Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2025

18. Vorlesung

Nächstes Paar

Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Themen für den 3. Zwischentest (Do, 15.1.26)

- Rot-Schwarz-Bäume (R-S-Eigenschaften, Höhe)
- Augmentieren von Datenstrukturen
- Nächstes Paar (Teile und Herrsche)
- Amortisierte Analyse
- Graphen und Breitensuche

Problem:

Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene, jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p).

Finde: Punktepaar $\{p, q\} \subseteq P$ mit kleinstem (euklidischen) Abstand.

Def. Euklidischer Abstand von p und q ist $d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$.

Lösung:

Laufzeit: $\Theta(n^2)$

- Gehe durch alle $\binom{n}{2}$ Punktepaare und berechne ihren Abstand.
- Gib ein Paar mit kleinstem Abstand zurück.

Mach's besser!

Entwurfsparadigma: – inkrementell?
– randomisiert?
– Teile und Herrsche?!

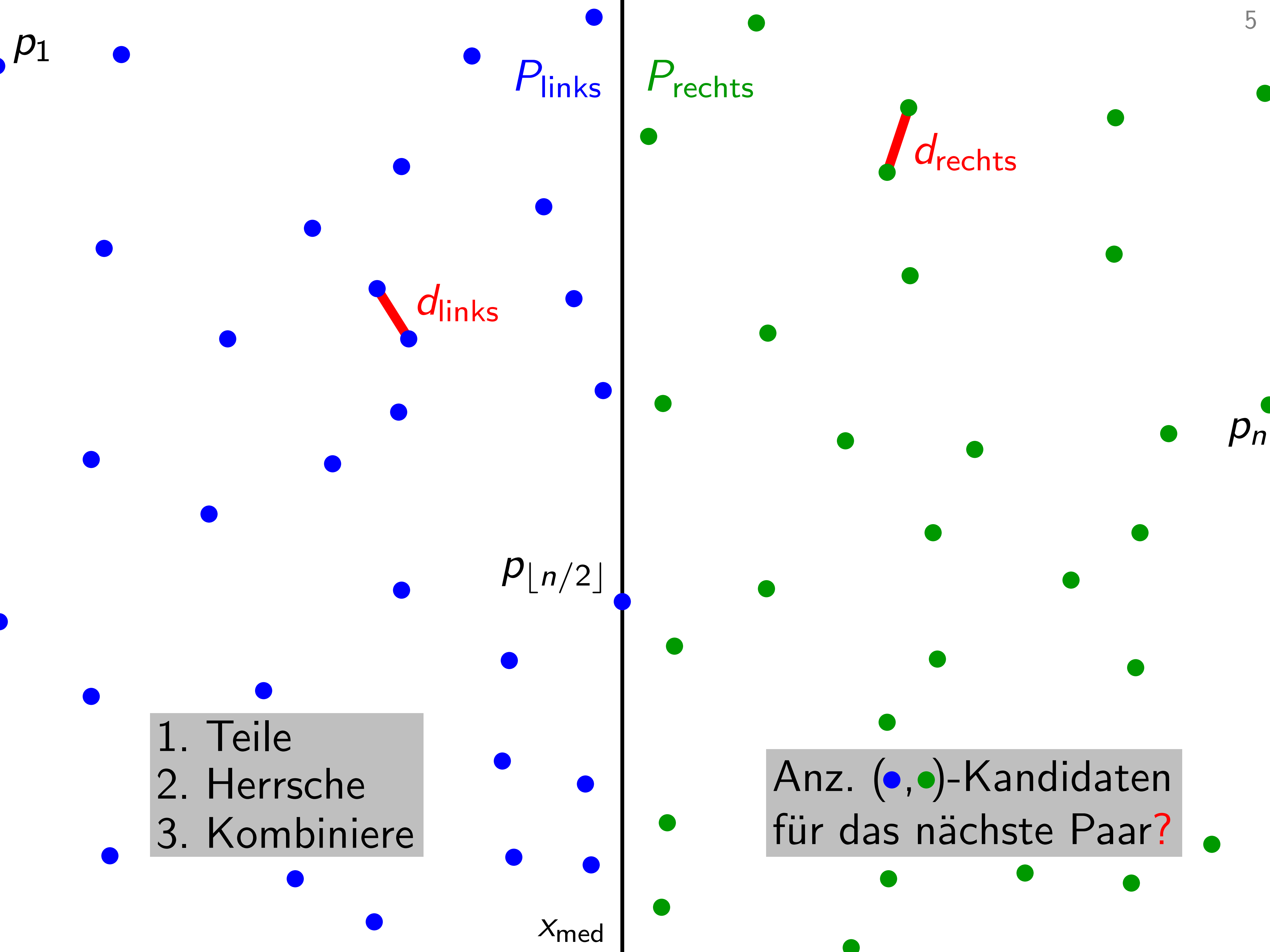
Spezialfall: 

