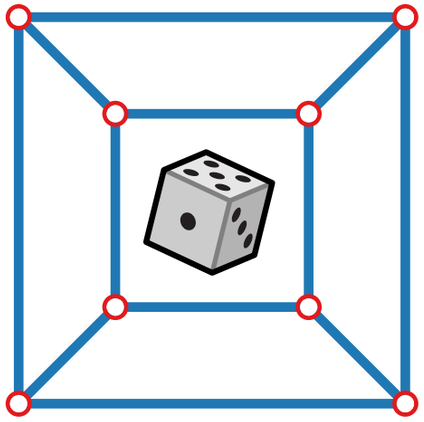
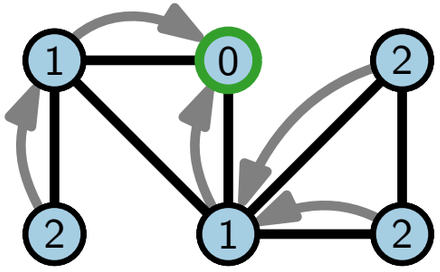
Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 17:
Graphen und Breitensuche

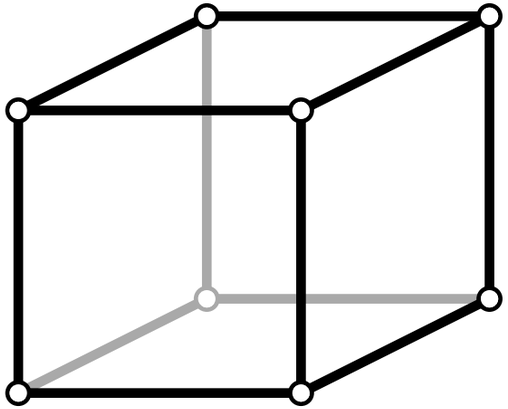


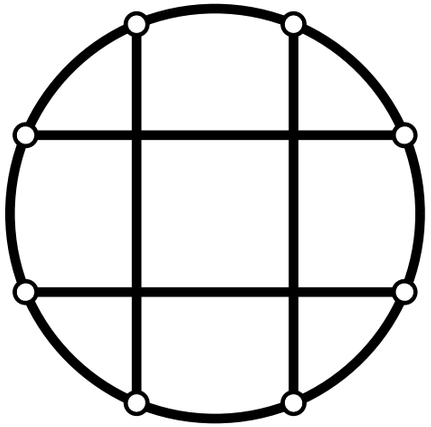


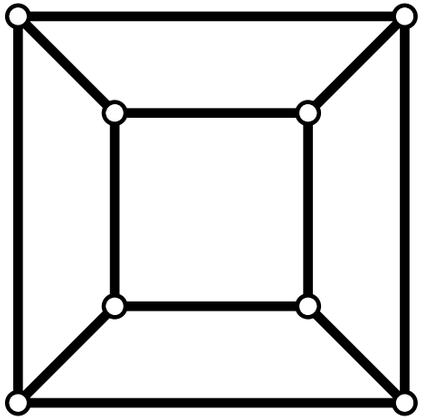
Alexander Wolff

Wintersemester 2025

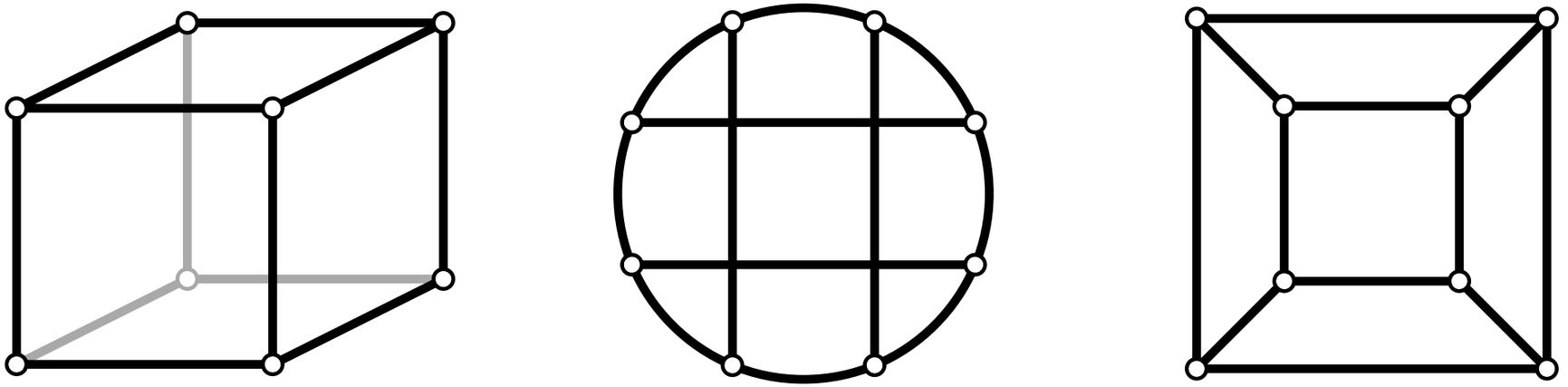
Was ist das?





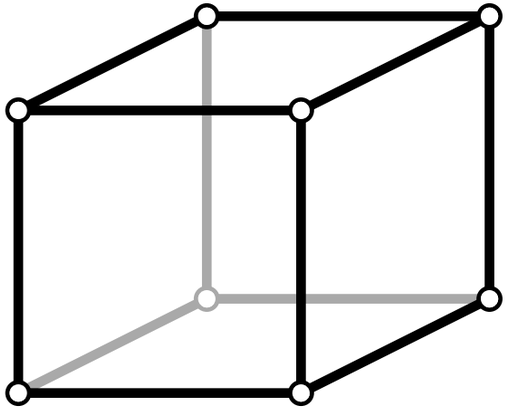


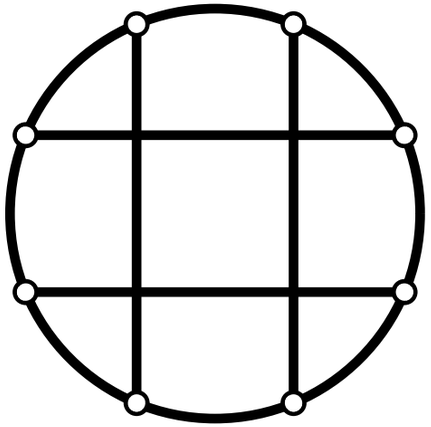
Was ist das?

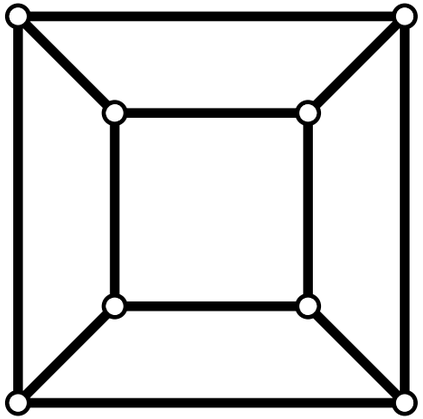


Ein (und derselbe) **Graph**.

Was ist das?

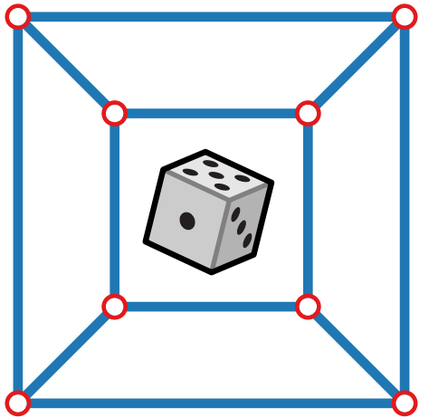






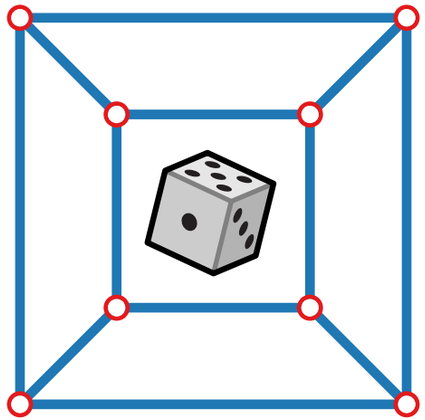
Ein (und derselbe) **Graph**; der dreidimensionale Hyperwürfel.

Was ist ein Graph?



Was ist ein Graph?

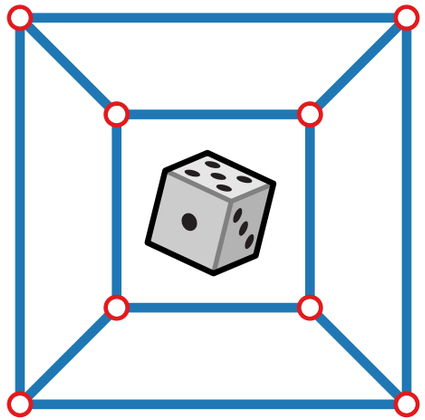
Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E)



Was ist ein Graph?

Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

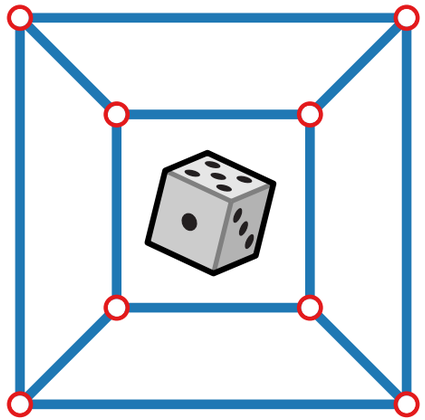
- V **Knotenmenge**



Was ist ein Graph?

Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

- V **Knotenmenge** und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ **Kantenmenge**.

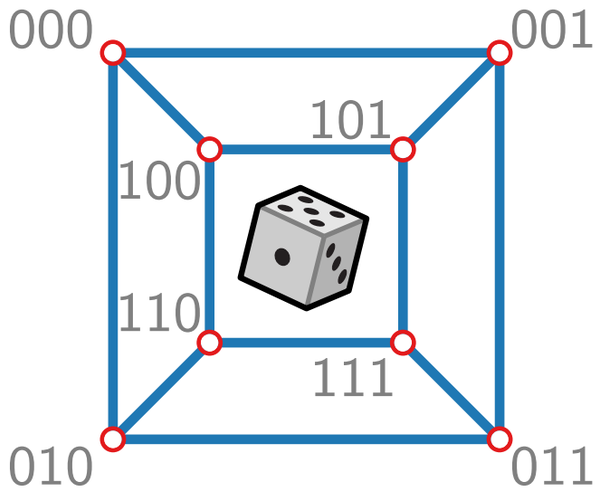


Was ist ein Graph?

Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

- V **Knotenmenge** und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ **Kantenmenge**.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$

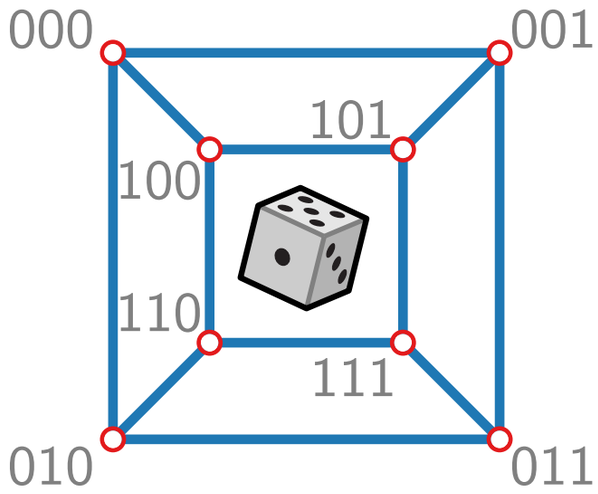


Was ist ein Graph?

Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

- V **Knotenmenge** und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ **Kantenmenge**.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$

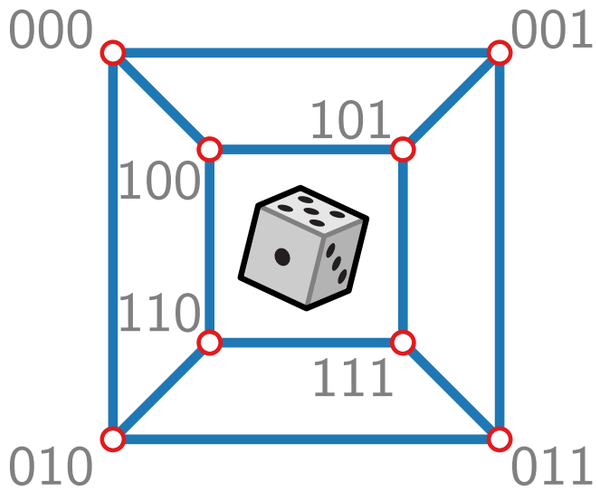


Was ist ein Graph?

Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

- V **Knotenmenge** und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ **Kantenmenge**.

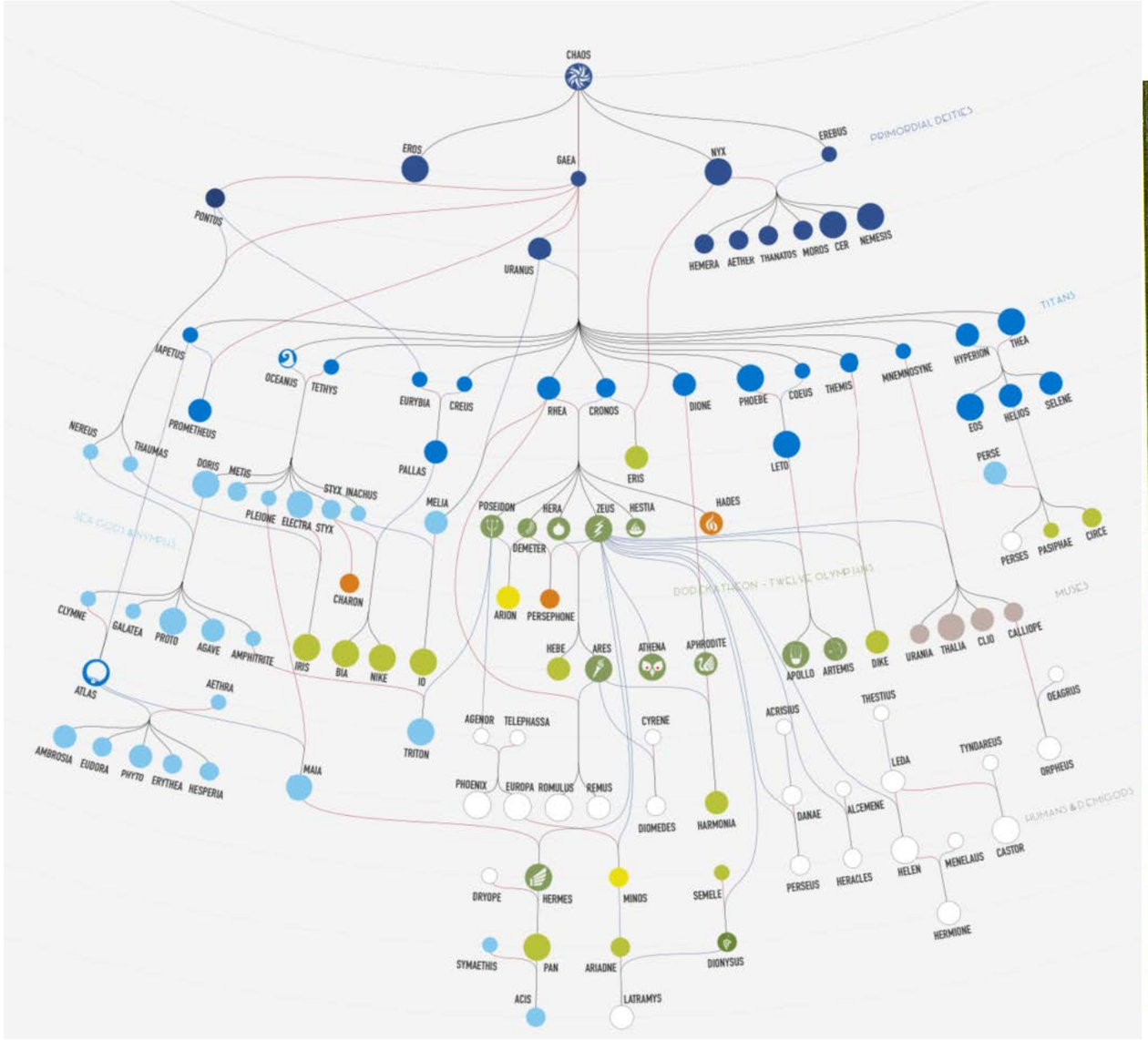
$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$

