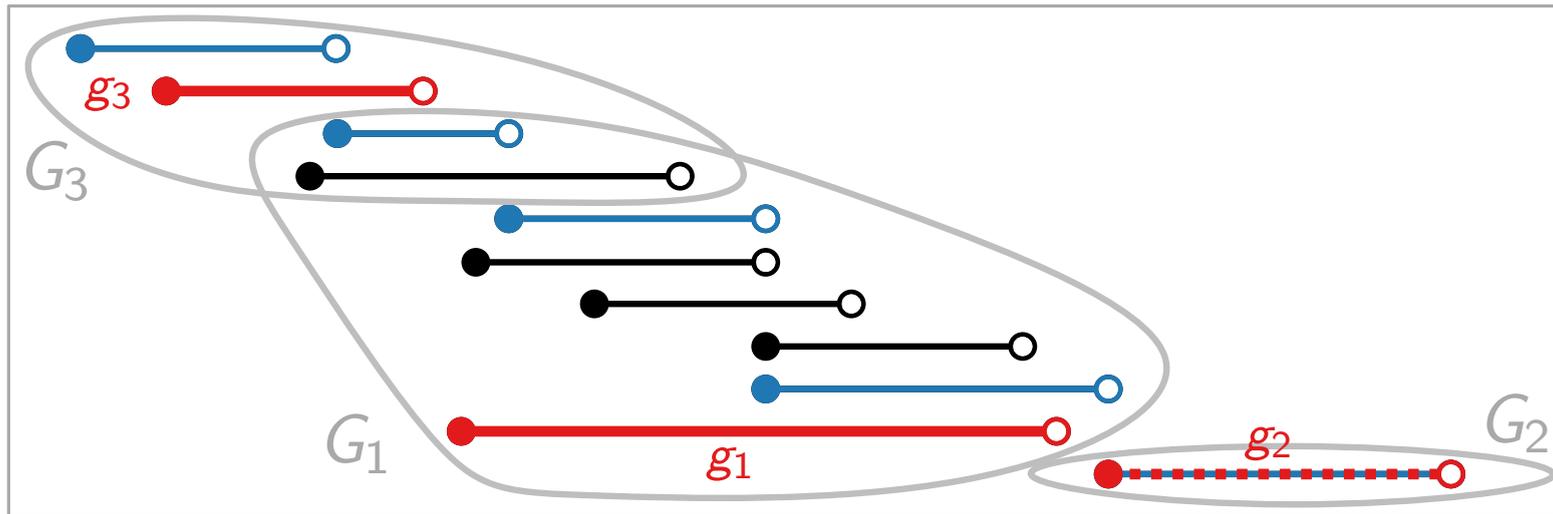


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$

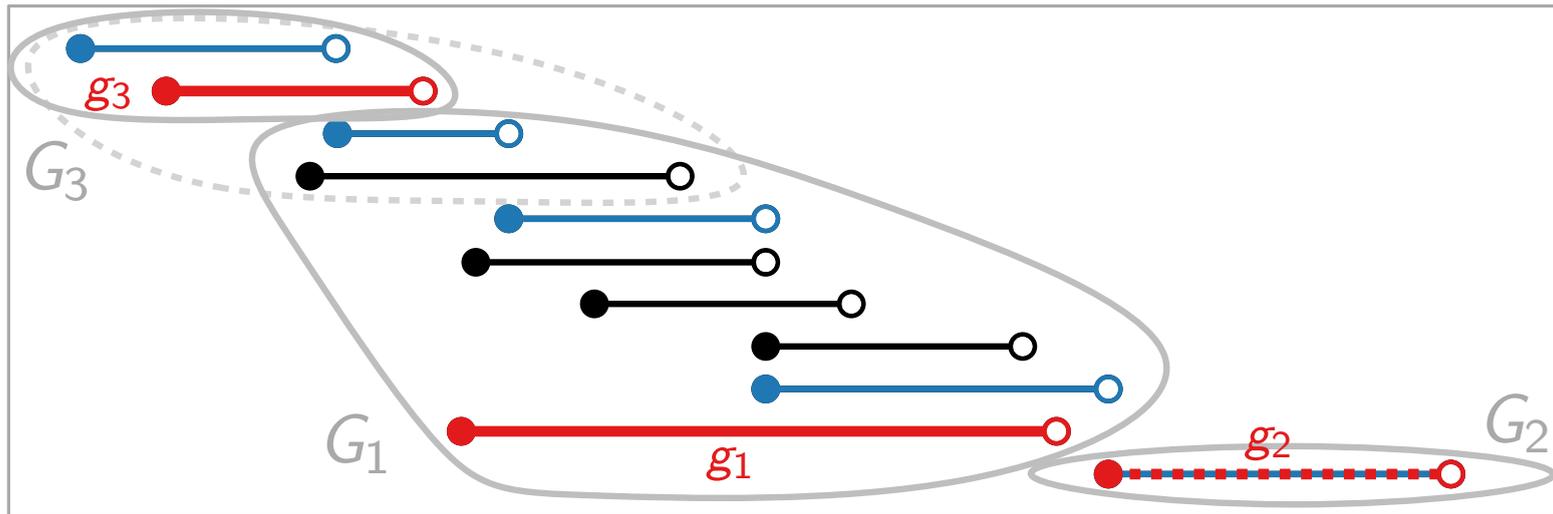


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$

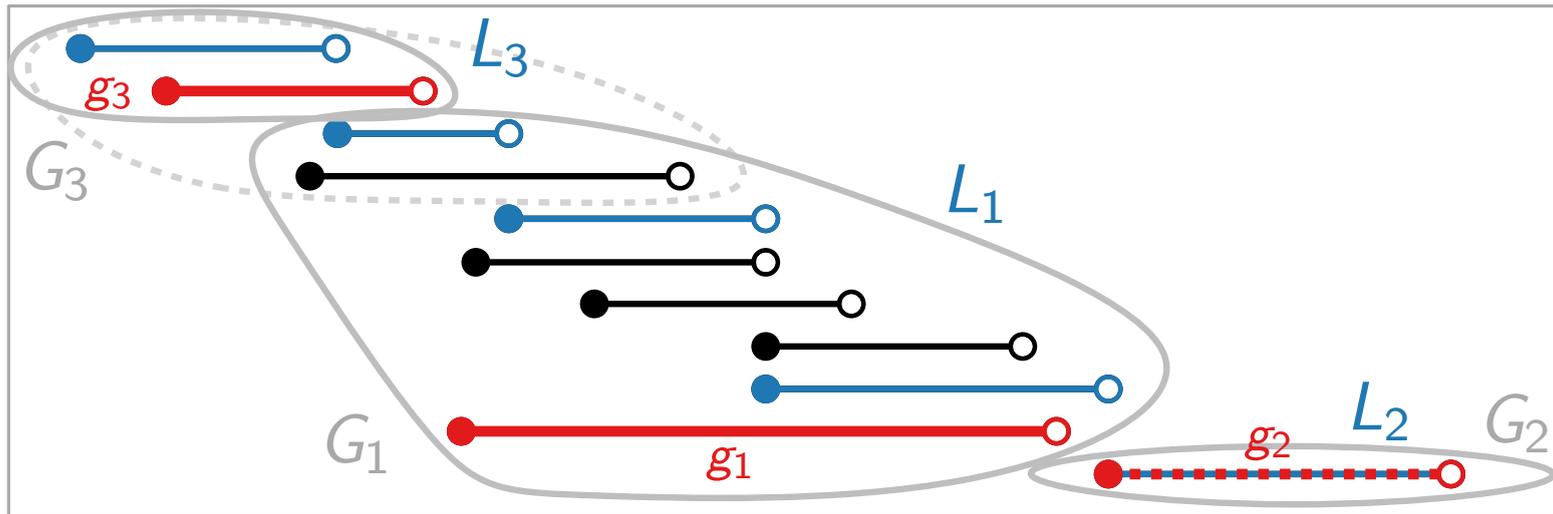


Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und

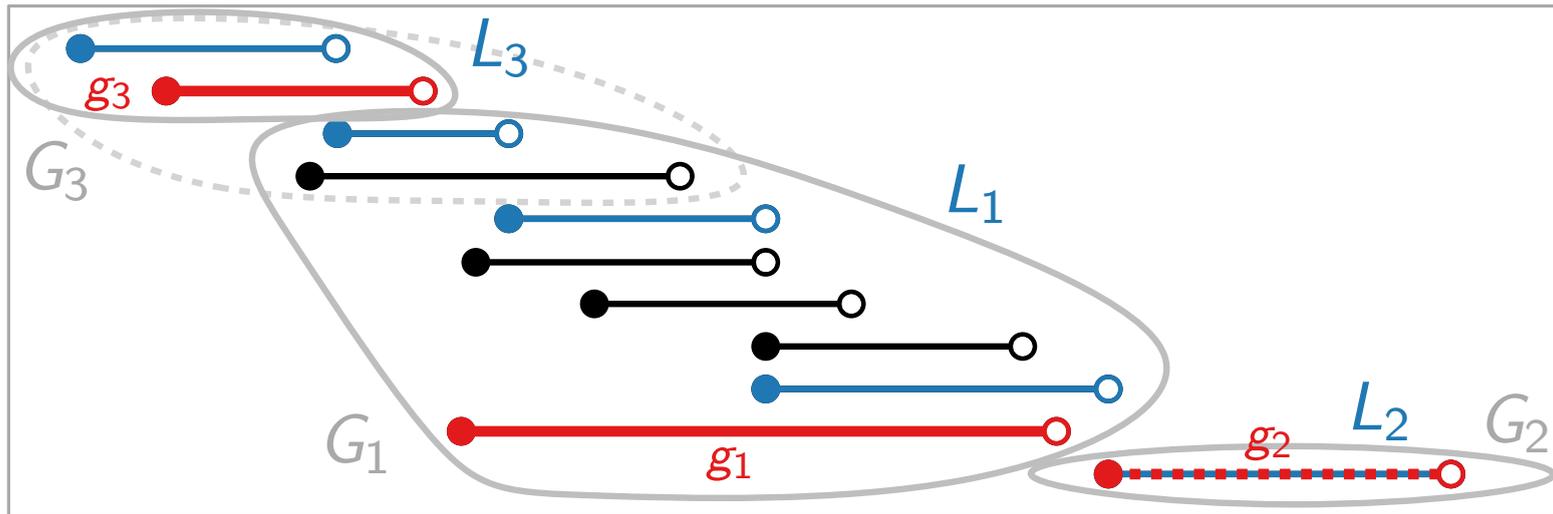
$$L_i = L \cap G_i.$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und
 $L_i = L \cap G_i$.

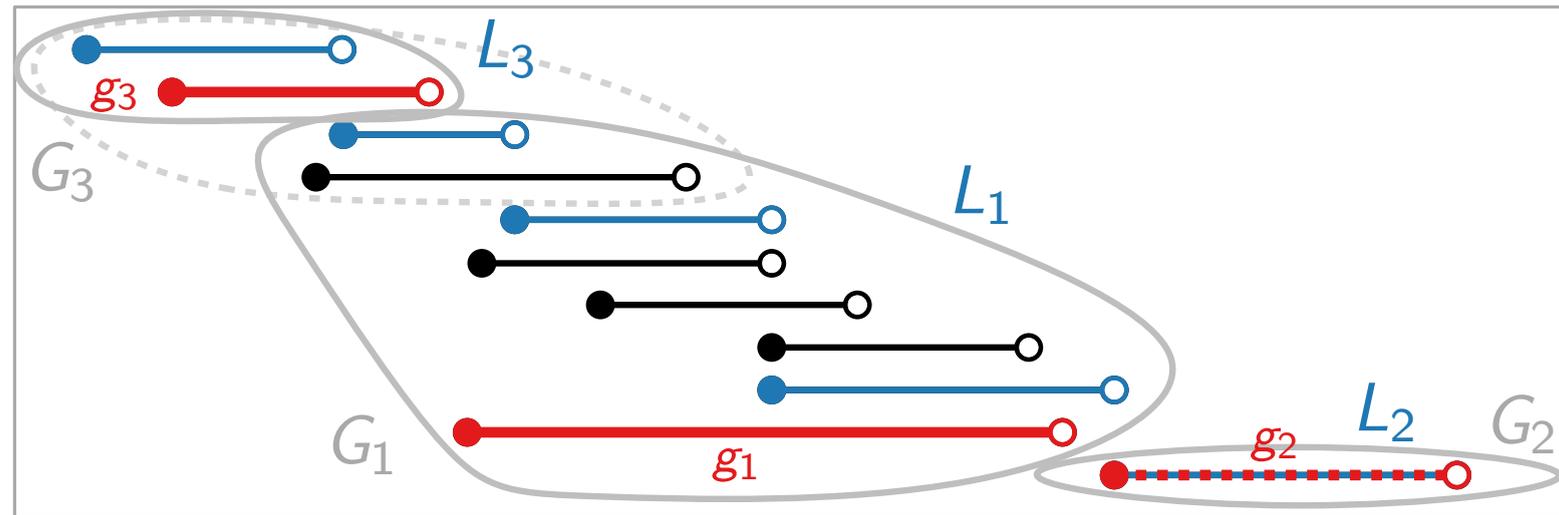
Dann gilt $A = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_k$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und
 $L_i = L \cap G_i$.