Lösung:

- Sortiere (nach x-Koordinate).
- Berechne Abstände aller *aufeinanderfolgender* Punktepaare.
- Bestimme das Minimum dieser Abstände.

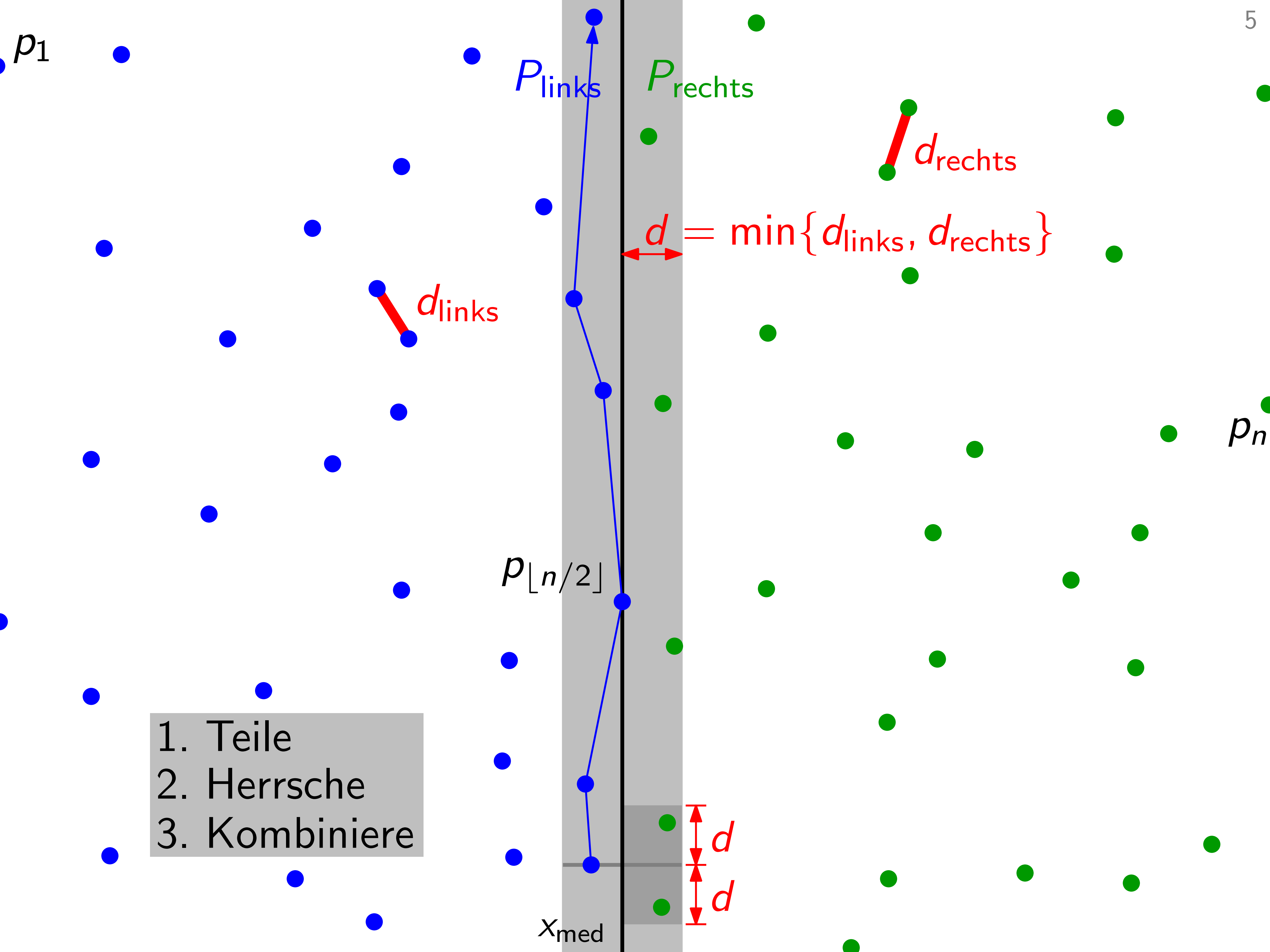
Strukturelle Einsicht:

Kandidatenmenge der Größe $n - 1$,
die gesuchtes Objekt enthält.

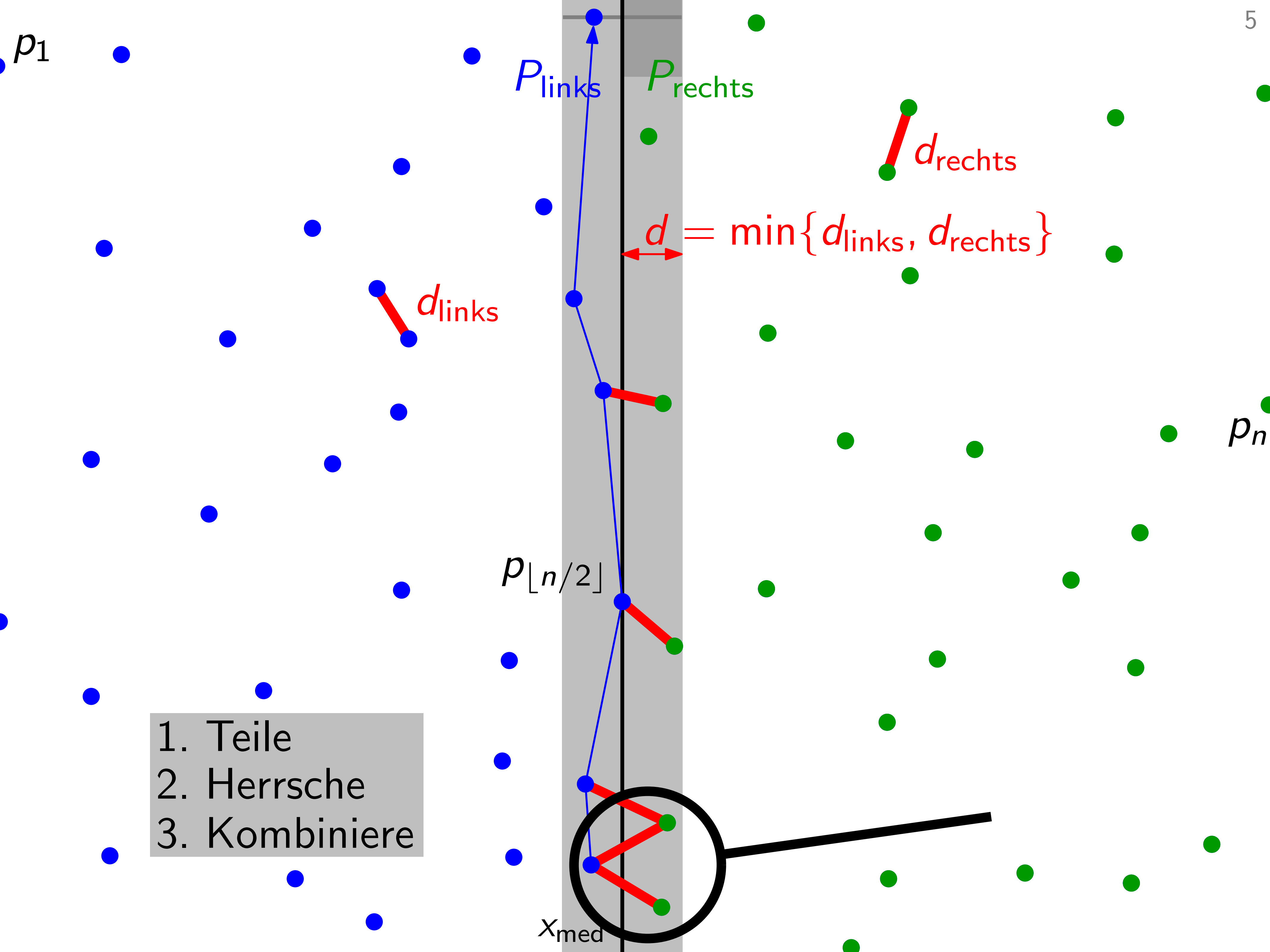


1. Teile