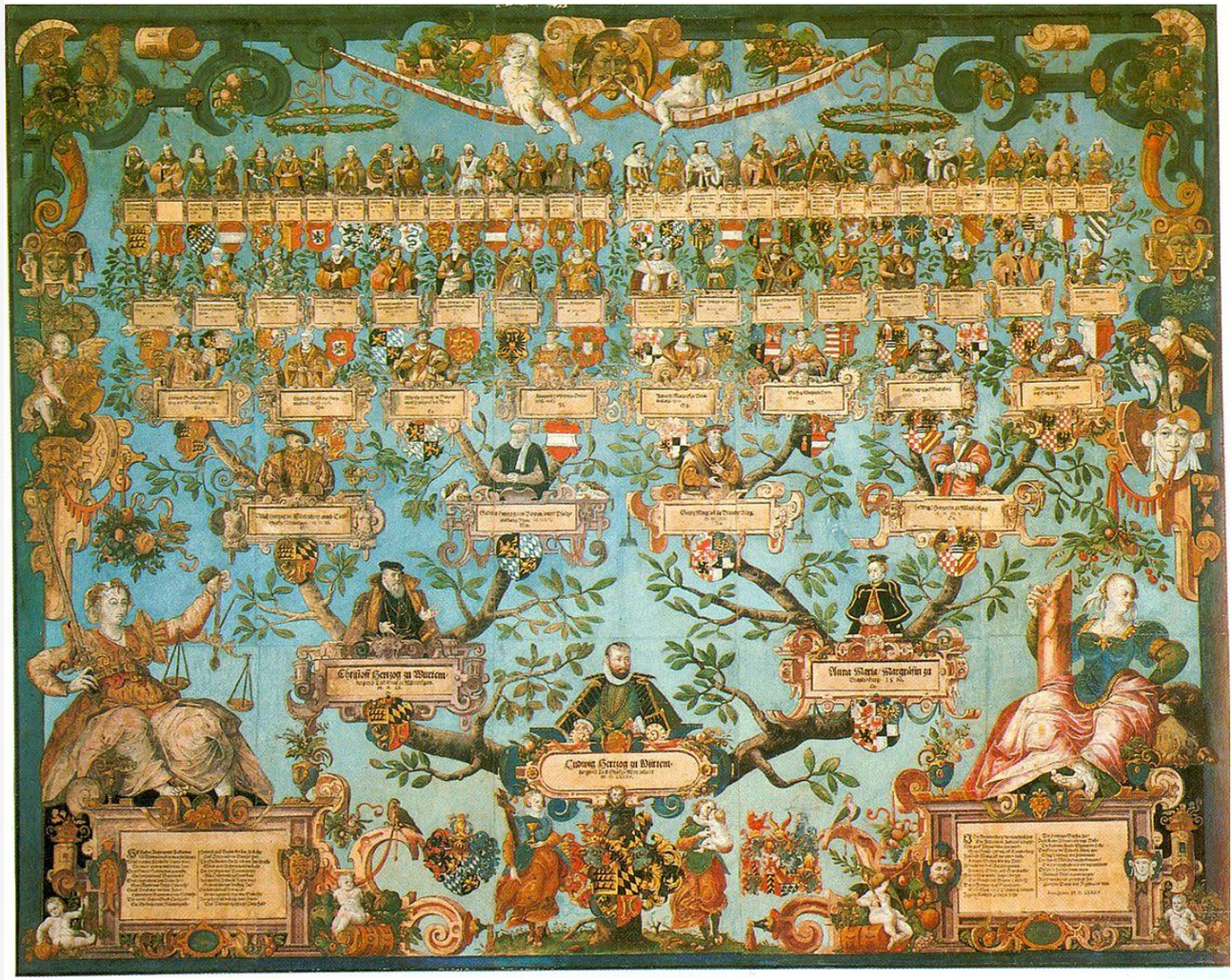


Ein **gerichteter** Graph ist ein Paar (V, E) , wobei

- V **Knotenmenge** und
- $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ **Kantenmenge**.

Soziale Netzwerke – Familienbäume

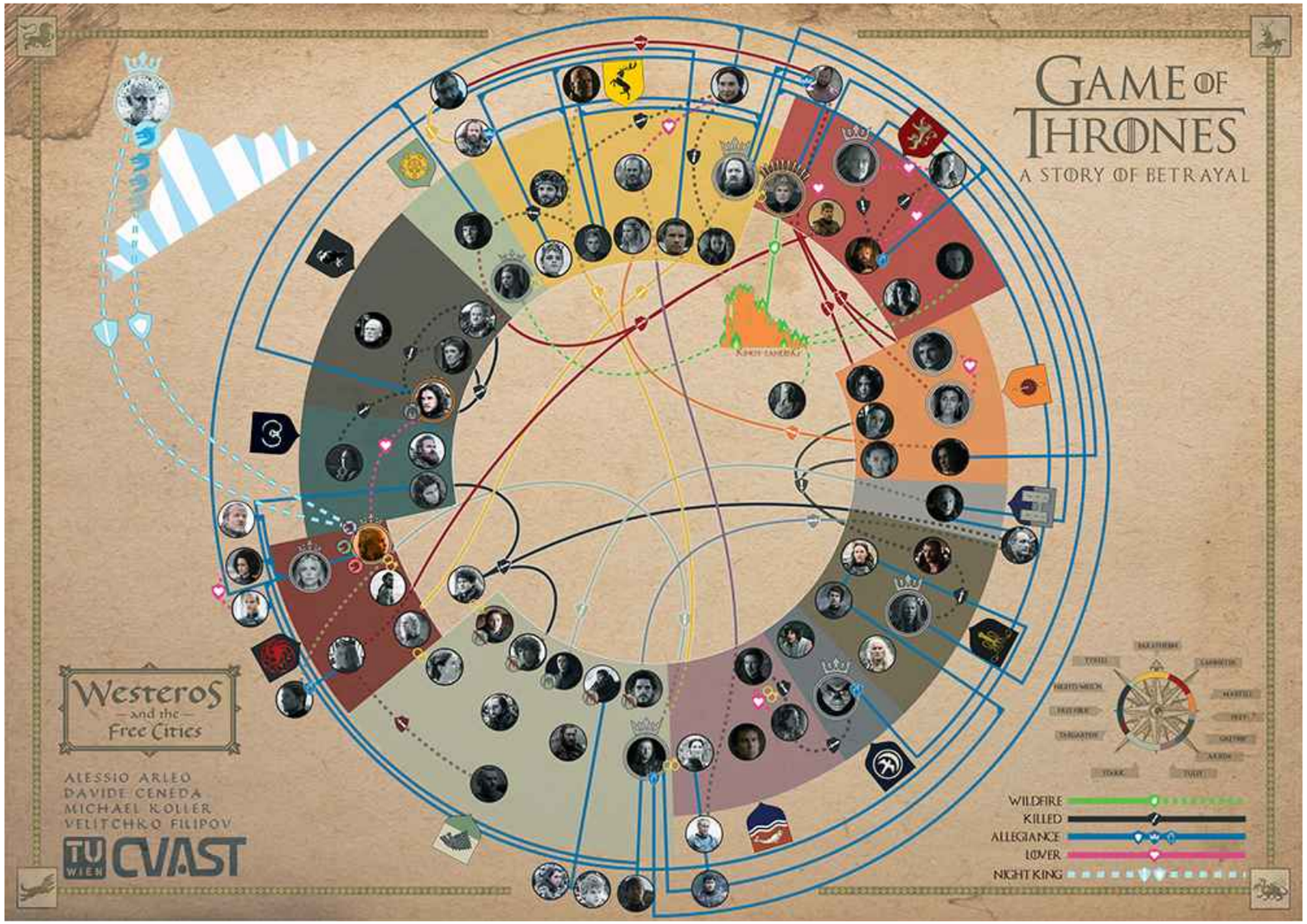




J. Klawitter, T. Mchedlidze, *Link:* go.uniwue.de/myth-poster

Ahnentafel Herzog Ludwig von Württemberg, 1585

Soziale Netzwerke – Verhältnisse

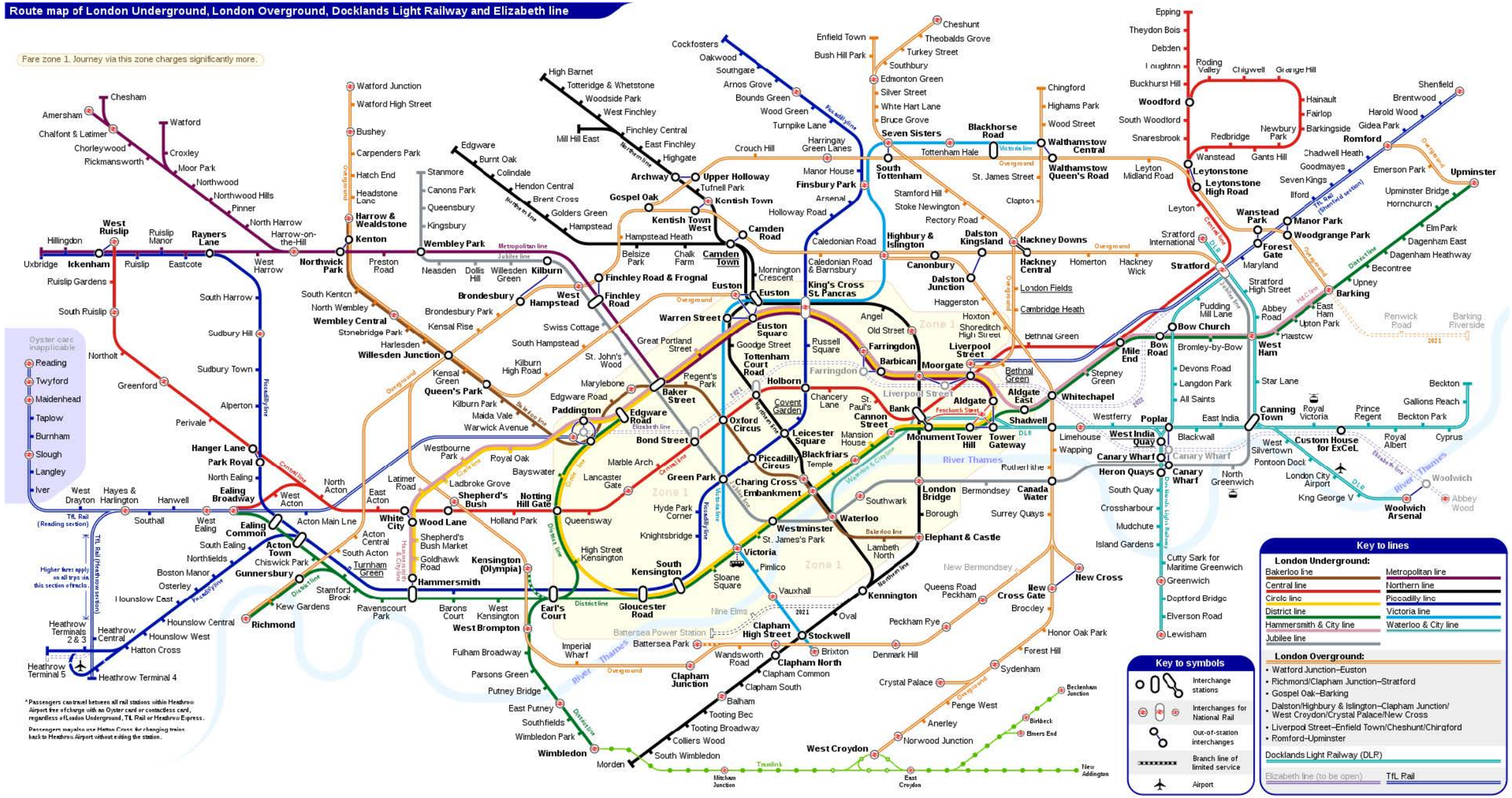


Velitchko Filipov, Davide Ceneda, Michael Koller, Alessio Arleo, and Silvia Miksch, GD Contest 2018