Dann gilt $A = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_k$

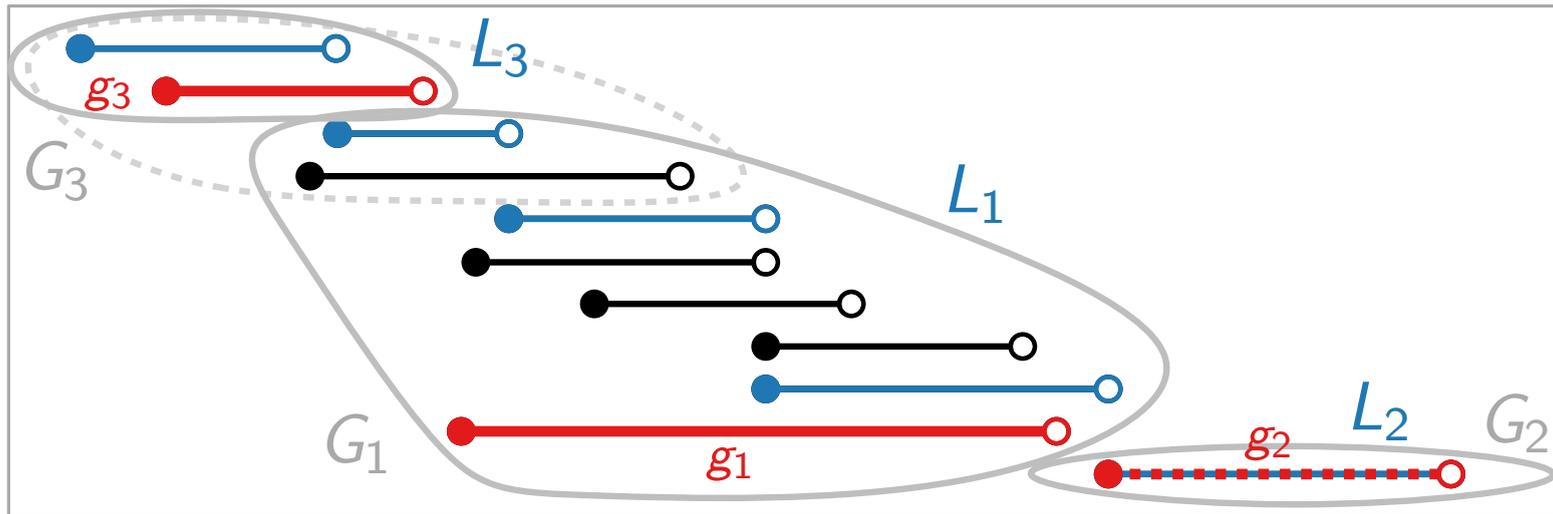
„ \subseteq “:

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und

$$L_i = L \cap G_i.$$

Dann gilt $A = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_k$

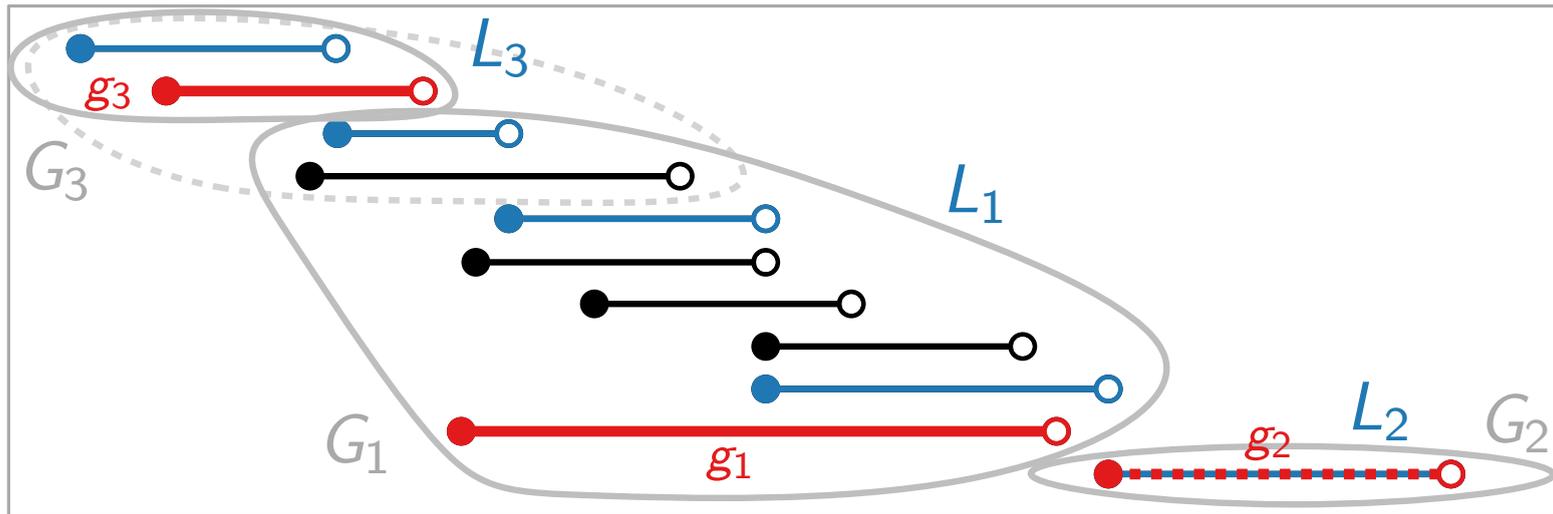
„ \subseteq “: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und
 $L_i = L \cap G_i$.

Dann gilt $A = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_k$

„ \subseteq “: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

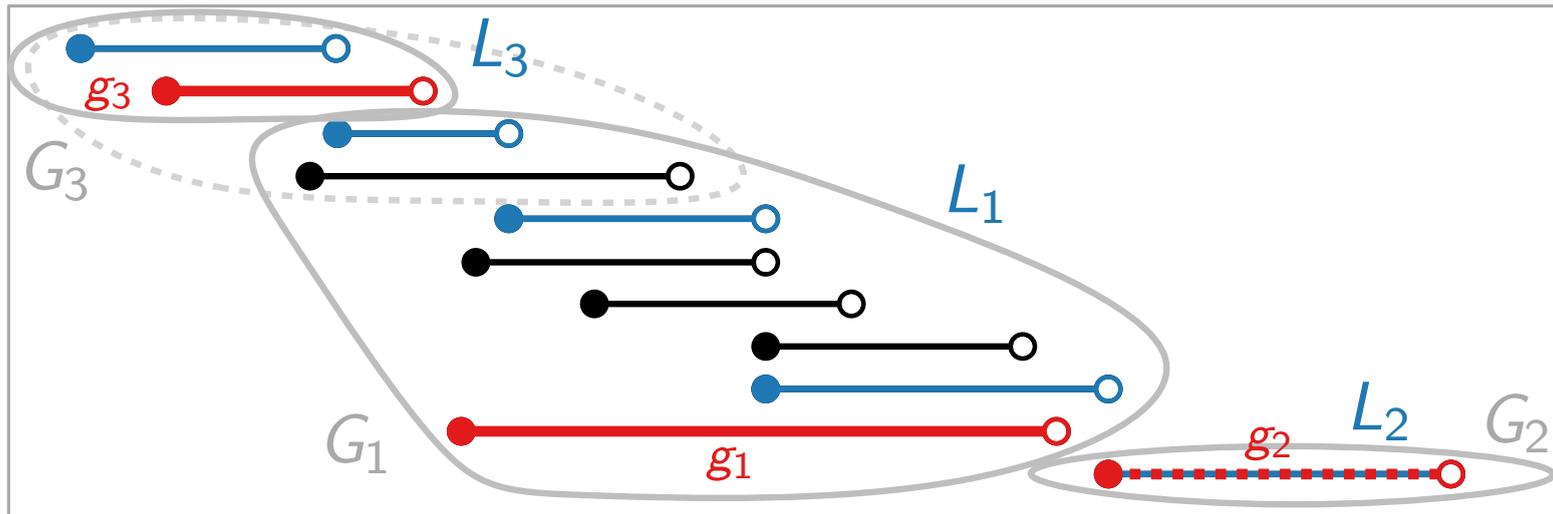
„ \supseteq “:

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und
 $L_i = L \cap G_i$.

Dann gilt $A = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_k$

„ \subseteq “: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

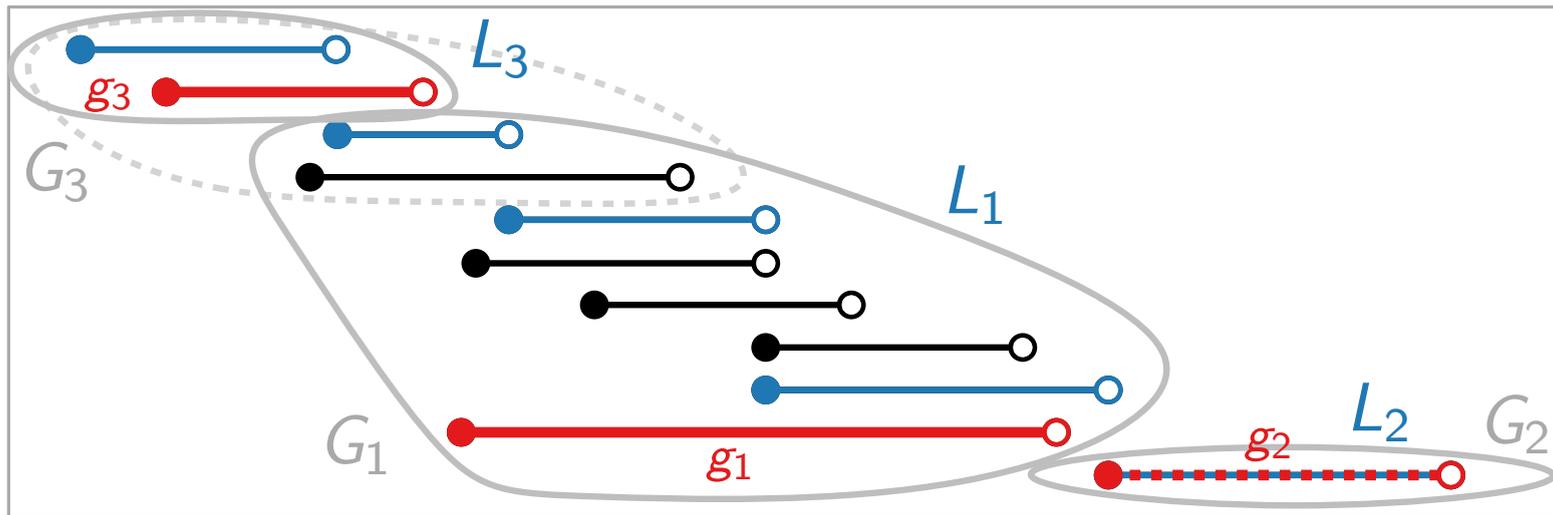
„ \supseteq “: klar, da $G_1 \subseteq A$, $G_2 \subseteq A$, \dots , $G_k \subseteq A$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



und
 $L_i = L \cap G_i$.

Dann gilt $A = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_k$ und $L = L_1 \dot{\cup} L_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} L_k$.

„ \subseteq “: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

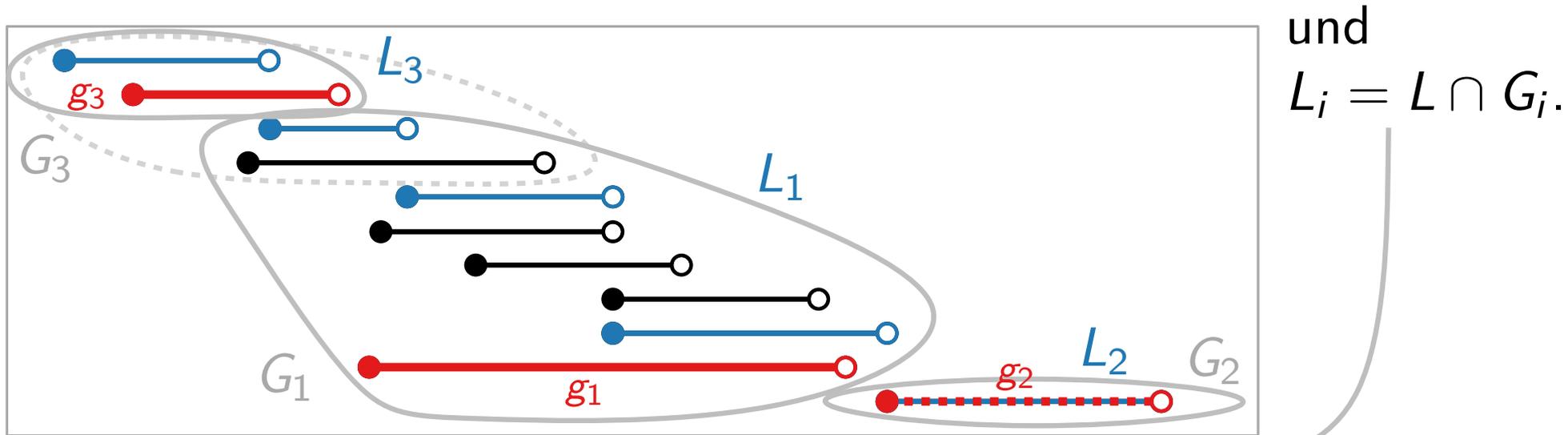
„ \supseteq “: klar, da $G_1 \subseteq A$, $G_2 \subseteq A$, \dots , $G_k \subseteq A$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Betrachte eine optimale Lösung $L \subseteq A$.

Sei $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq A$ die Greedy-Lösung (in dieser Rf.).