2. Herrsche
3. Kombiniere

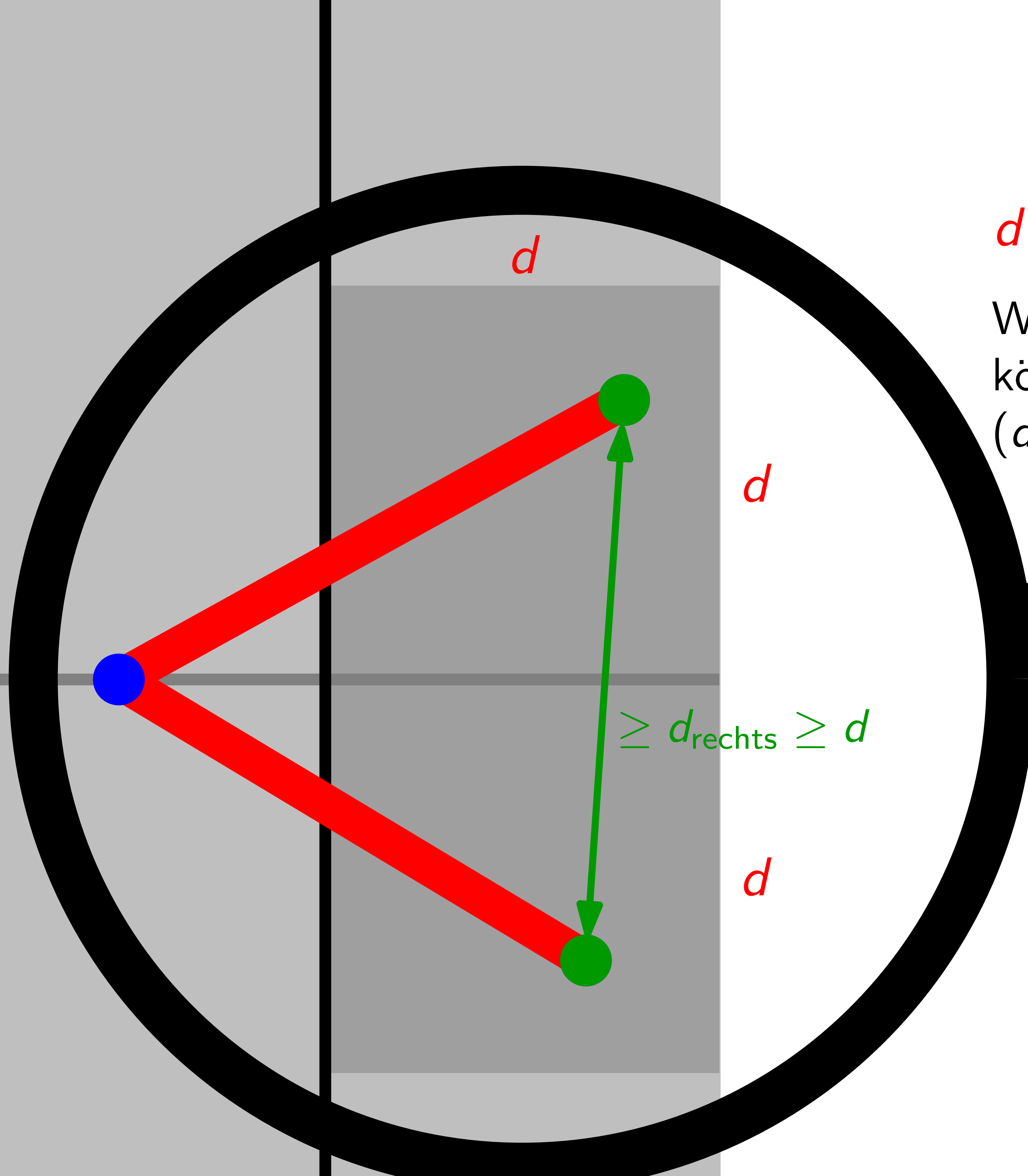
Anz. (●,●)-Kandidaten für das nächste Paar?