Transportnetzwerke – Londoner U-Bahn

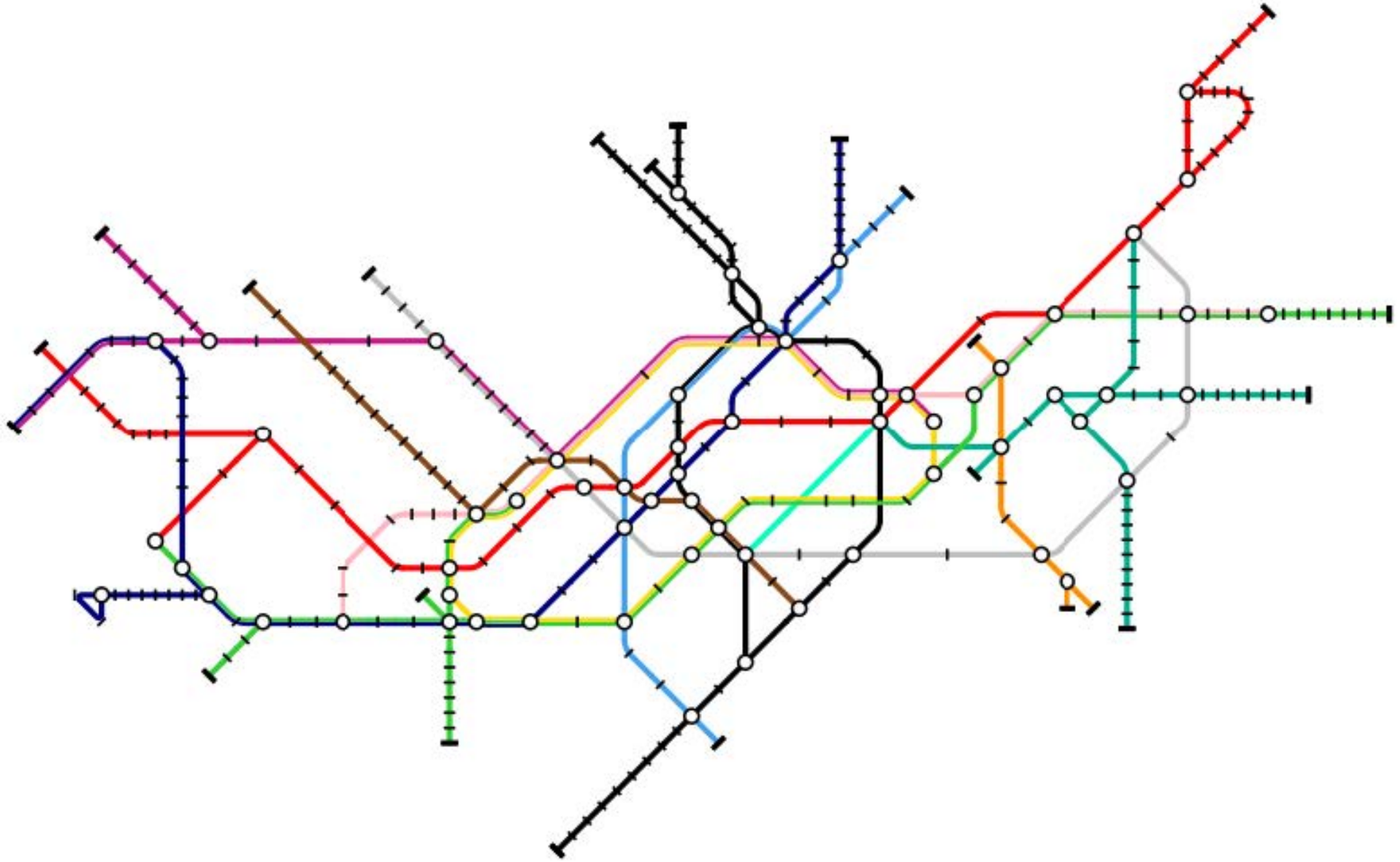
Source: Wiki Commons: London Underground full map - CC BY-SA 3.0

Transportnetzwerke – Londoner U-Bahn

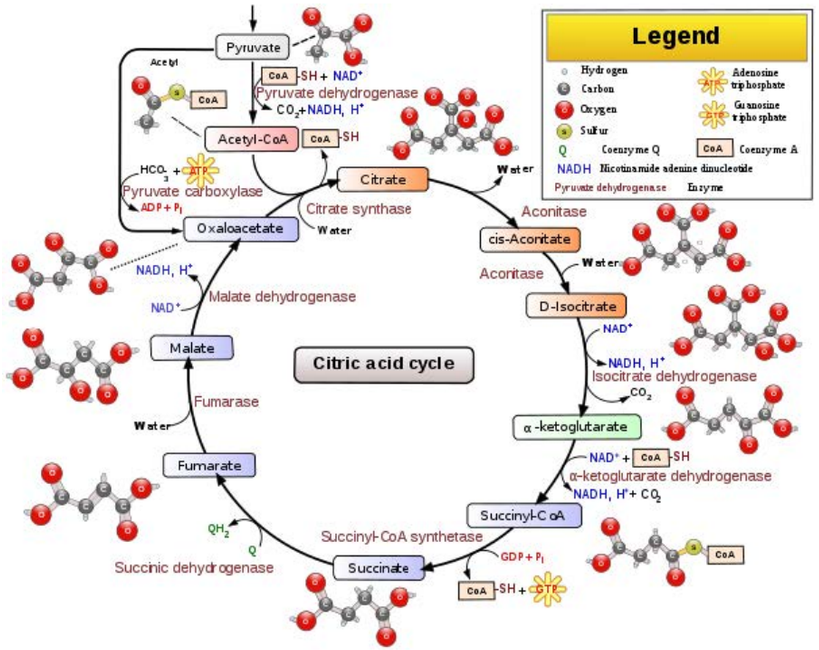


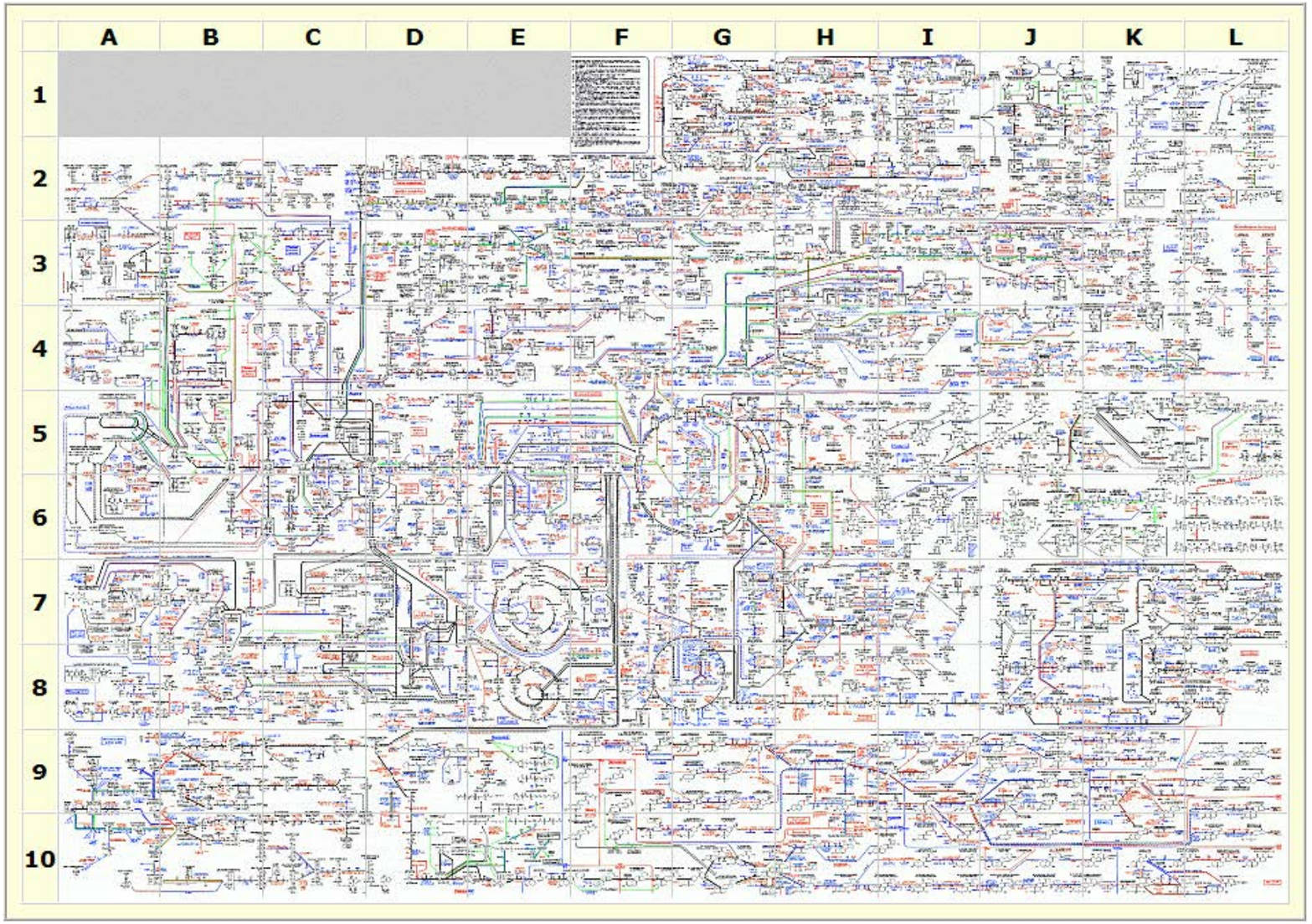
Source: Wiki Commons: London Underground Overground DLR Crossrail map - CC BY-SA 4.0