Für $i = 1, \dots, k$ sei $G_i = \{a \in A \mid a \cap g_i \neq \emptyset\} \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_{i-1})$



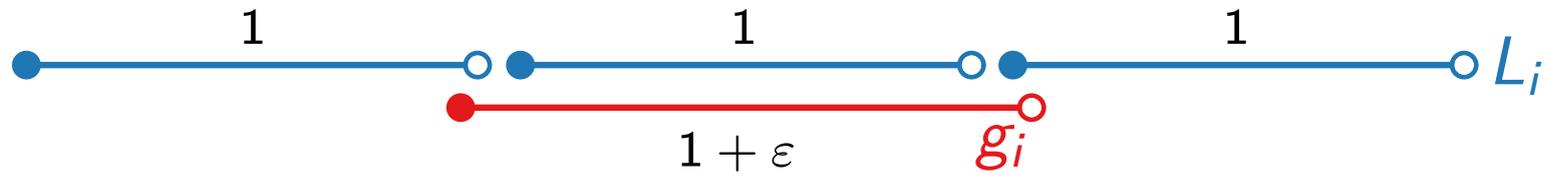
Dann gilt $A = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_k$ und $L = L_1 \dot{\cup} L_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} L_k$.

„ \subseteq “: GA wählt so lange Intervalle aus, bis es keine mehr gibt.

„ \supseteq “: klar, da $G_1 \subseteq A, G_2 \subseteq A, \dots, G_k \subseteq A$

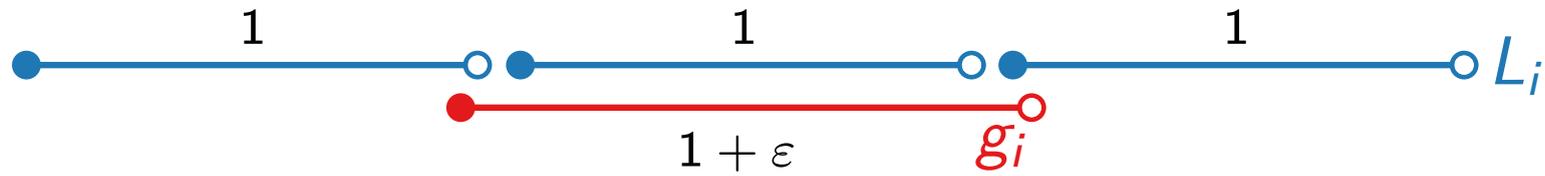
Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

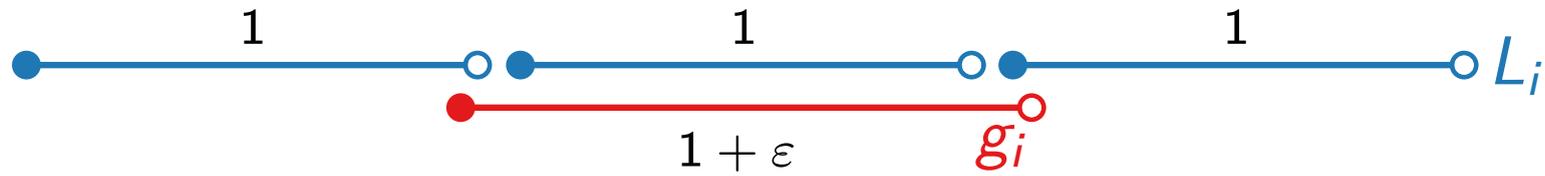
Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis.

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.

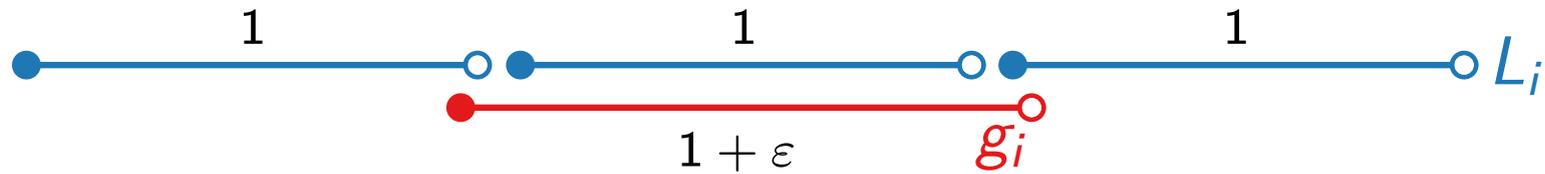


Beweis.

(a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



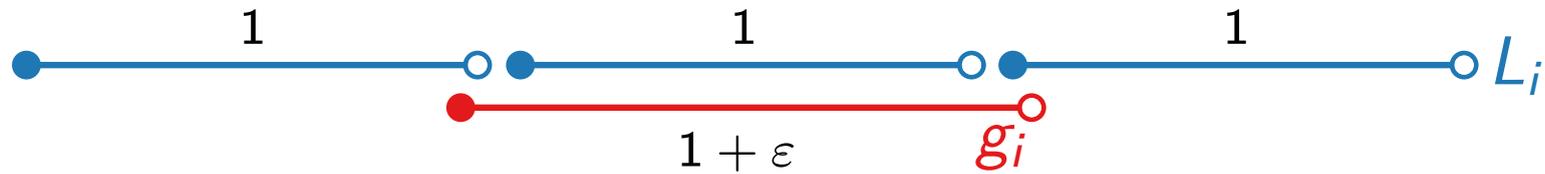
Beweis.

(a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i

(b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.

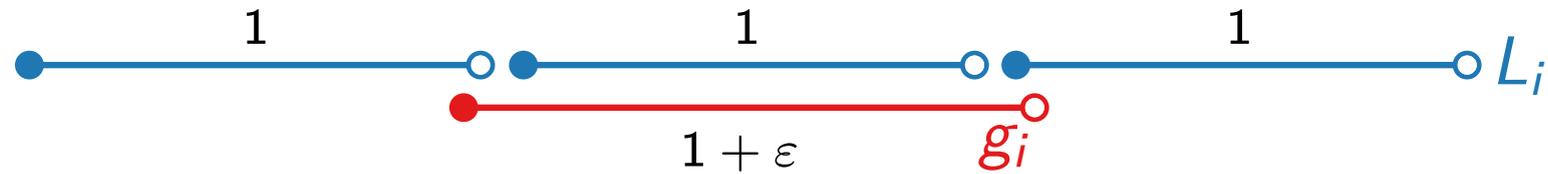


Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



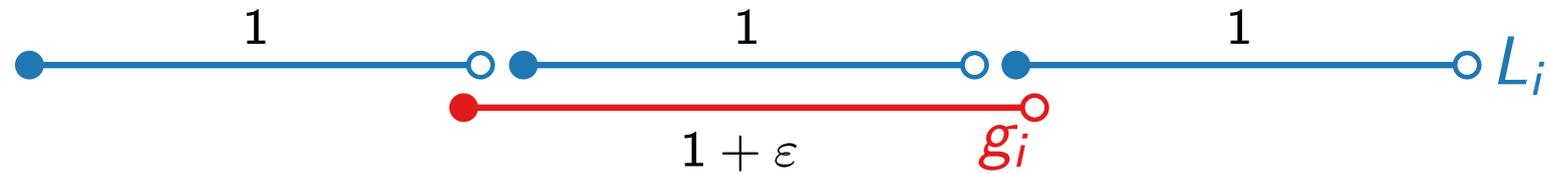
Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

\Rightarrow

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



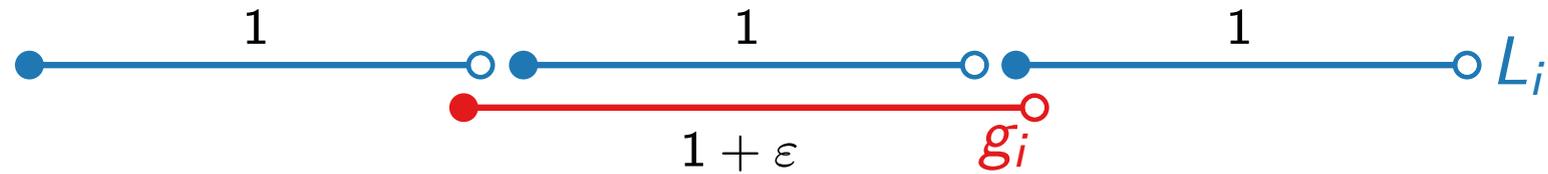
Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^k \ell(g_i)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



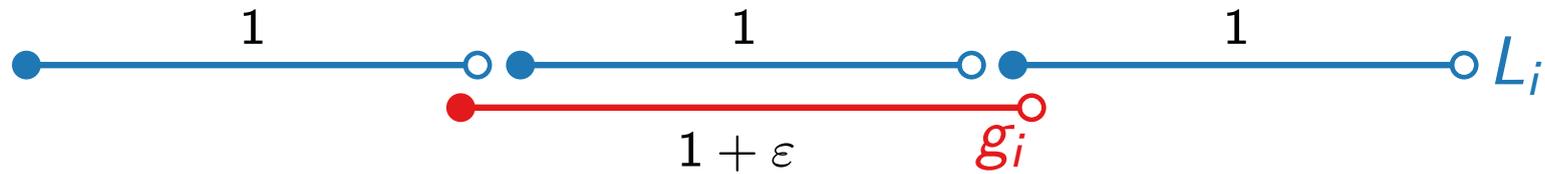
Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^k \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



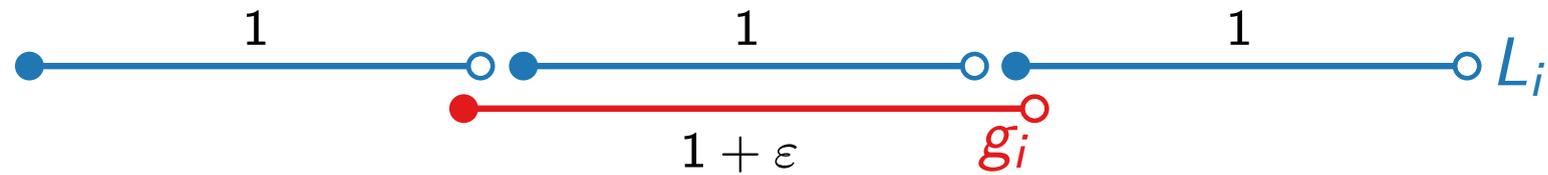
Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \ell(L) = \sum_{i=1}^k \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^k \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



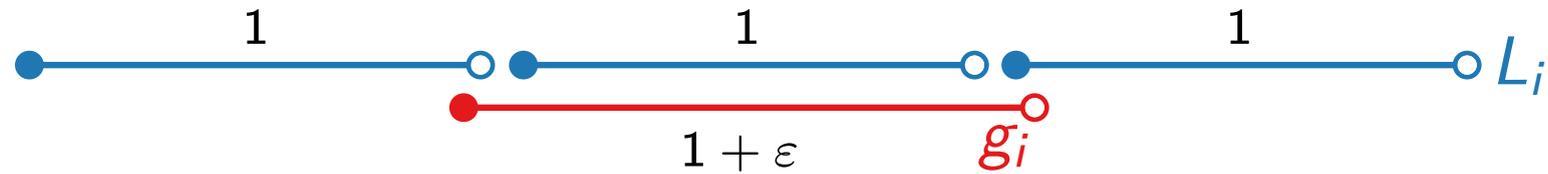
Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \text{OPT} = \ell(L) = \sum_{i=1}^k \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^k \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis.

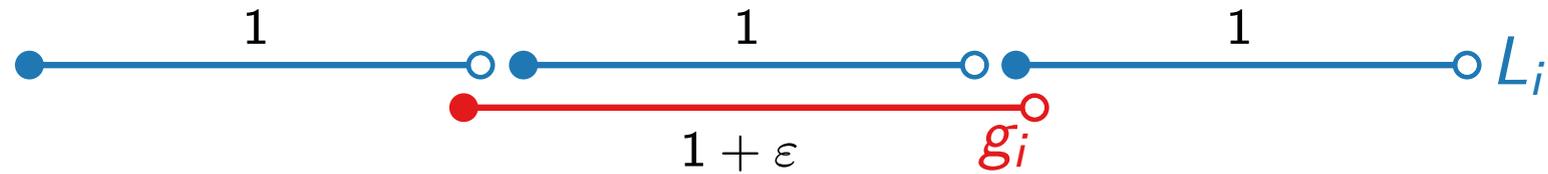
- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \text{OPT} = \ell(L) = \sum_{i=1}^k \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^k \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

$$\Rightarrow \ell(G) > \text{OPT}/3$$

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

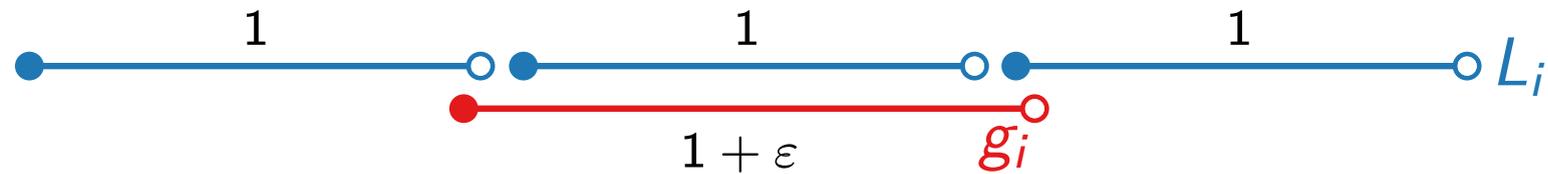
$$\Rightarrow \text{OPT} = \ell(L) = \sum_{i=1}^k \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^k \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

$$\Rightarrow \ell(G) > \text{OPT}/3$$

\Rightarrow 2. GA liefert *immer* mind. $1/3$ der maximalen Gesamtlänge.

Wie gut/schlecht ist der 2. GA?

Behauptung: Für $i = 1, \dots, k$ gilt $\ell(L_i) < 3\ell(g_i)$.



Beweis.