p_1
P_{links}
P_{rechts}
d_{rechts}
$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
d_{links}
p_n
$p_{\lfloor n/2 \rfloor}$
1. Teile
2. Herrsche
3. Kombiniere
d
d
x_{med}

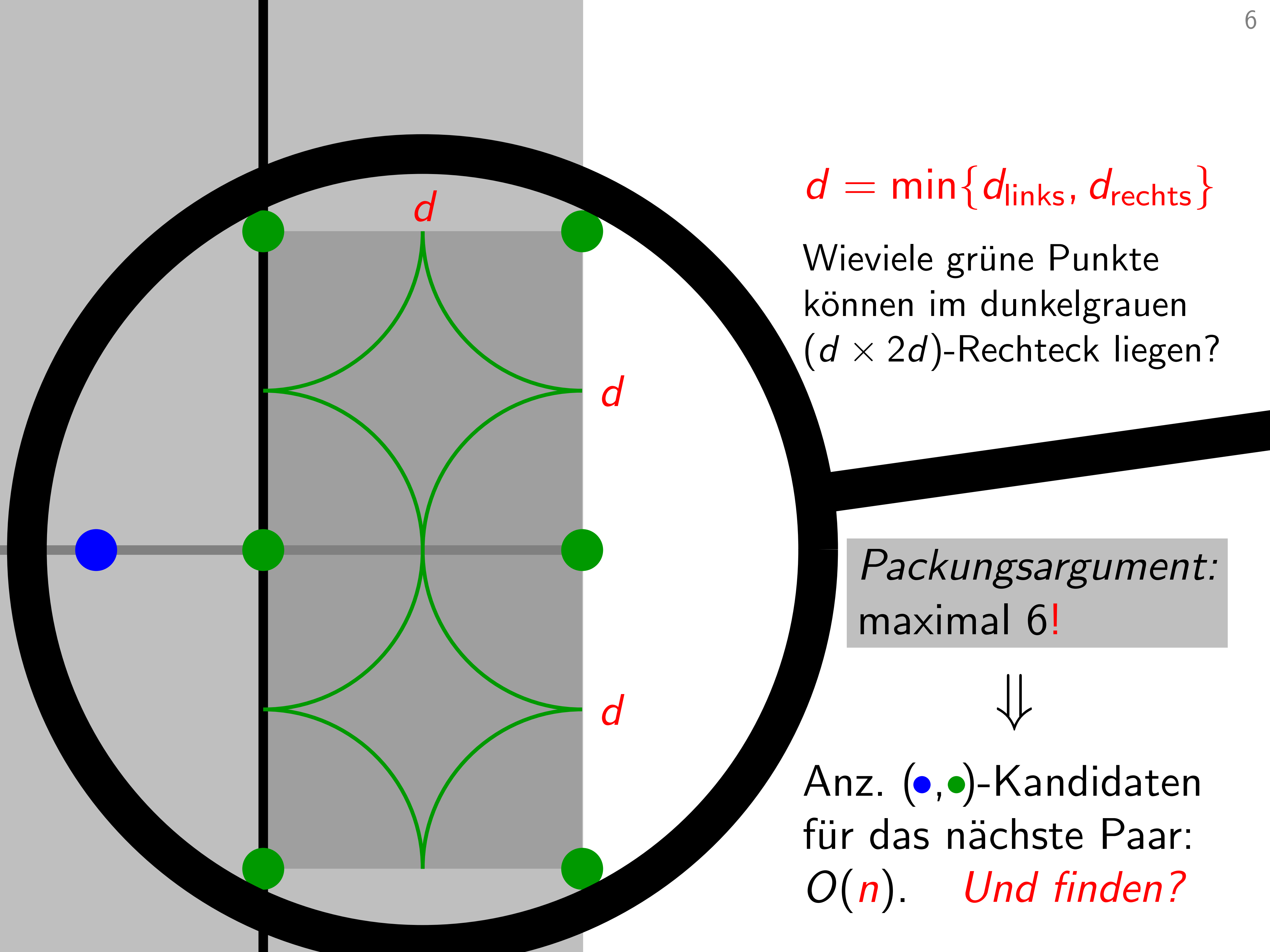


1. Teile
2. Herrsche
3. Kombiniere



$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

Wieviele grüne Punkte können im dunkelgrauen $(d \times 2d)$-Rechteck liegen?