Transportnetzwerke – Londoner U-Bahn



Bioinformatik – Molekulare metabolische Netzwerke

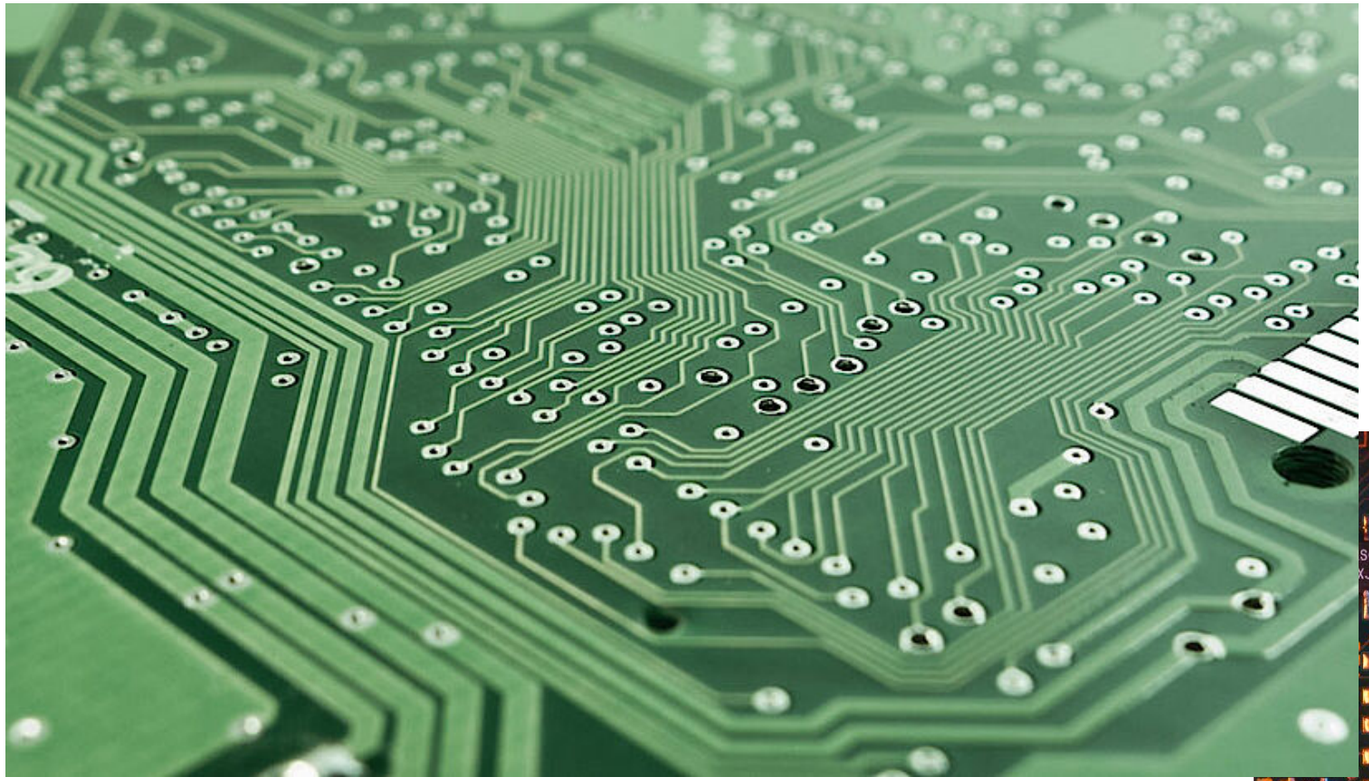




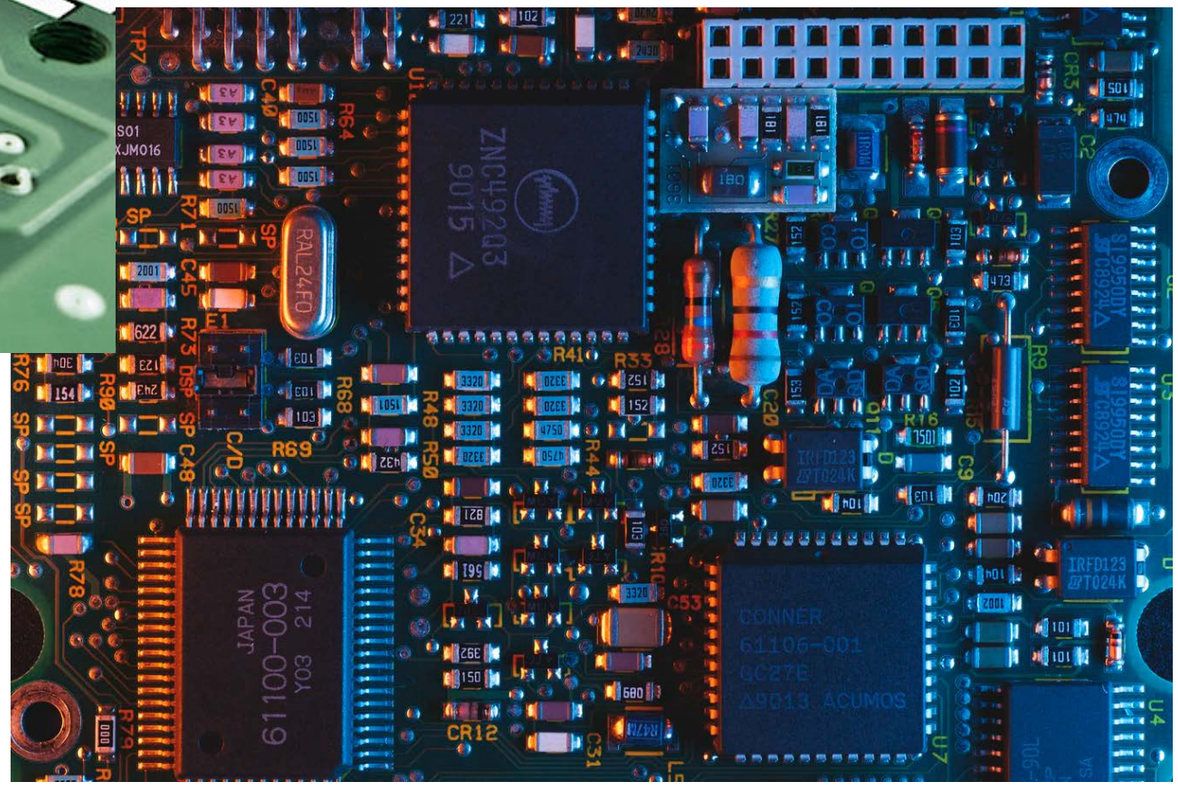
Source: Wiki Commons: Citric acid cycle with aconitate 2 - CC BY-SA 3.0

Source: Thiele et al., Nature Biotechnology 31, 419–425 (2013)

Technische Netzwerke – Very Large-Scale Integration (VLSI)