- (a) g_i ist nach Wahl ein längstes Intervall in G_i
- (b) jedes $a \in L_i$ schneidet g_i
- (c) Intervalle in L_i sind paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \text{OPT} = \ell(L) = \sum_{i=1}^k \ell(L_i) < 3 \sum_{i=1}^k \ell(g_i) = 3\ell(G)$$

$$\Rightarrow \ell(G) > \text{OPT}/3$$

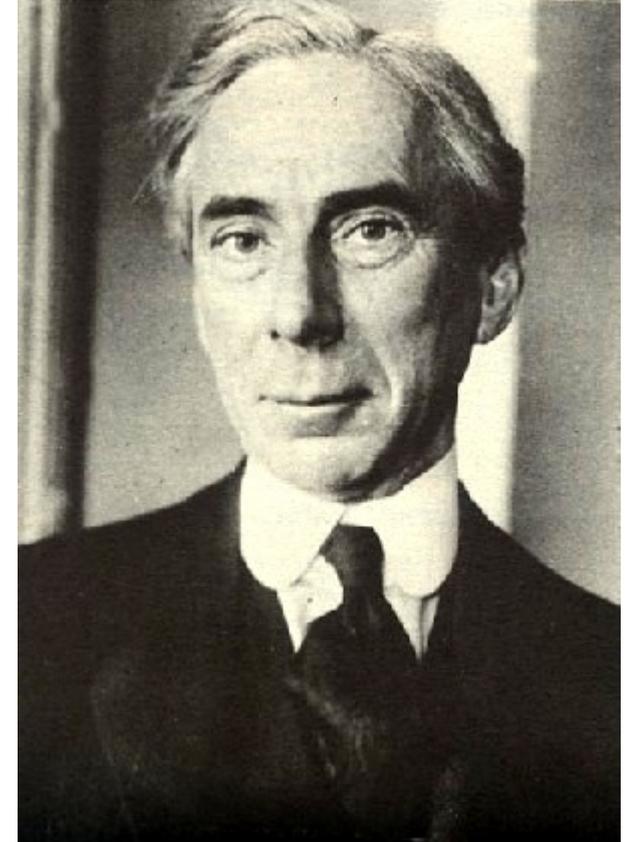
\Rightarrow 2. GA liefert *immer* mind. $1/3$ der maximalen Gesamtlänge.

Also ist der 2. GA ein **Faktor-(1/3)-Approximationsalgorithmus.**

Approxim... *h*ä?

Approxim. . . *hä?*

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

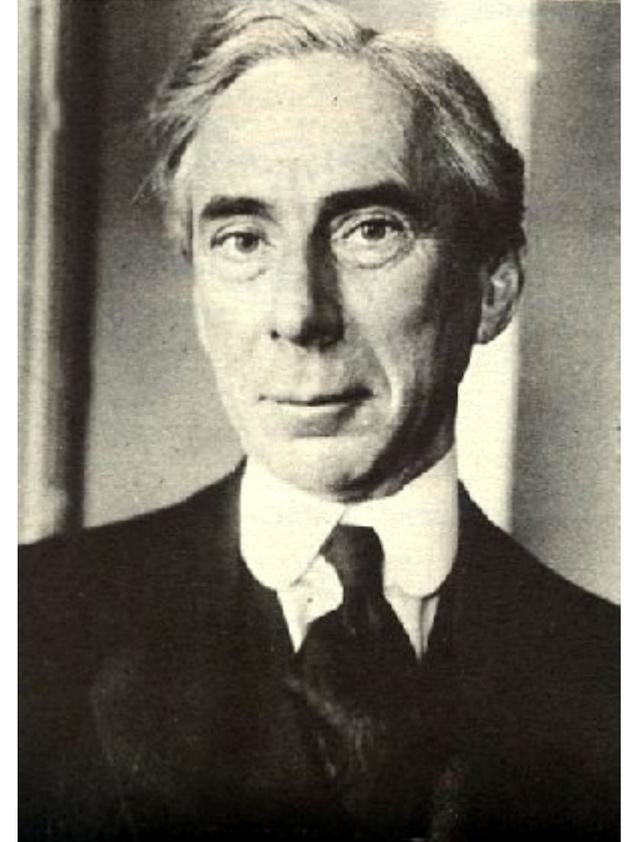


Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . *hä?*

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.



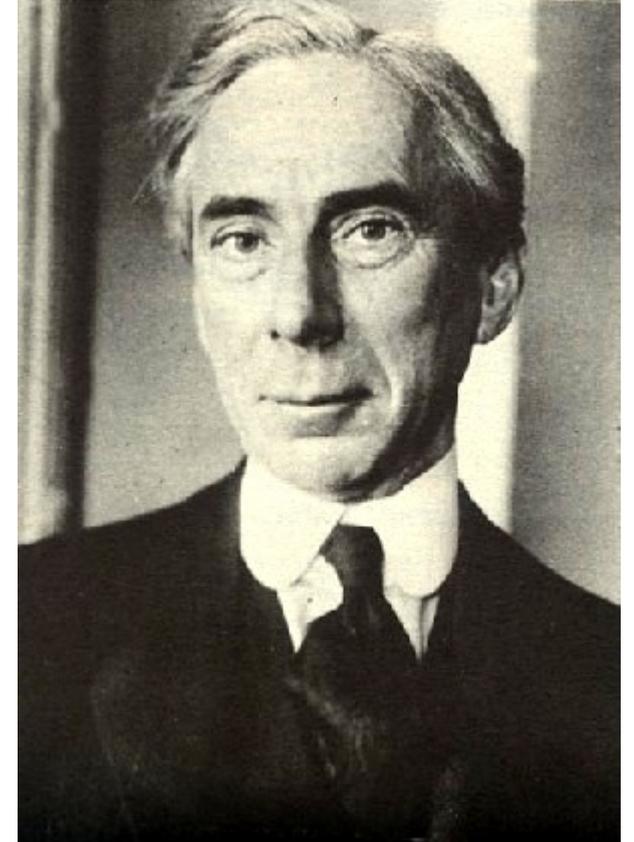
Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

z.B. Ablaufplanung



Bertrand Russell
(1872–1970)

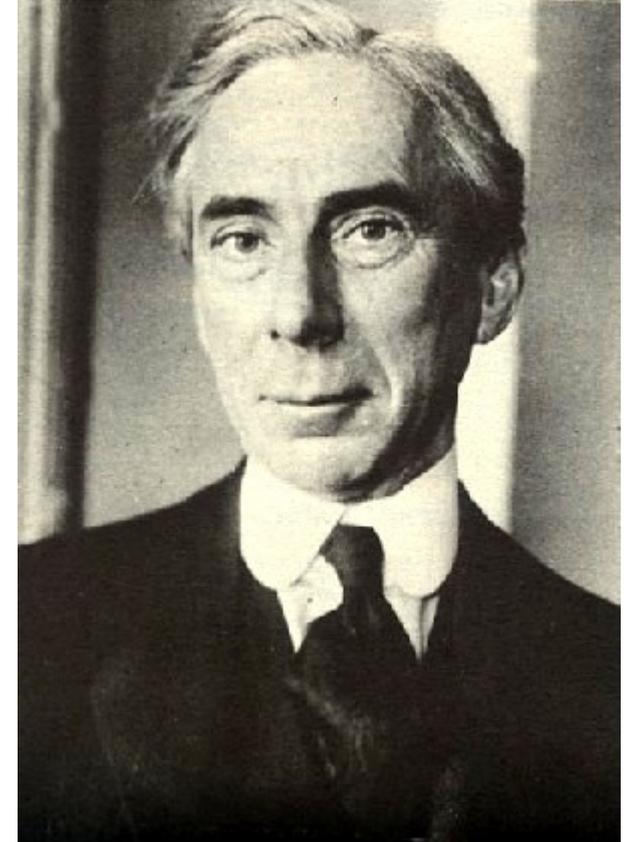
Approxim. . . hä?

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

z.B. Ablaufplanung



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

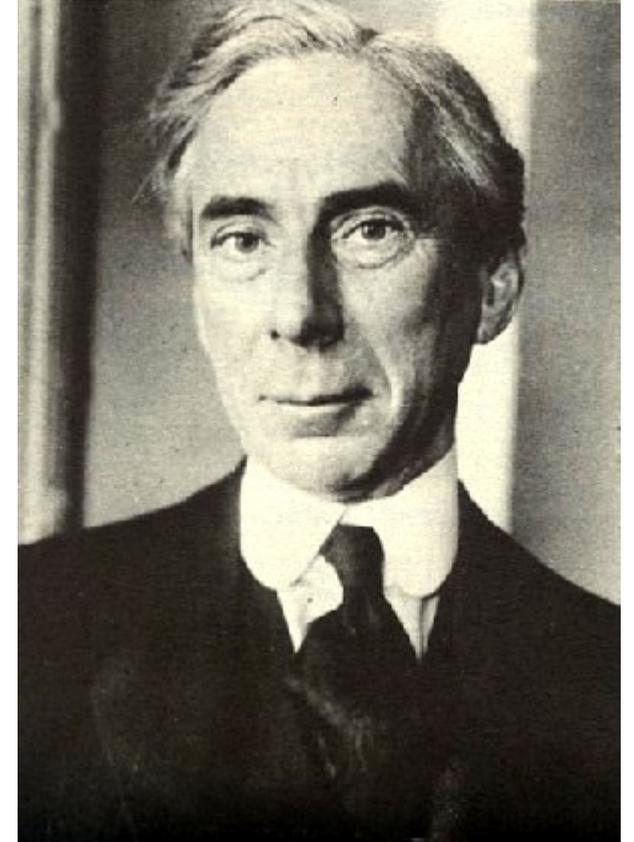
„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

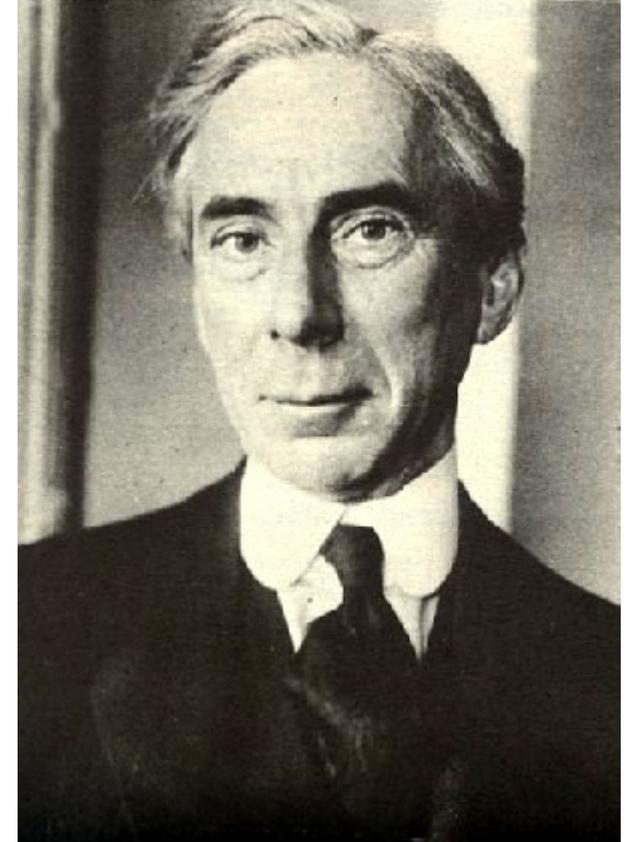
Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„*All exact science is dominated by the idea of approximation.*“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

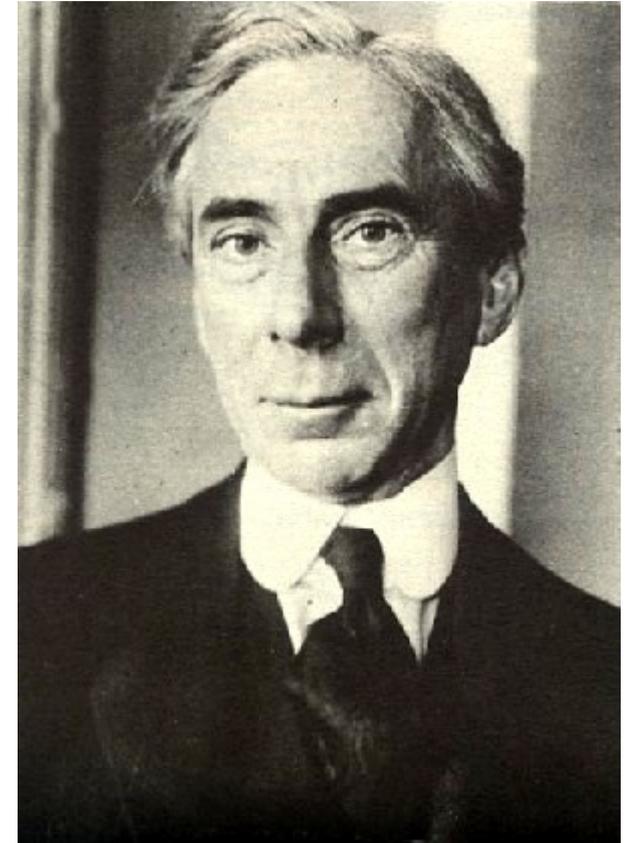
Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt *γ -Approximation*, wenn