$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

Wieviele grüne Punkte können im dunkelgrauen ($d \times 2d$)-Rechteck liegen?

Packungsargument: maximal 6!

$\Downarrow$

Anz. (●,●)-Kandidaten für das nächste Paar: $O(n)$. *Und finden?*

Algorithmus $\boxed{T(n) =}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Laufzeit des rekursiven Teils,} \\ \text{d.h. ohne Vorverarbeitung (1.)} \end{array} \right.$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
   bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
   d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
   - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
   - Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
   - Seien $P^{=}_{\text{links}}$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links}. ($P^{=}_{\text{rechts}}$ entsprech.)
     Für jeden Punkt p in $P^{=}_{\text{links}}$ gehe in $P^{=}_{\text{rechts}}$ bis y-Koord. $y_p + d$;
     halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).
   - Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P^{=}_{\text{links}}$ und $q \in K_p$.
   - Gib Min. von d_{mitte}, d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus $\boxed{T(n) =} \; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
   bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
   d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
   - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$ $O(1)$
   - Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate $O(n \log n)$
   - Seien $P^{=}_{\text{links}}$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links}. ($P^{=}_{\text{rechts}}$ entsprech.)
     Für jeden Punkt p in $P^{=}_{\text{links}}$ gehe in $P^{=}_{\text{rechts}}$ bis y-Koord. $y_p + d$;
     halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).
   - Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P^{=}_{\text{links}}$ und $q \in K_p$.
   - Gib Min. von d_{mitte}, d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

   $O(n)$

Laufzeit

$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Bestimme Parameter für das Theorem:
$a = b = 2$, $f(n) = O(n \log n)$.

Betrachte $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$.

$$\text{Gilt } f \in \left\{ \begin{array}{ll} O(n^{1-\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \\ \Theta(n^1) & \\ \Omega(n^{1+\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \end{array} \right\} ?$$

Nein, $f\colon n \mapsto O(n \log n)$ passt in keinen der drei Fälle.

Die Rekursionsbaummethode liefert... $T(n) = O(n \log^2 n)$.

Noch besser? $\boxed{T(n) \approx} \, 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\to p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: P in $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:
   bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
   d_{rechts} P_{rechts}

?!

4. Kombiniere:
   - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
   - sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate $O(n \log n)$
   - gehe „gleichzeitig" durch P_{links} und P_{rechts}:
     für jeden Punkt p in P_{links} gehe in P_{rechts} bis y-Koord. $y_p + d$;
     halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht $(\to K_p)$
   - bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}$ und $q \in K_p$
   - gib Min. von d_{mitte}, d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück

$O(n)$

Noch besser! $\boxed{T(n) \approx} 2T(n/2) + O(n \cancel{\log n}) = O(n \log^{\cancel{2}} n)$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\to p_1, \ldots, p_n$ mit $x_1 \leq \cdots \leq x_n$
   u. $P' = P$ nach y-Koordinate $\to p'_1, \ldots, p'_n$ mit $y'_1 \leq \cdots \leq y'_n$
2. Teile: P in $P_{\text{links}} = \{p_1, \ldots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
   P' in P'_{links} und P'_{rechts} (sortiert nach y-Koordinate)
3. Herrsche:
   bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
   d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:

$O(n)$
- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- gehe „gleichzeitig“ durch P'_{links} und P'_{rechts}:
  für jeden Punkt p in P'_{links} gehe in P'_{rechts} bis y-Koord. $y_p + d$;
  halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\to K_p$)
- bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P'_{\text{links}}$ und $q \in K_p$
- gib Min. von d_{mitte}, d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) $\quad O(n \log n)$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{2. Teilen} & & O(n) \\ \text{3. Herrschen} & & 2T(n/2) \\ \text{4. Kombinieren} & & O(n) \end{array}\right\} T(n) = O(n \log n) \quad \text{[MergeSort-Rek.!]}$$

Gesamtlaufzeit $\quad O(n \log n)$

Speicherplatzbedarf?