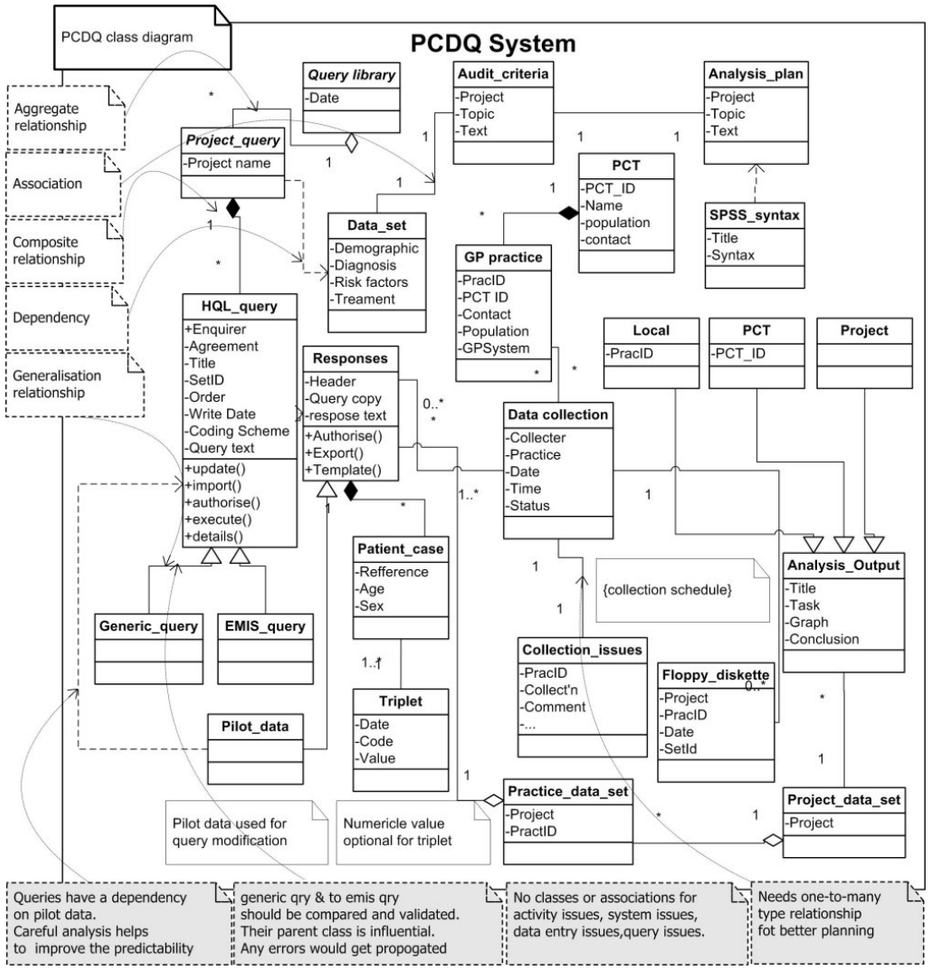


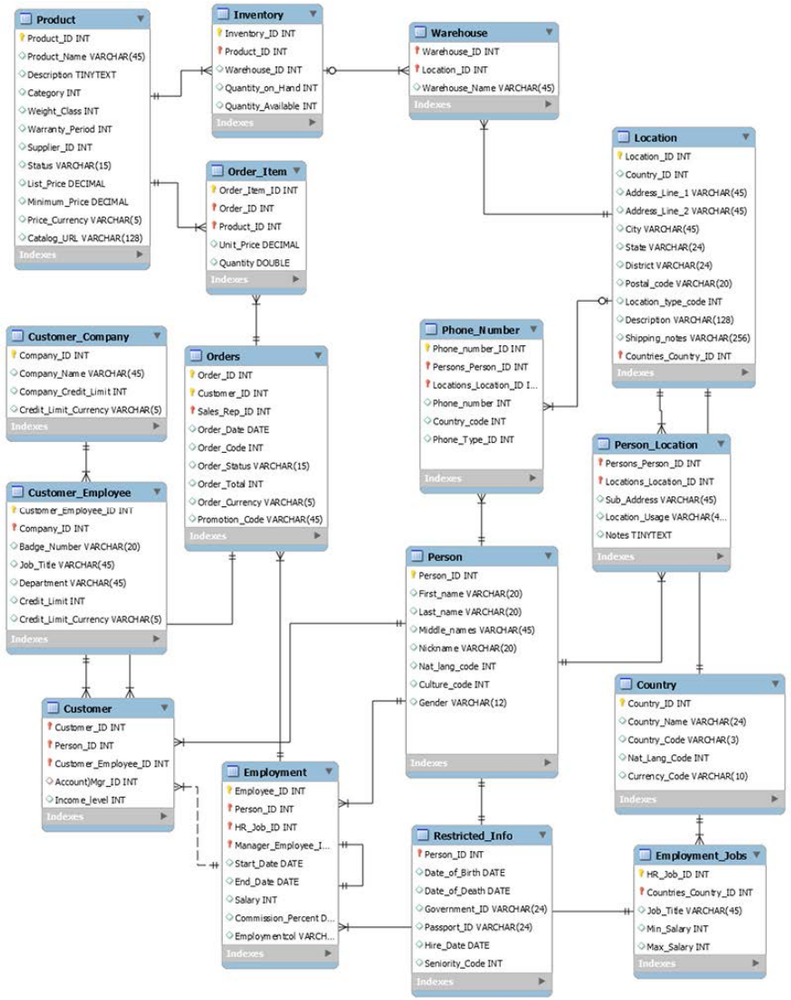
Source: Pixabay



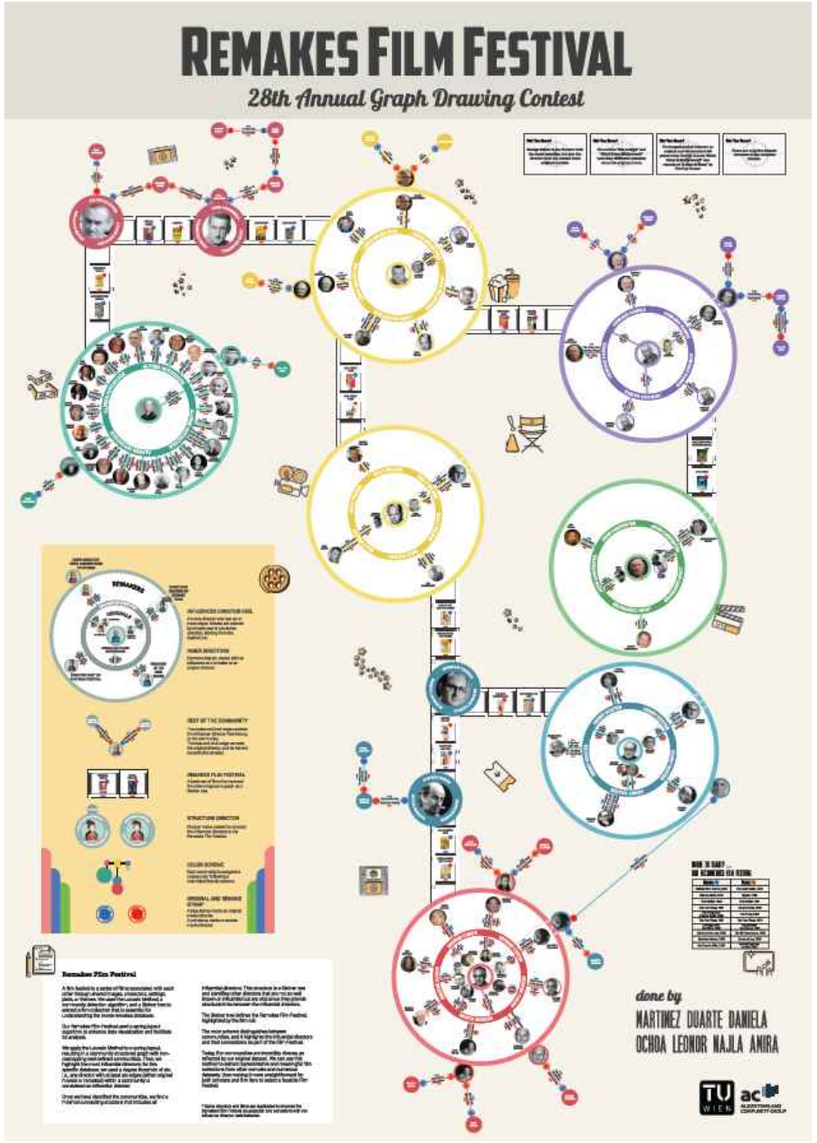
Source: Wiki Commons: Diopsis - CC BY-SA 3.0