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

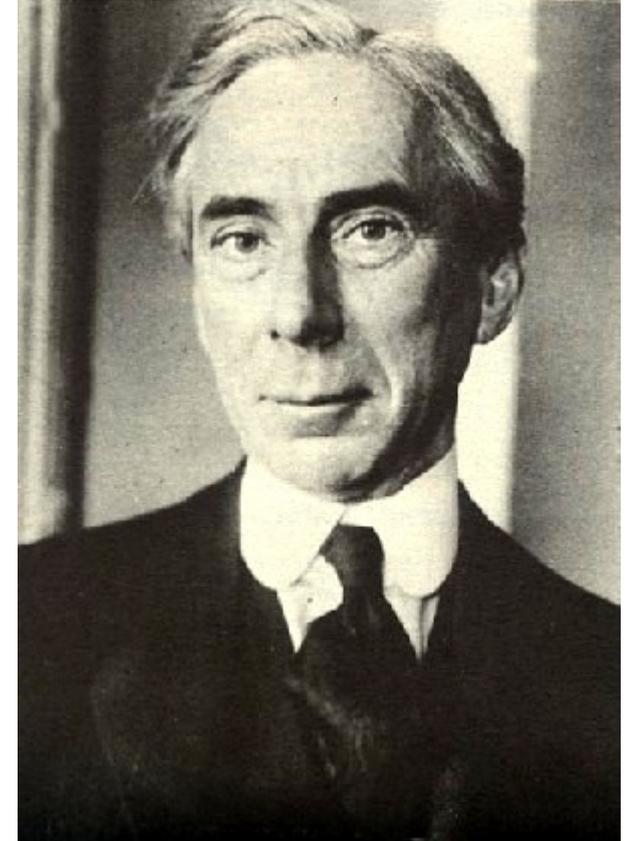
- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt *γ -Approximation*, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

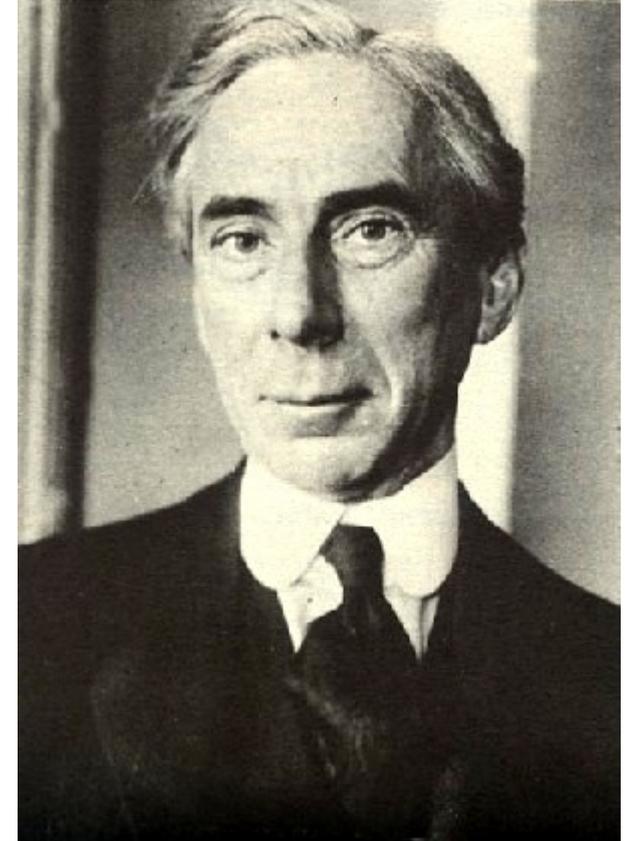
$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$

1/3-Approximation liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

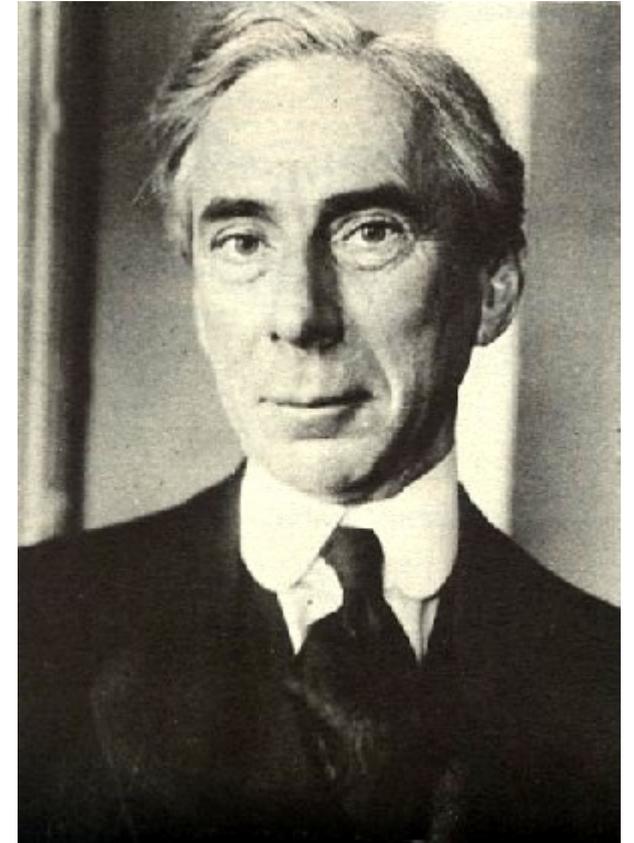
$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$

1/3-Approximation liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

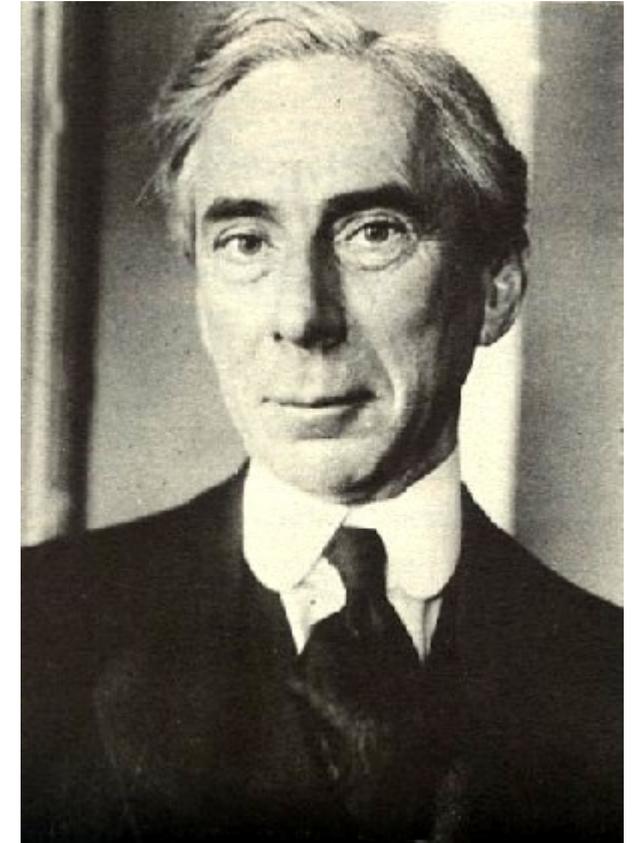
$$\zeta(\text{optimale Lösung}) \geq \frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$

1/3-Approximation liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\zeta(\text{optimale Lösung}) \geq \frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

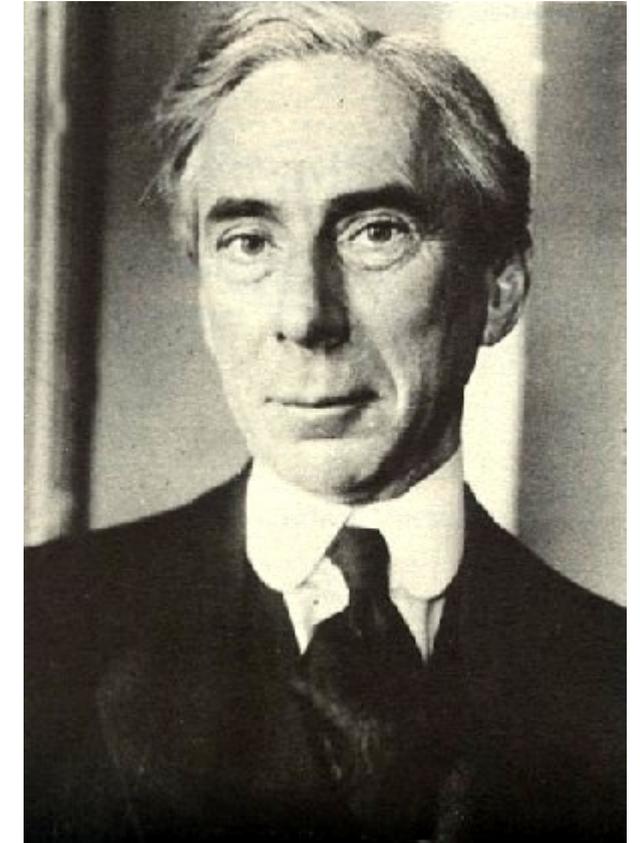
- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$

1/3-Approximation liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\zeta(\text{optimale Lösung}) \geq \gamma \cdot \zeta(\mathcal{A}(I))$$

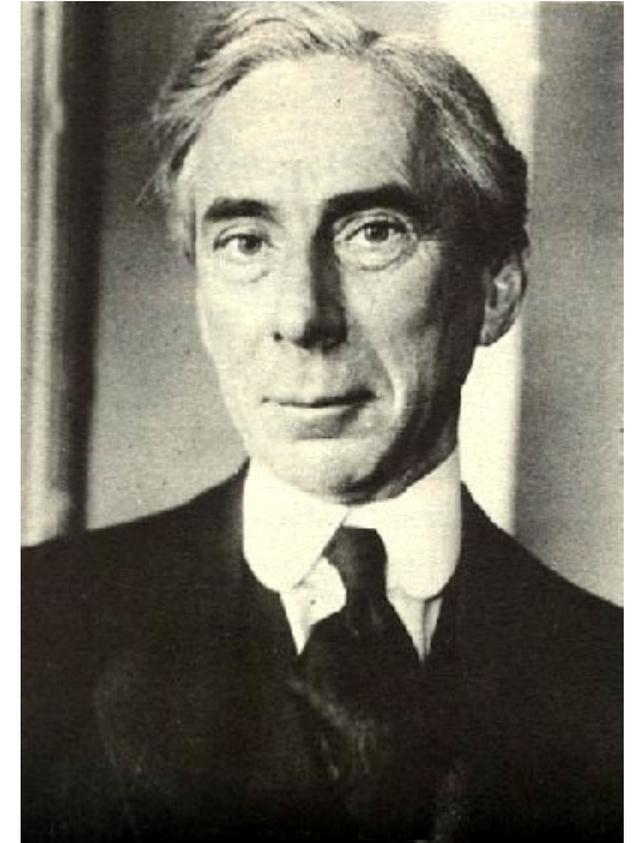
- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$

1/3-Approximation liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.



Bertrand Russell
(1872–1970)

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

$\zeta(\text{optimale Lösung})$ → $\text{OPT}(I)$

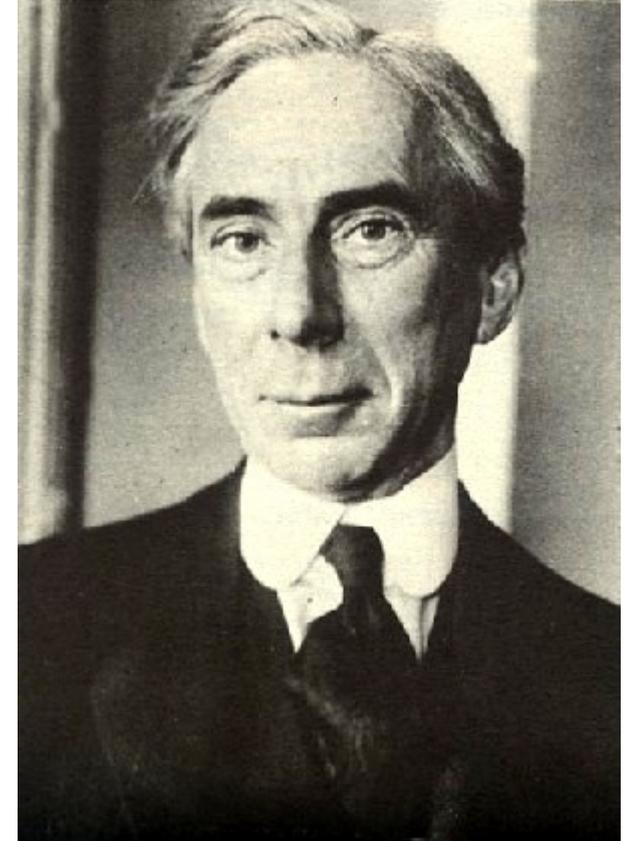
- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $\|I\|$ ist.

z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$

1/3-Approximation liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.



Bertrand Russell
(1872–1970)

Größe der Instanz I

Approxim. . . hä?

„All exact science is dominated by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Maximierungsproblem*.

Sei ζ die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≤ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\zeta(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

$\zeta(\text{optimale Lösung})$ → $\text{OPT}(I)$

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $\|I\|$ ist.