$O(n)$, wenn P' *in situ* in P'_{links} und P'_{rechts} zerlegt wird.

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem* *(für natürliche Zahlen)*
Gegeben eine Folge $a_1, \ldots, a_n$ von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

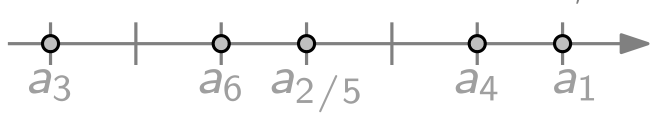
Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden – wenn man als Rechenmodell das sogenannte *algebraische Entscheidungsbaummodell* zugrunde legt.

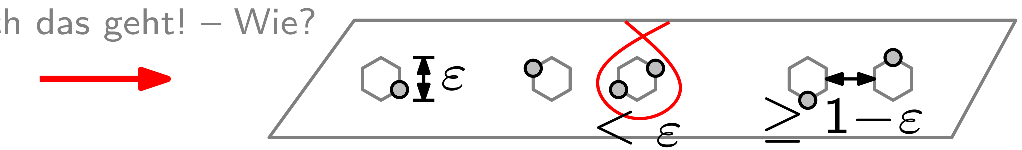
Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↯

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Genaugenommen muss man die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ in eine *Menge* von (paarweise verschiedenen!) Punkten der Ebene transformieren, aber auch das geht! – Wie?





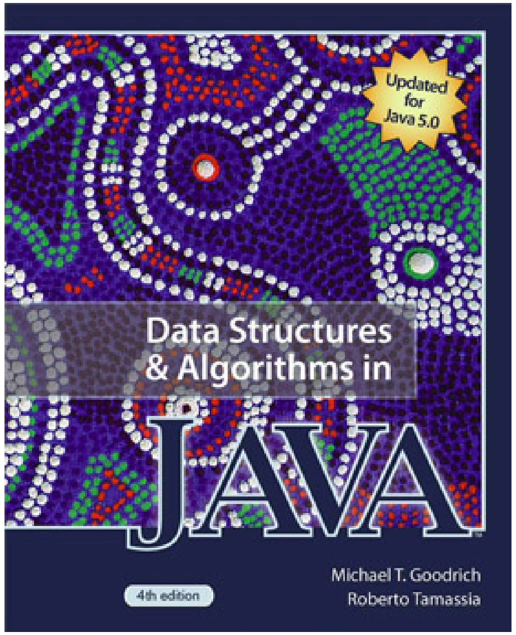
Das heißt. . .

Satz. Das Problem Nächstes Paar kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden, wenn man als Rechenmodell das algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Kor. Unser $O(n \log n)$-Zeit-Algorithmus für das Problem Nächstes Paar ist asymptotisch optimal, wenn man. . . .

Üben, üben, üben.

- Implementieren Sie die einfache Brute-Force-Lösung in Java.
- Implementieren Sie einen einfachen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der im Herrsche-Schritt *alle* (quadratisch vielen) $(\bullet,\bullet)$-Kandidaten testet. *(Ist der schneller als der Brute-Force-Alg.?)*
- Implementieren Sie den hier vorgestellten Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in $O(n \log^2 n)$ Zeit läuft!
- Implementieren Sie den hier vorgestellten Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in $O(n \log n)$ Zeit läuft!



Goodrich & Tamassia:
Data Structures & Algorithms in Java.
Wiley, 4. Aufl., 2005 (5. Aufl., 2010)

Algorithmen & Datenstrukturen

Lernziele: In dieser Veranstaltung haben Sie schon gelernt...

- die Effizienz von Algorithmen zu messen und miteinander zu vergleichen,
- grundlegende Algorithmen und Datenstrukturen in Java zu implementieren,
- selbst Algorithmen und Datenstrukturen zu entwerfen sowie
- deren Korrektheit und Effizienz zu beweisen.

Inhalt:

- Grundlagen und Analysetechniken
- Sortierverfahren
- Java
- Datenstrukturen

To do

- Graphenalgorithmen (kürzeste Wege, min. Spannbäume)
- Systematisches Probieren (dynamisches Progr., Greedy-Alg.)