Technische Netzwerke – UML-Diagramme

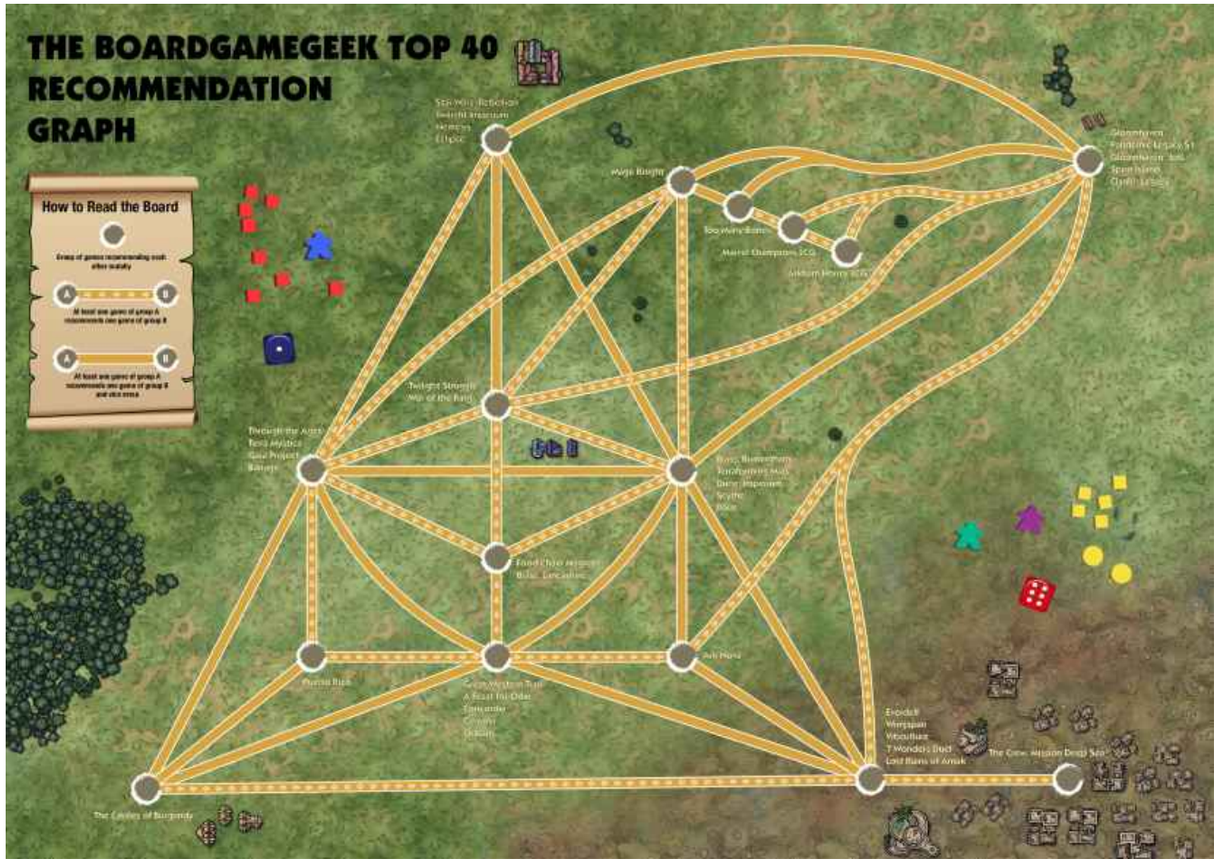




Informative Netzwerke

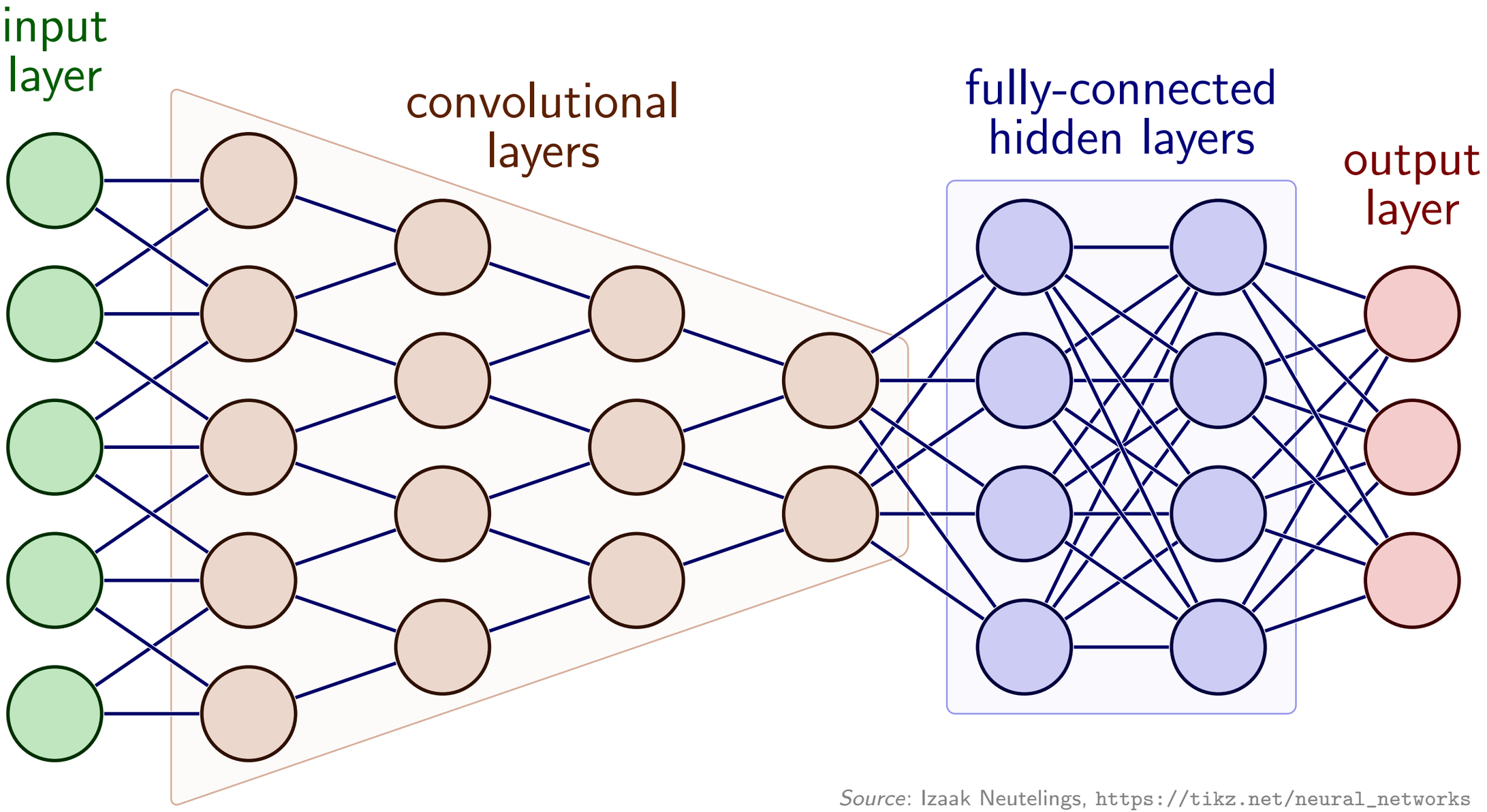


Najla Amira Ochoa Leonor and Daniela Martinez Duarte, GD Contest 2021



André Schulz, GD Contest 2023

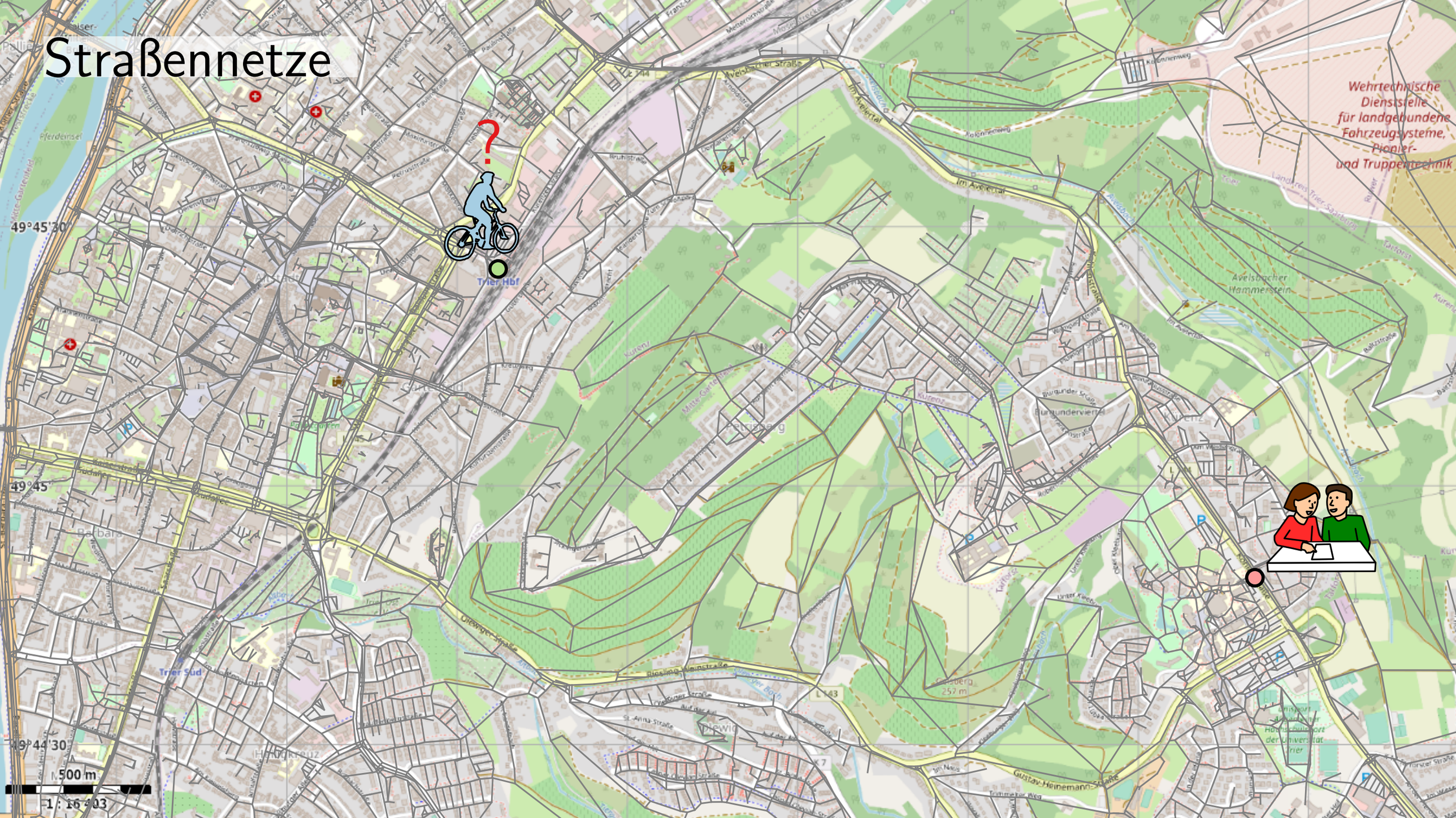
Neuronale Netzwerke



Source: Izaak Neutelings, `https://tikz.net/neural_networks`

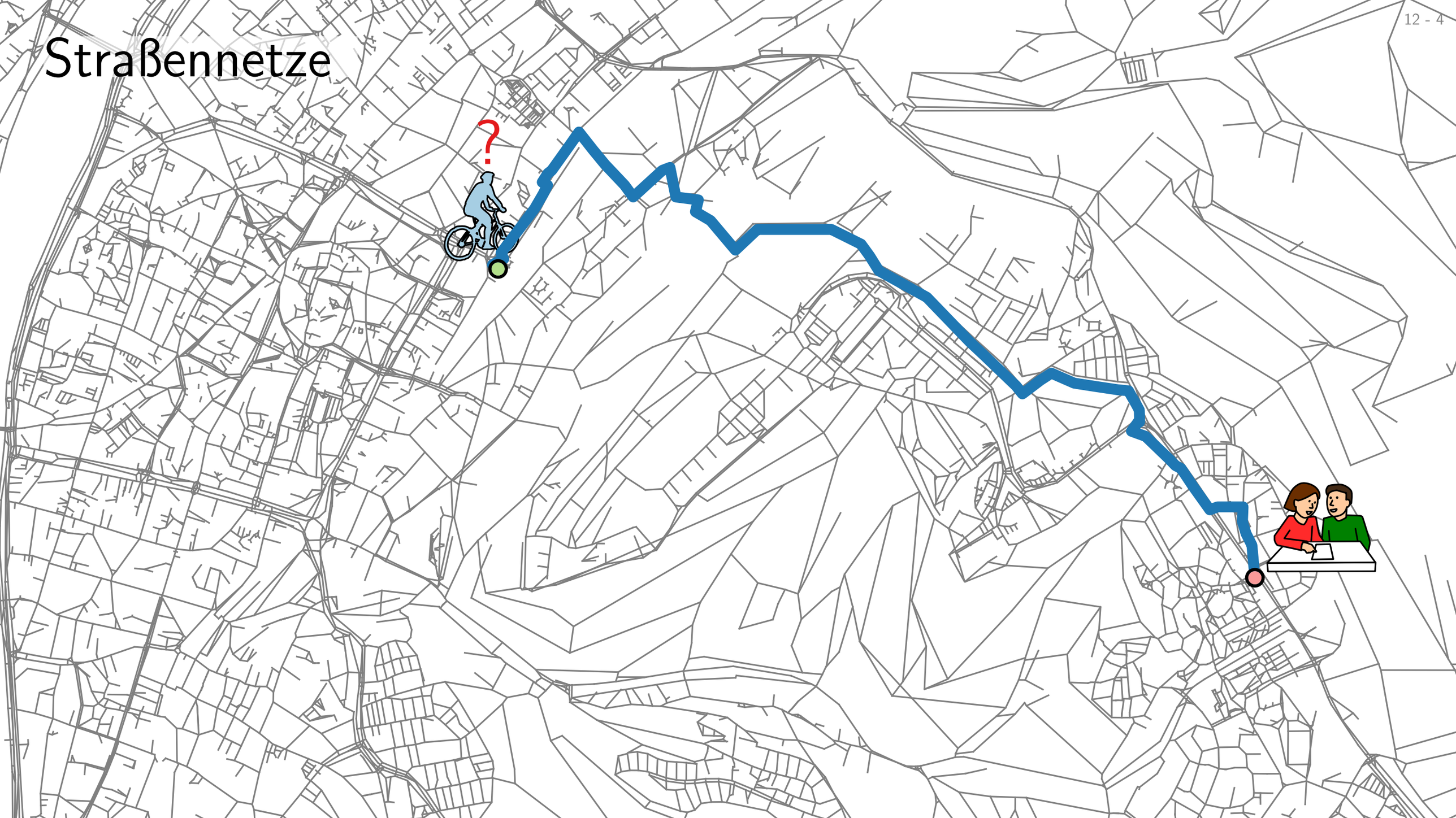
Straßennetze

Straßennetze

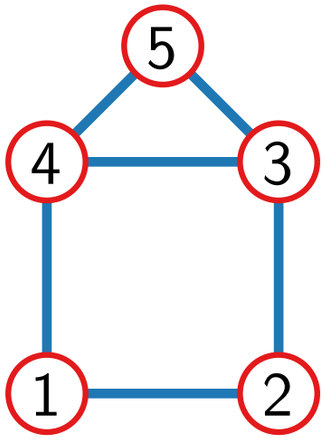


Straßennetze

Straßennetze

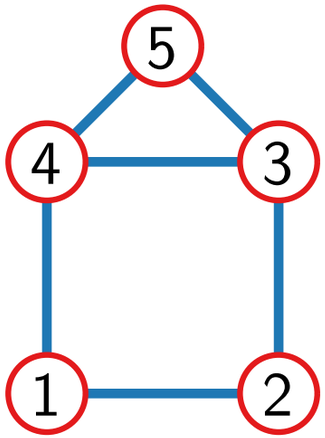


Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

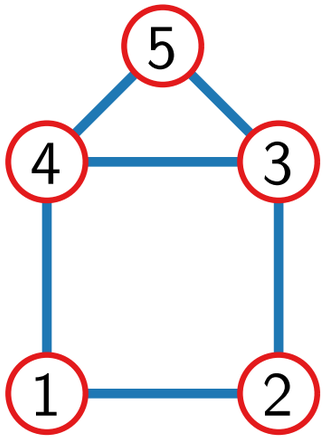
Wie repräsentiere ich einen Graphen?