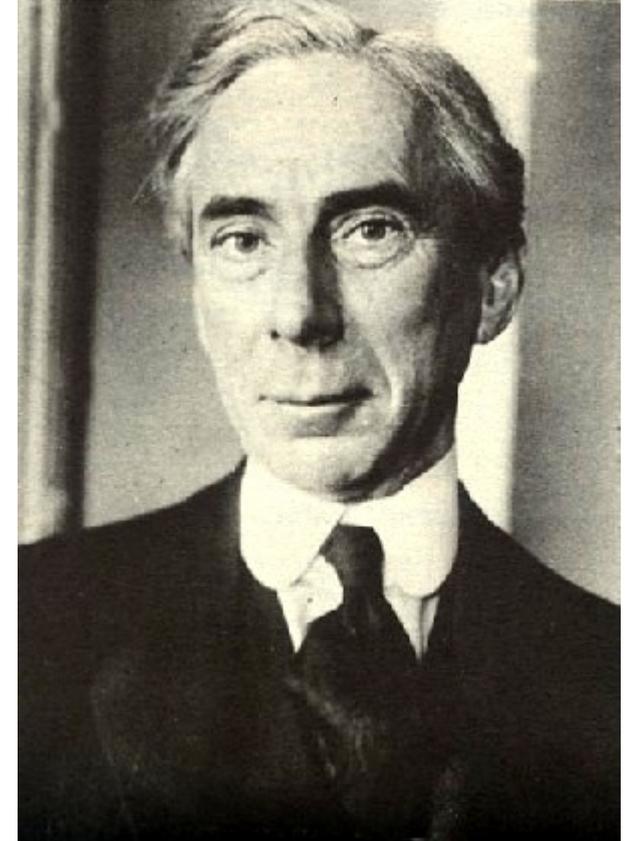
z.B. Ablaufplanung

$$\zeta = \ell$$

$$\gamma = 1/3$$

1/3-Approximation liefert Menge von Aktivitäten, deren Gesamtlänge mindestens 1/3 der maximal möglichen Länge ist.

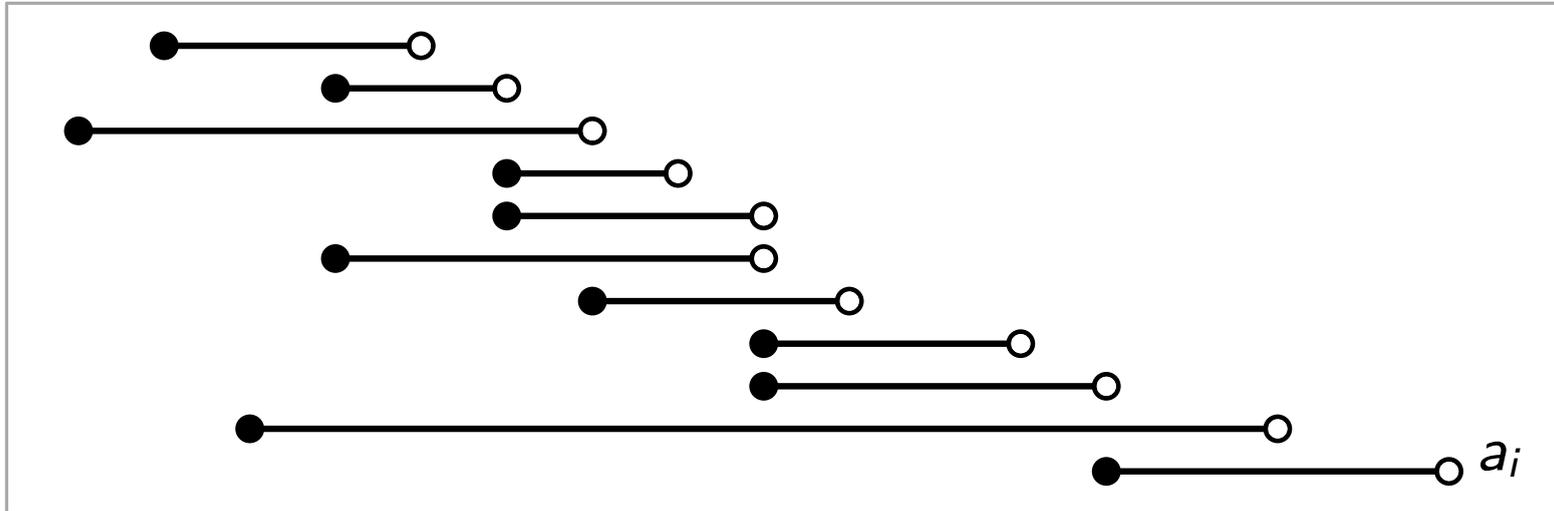
$$O(n \log n)$$



Bertrand Russell
(1872–1970)

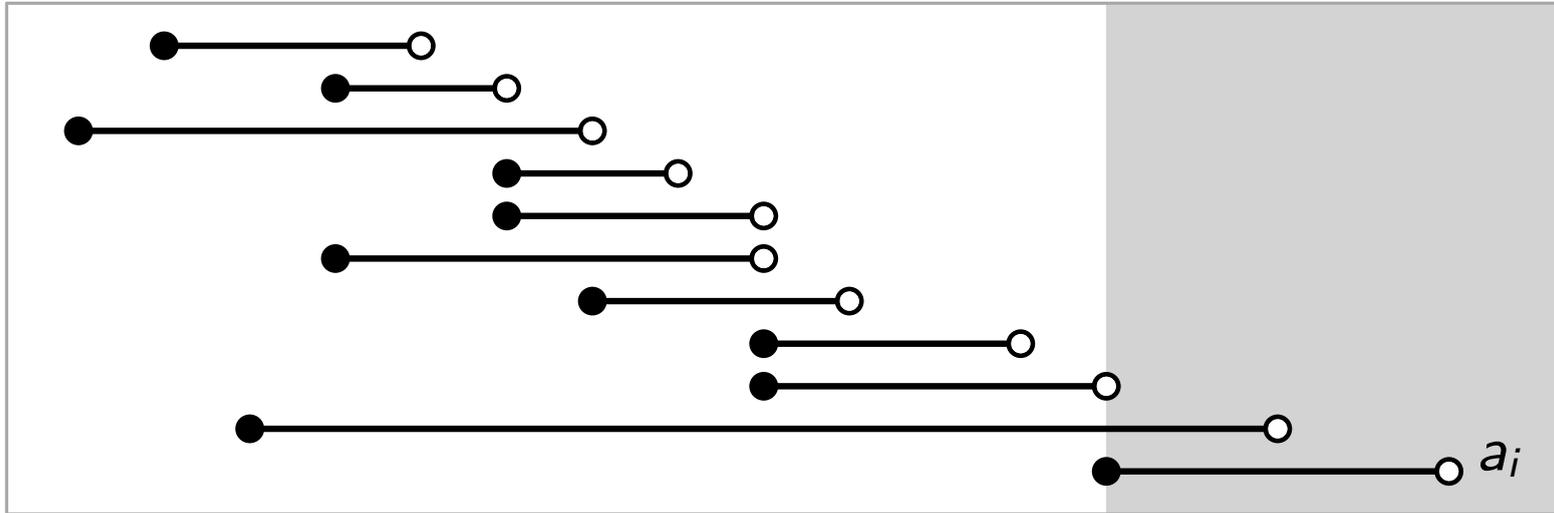
Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



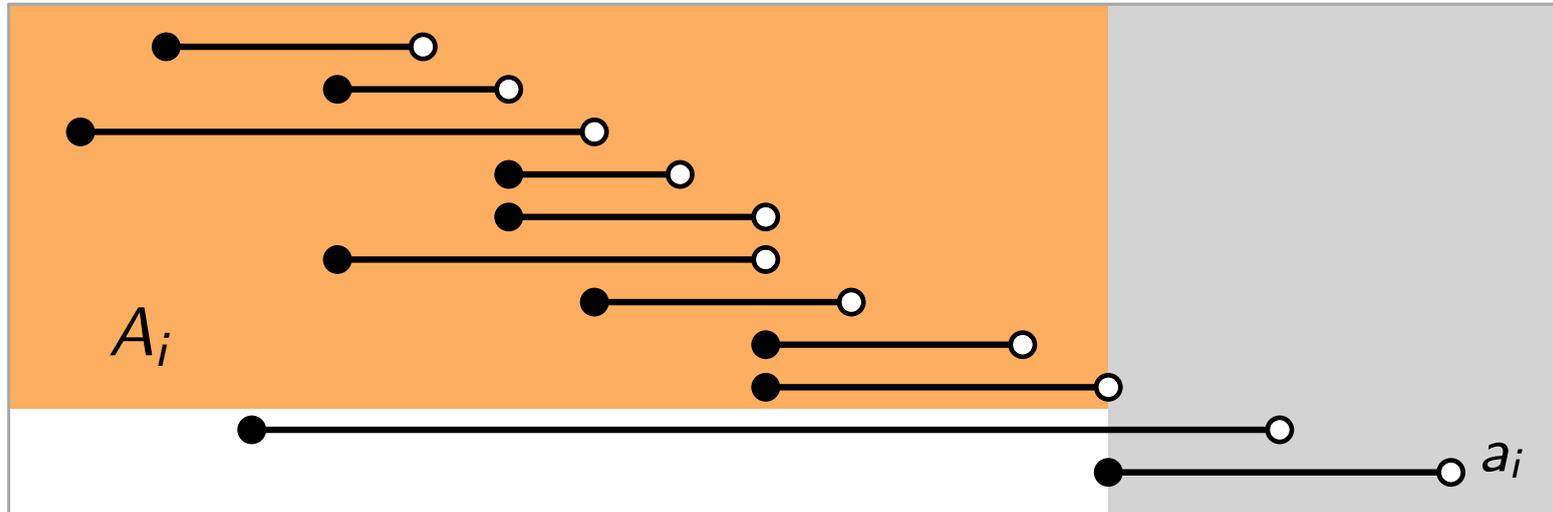
Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



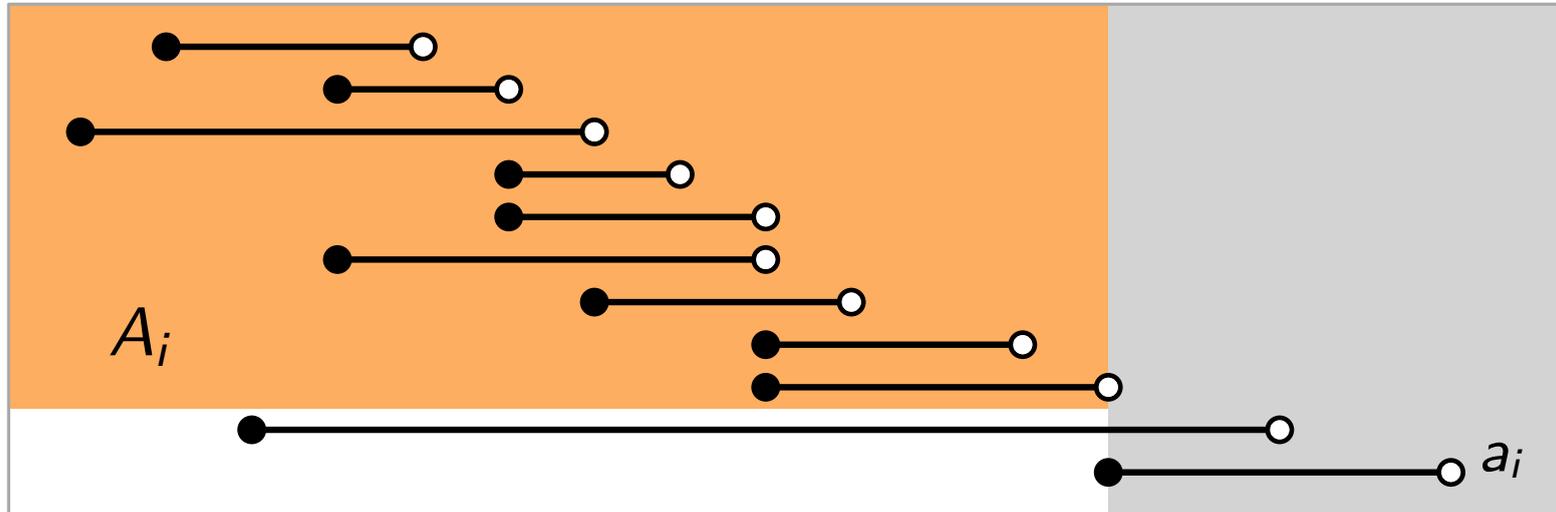
Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)

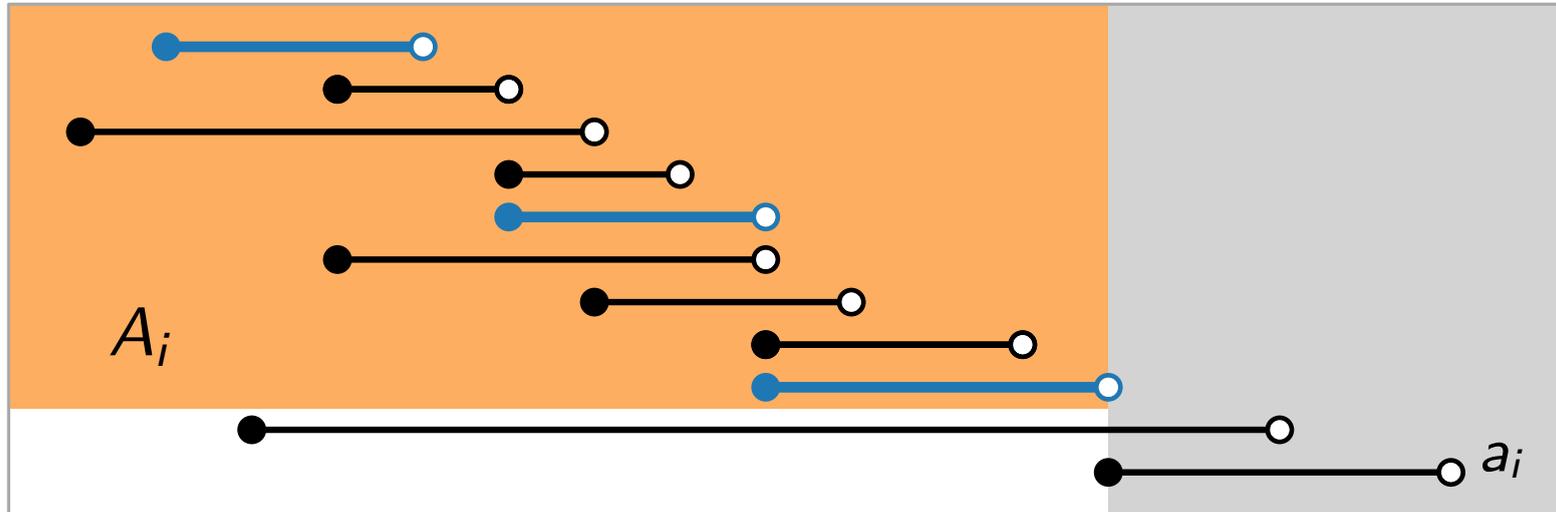


Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)

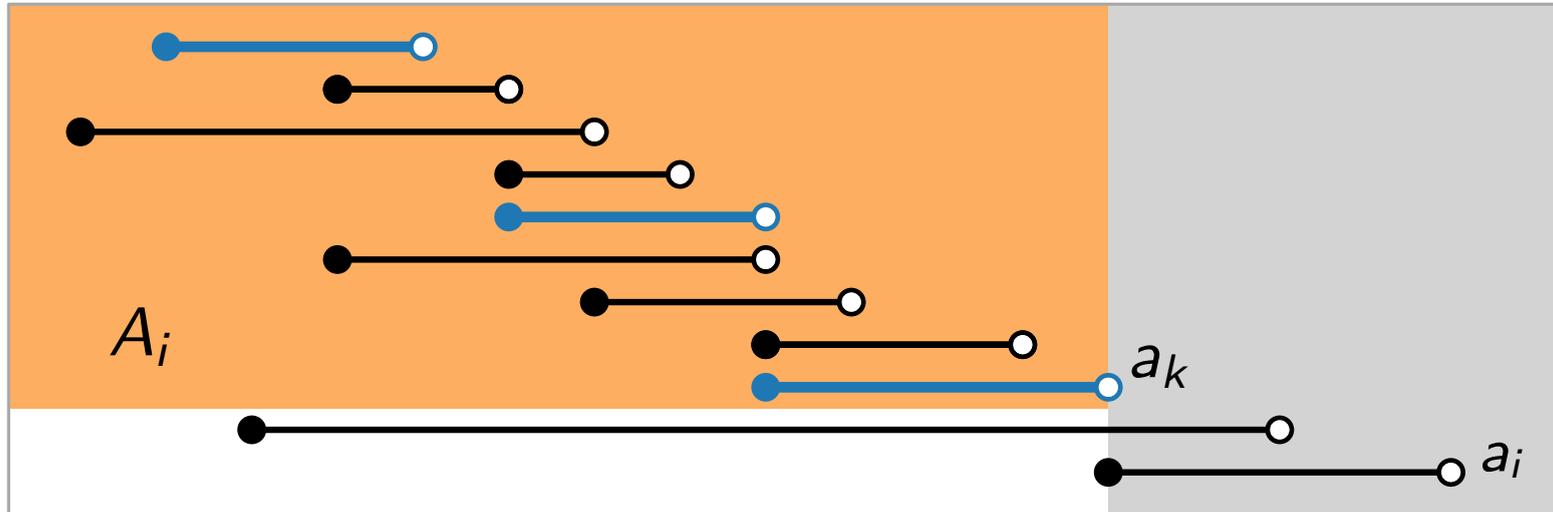


Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)

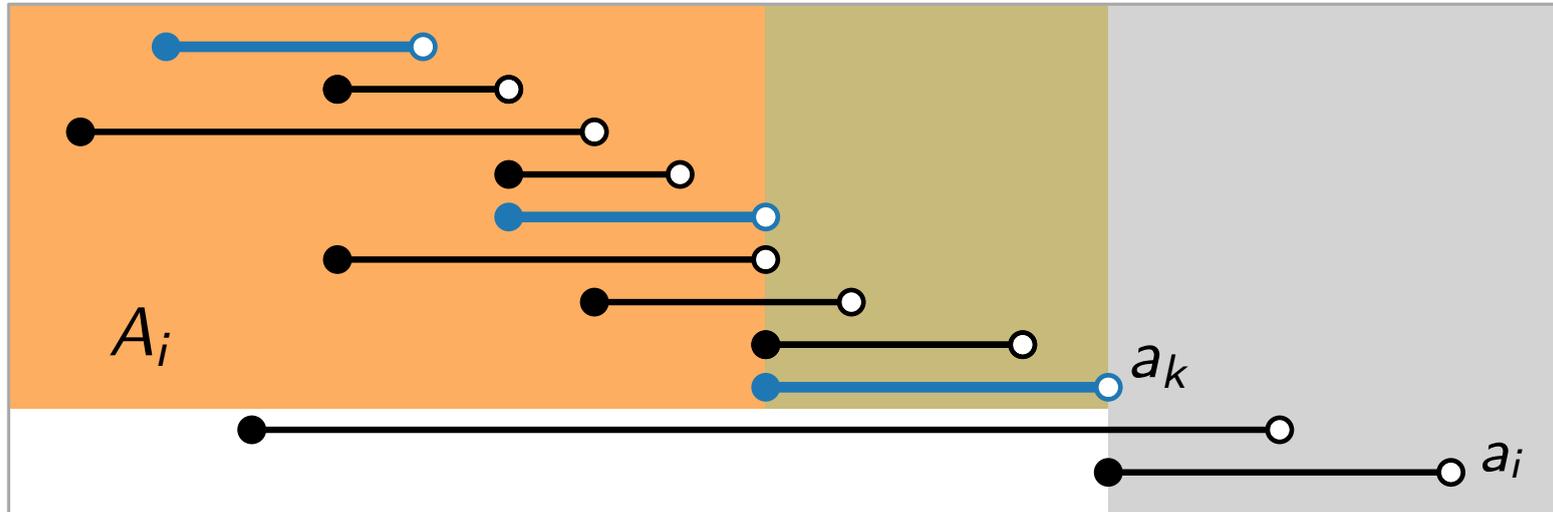


Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)

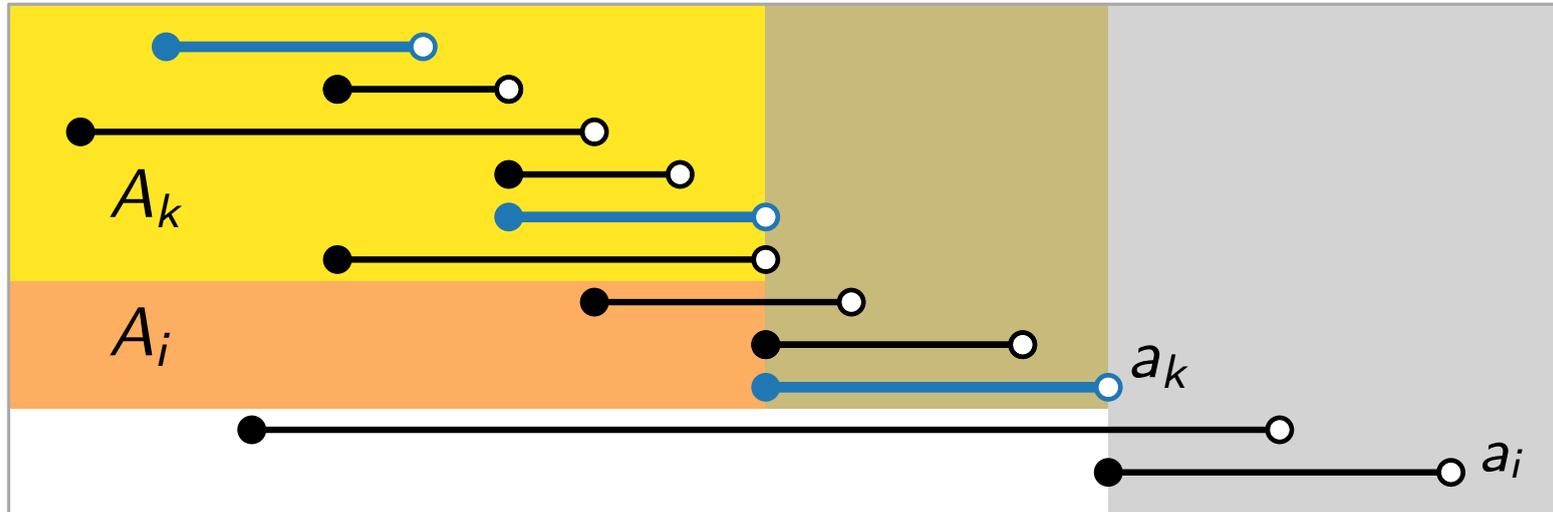


Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)

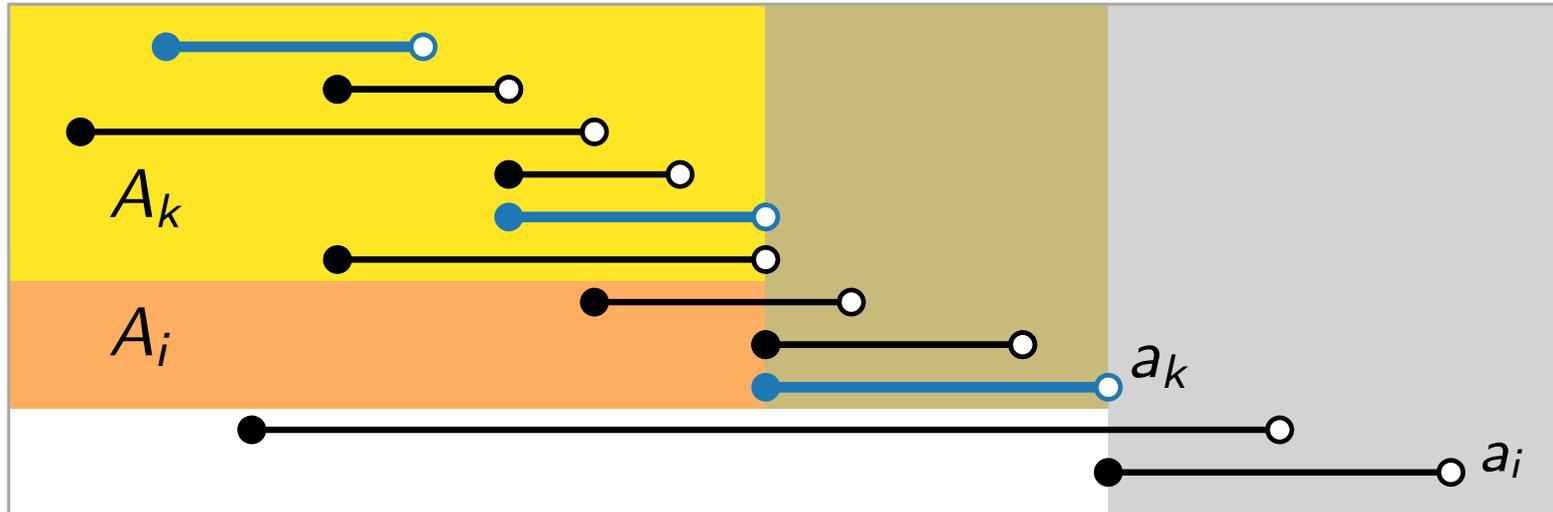


Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



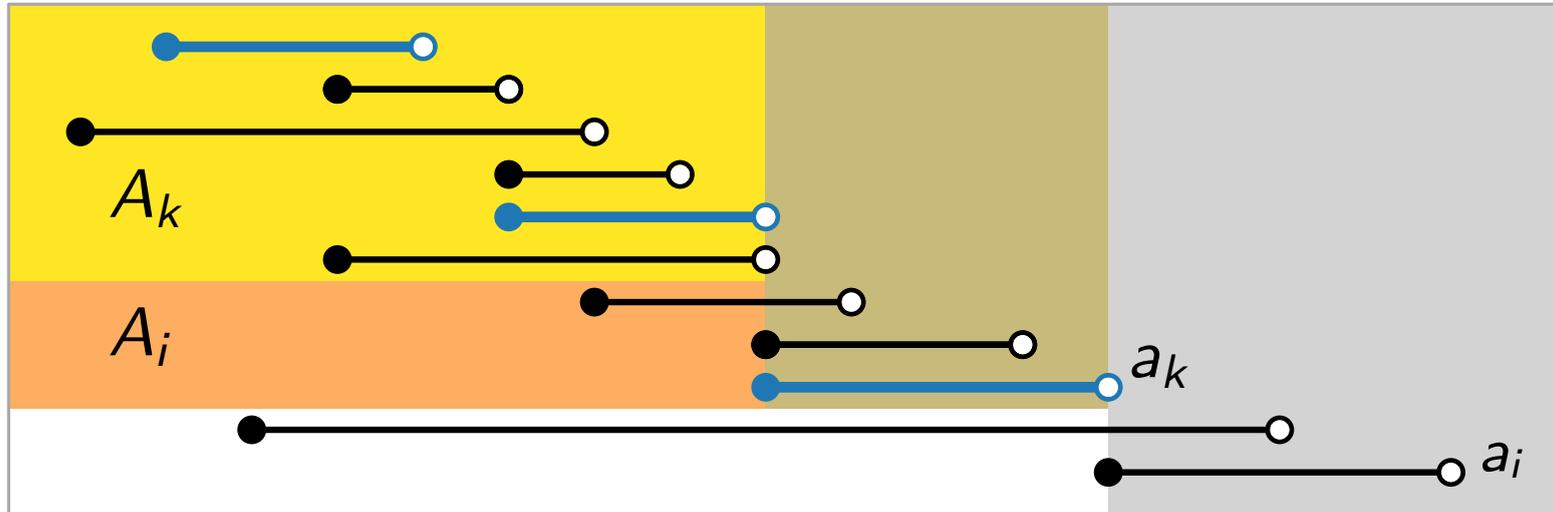
Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

} optimale Teilstruktur!

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

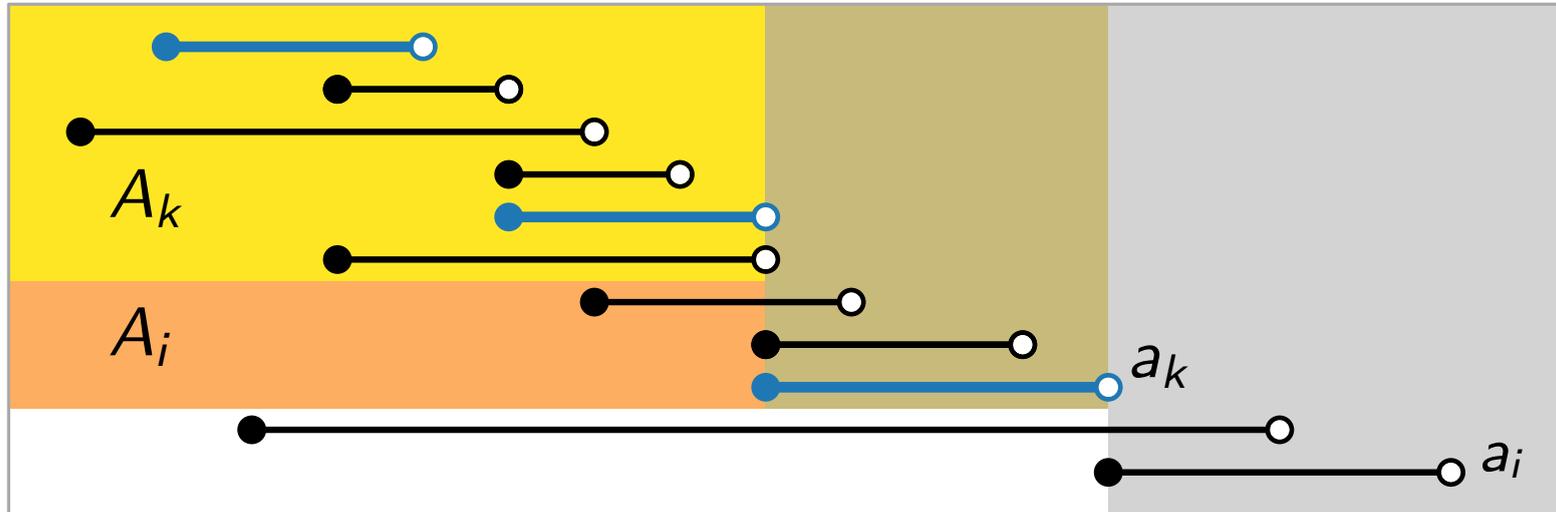
- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

} optimale Teilstruktur!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

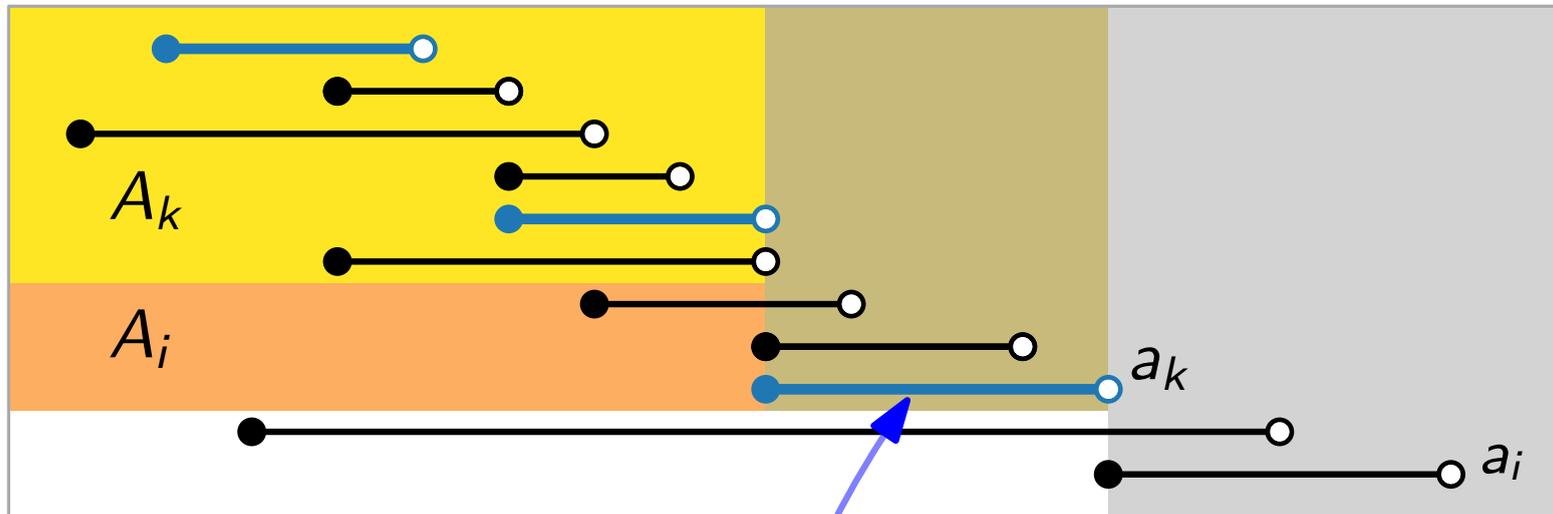
} optimale Teilstruktur!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \text{[grey box]}$$

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

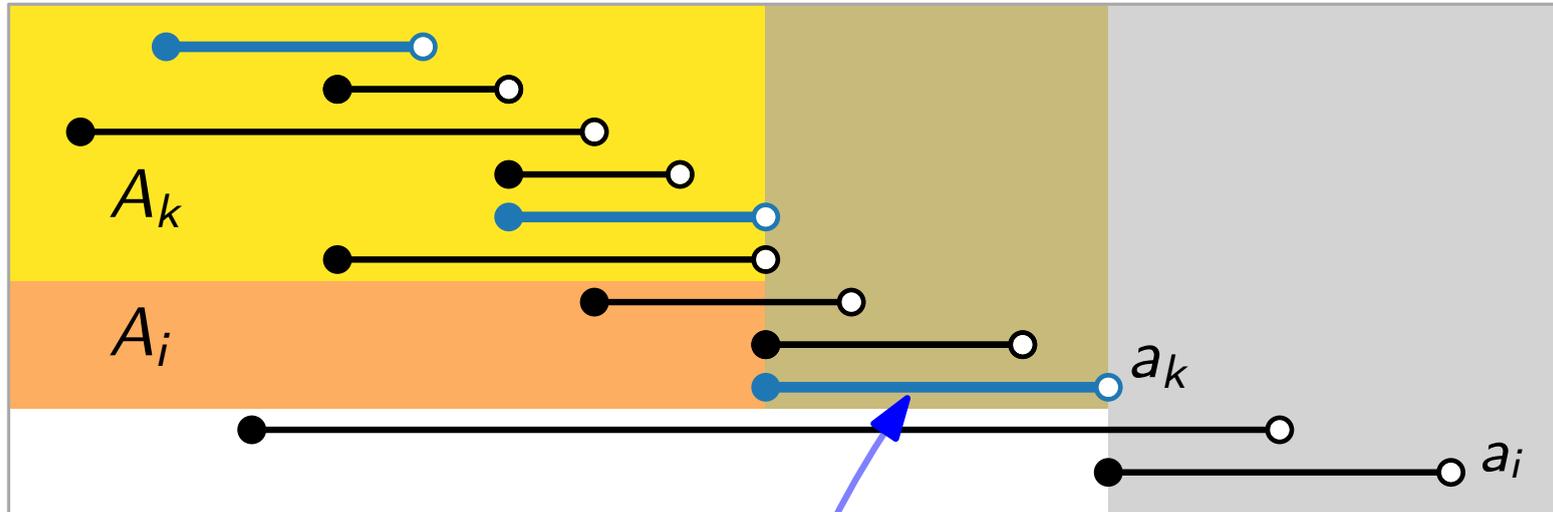
} optimale Teilstruktur!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

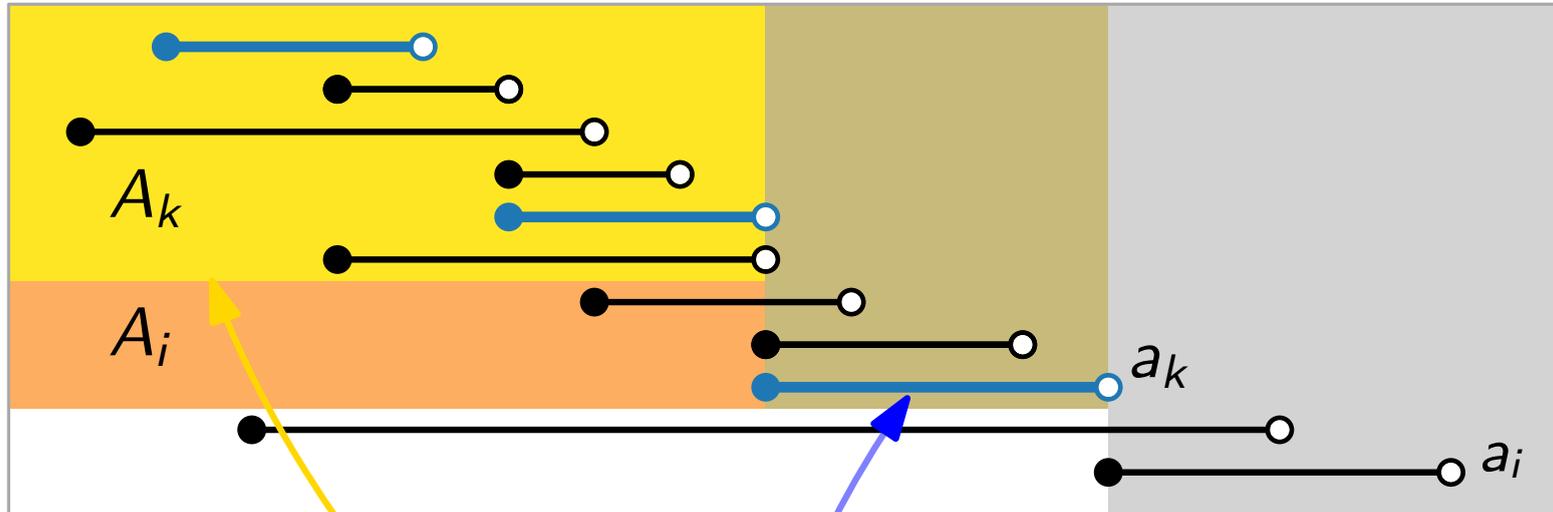
} optimale Teilstruktur!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Ein exakter Algorithmus...

Für $i = 1, \dots, n$ sei $A_i = \{a_j \in A \mid e_j \leq s_i\}$ die Menge aller Intervalle in A , die enden, bevor a_i beginnt. (Setze $A_{n+1} = A$.)



Eine optimale Lösung für A_i besteht aus:

- *einem* letzten Intervall a_k und
- einer optimalen Lösung für A_k .

} optimale Teilstruktur!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen.

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 =$

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit?

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k)$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es **TABELLE** c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit?

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \text{BERECHNUNG EINES TABELLENEINTRAGS}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es **TABELLE** c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.

Laufzeit?

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \text{BERECHNUNG EINES TABELLENEINTRAGS}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit?

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{BERECHNUNG EINES} \\ \text{TABELLENEINTRAGS} \end{array} \right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit?

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{BERECHNUNG EINES} \\ \text{TABELLENEINTRAGS} \end{array} \right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{BERECHNUNG EINES} \\ \text{TABELLENEINTRAGS} \end{array} \right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{BERECHNUNG EINES} \\ \text{TABELLENEINTRAGS} \end{array} \right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

Resultate:

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{BERECHNUNG EINES} \\ \text{TABELLENEINTRAGS} \end{array} \right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

Resultate:

- Der 2. Greedy-Alg. findet in $O(n \log n)$ Zeit eine Lösung, die *mindestens 1/3 des maximalen Ertrags* garantiert.

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{BERECHNUNG EINES} \\ \text{TABELLENEINTRAGS} \end{array} \right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

Resultate:

- Der 2. Greedy-Alg. findet in $O(n \log n)$ Zeit eine Lösung, die *mindestens 1/3 des maximalen Ertrags* garantiert.
- Unser DP findet in $O(n^2)$ Zeit eine Lösung mit *maximalem Ertrag*.

... ein Dynamisches Programm!

Also gilt für den Wert c_i einer optimalen Lösung für A_i :

$$c_i = \max_{a_k \in A_i} c_k + \ell(a_k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{BERECHNUNG EINES} \\ \text{TABELLENEINTRAGS} \end{array} \right\} \text{ in je } O(n) \text{ Zeit}$$

Erinnern wir uns...

c_{n+1} ist der Wert der optimalen Lösung für $A_{n+1} = A$.

Also genügt es c_1, \dots, c_{n+1} zu berechnen, wobei $c_1 = 0$.
Größe $O(n)$

Laufzeit? $O(n^2)$

Schreiben Sie den Pseudocode!

Resultate:

- Der 2. Greedy-Alg. findet in $O(n \log n)$ Zeit eine Lösung, die *mindestens 1/3 des maximalen Ertrags* garantiert.
- Unser DP findet in $O(n^2)$ Zeit eine Lösung mit *maximalem Ertrag*.

Trade-Off zwischen Zeit und Qualität!