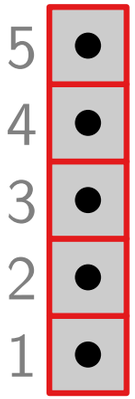
ungerichteter Graph

Adjazenzlisten

Wie repräsentiere ich einen Graphen?

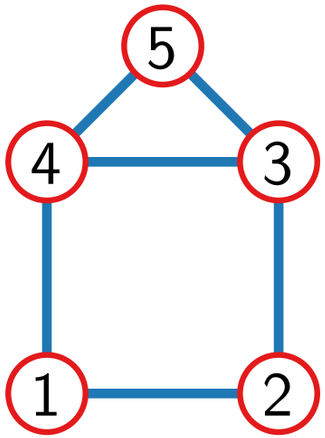


ungerichteter Graph

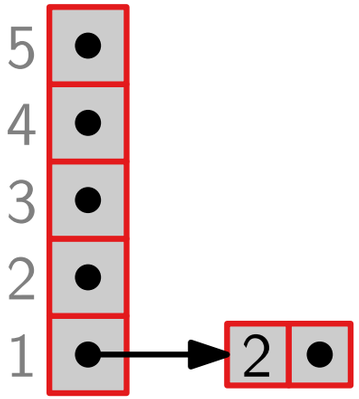


Adjazenzlisten

Wie repräsentiere ich einen Graphen?

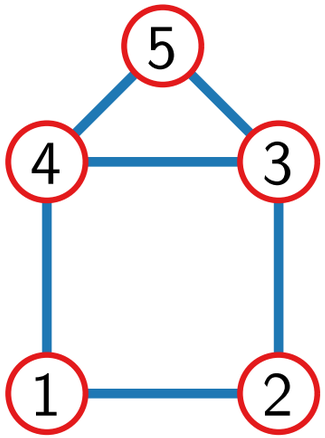


ungerichteter Graph

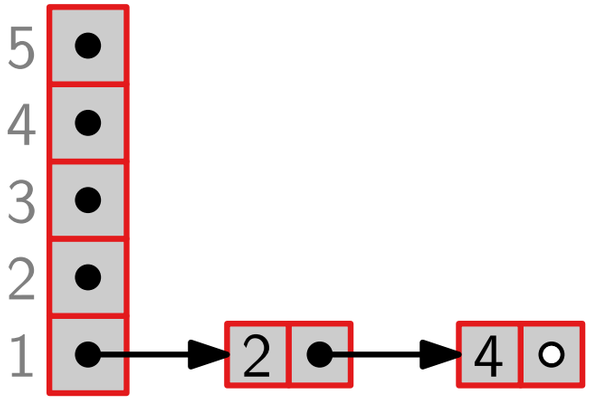


Adjazenzlisten

Wie repräsentiere ich einen Graphen?

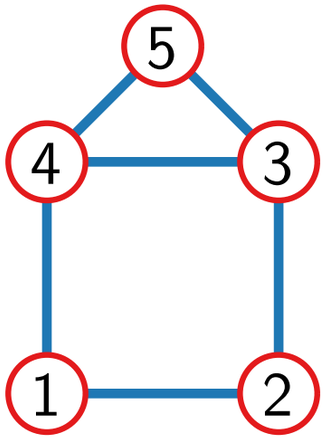


ungerichteter Graph

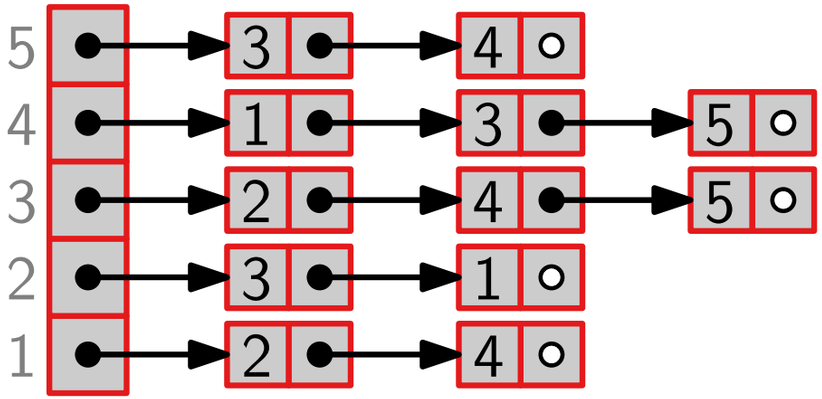


Adjazenzlisten

Wie repräsentiere ich einen Graphen?

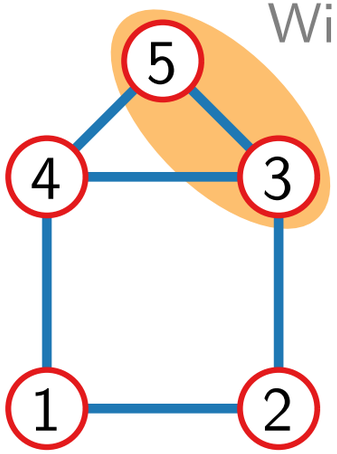


ungerichteter Graph



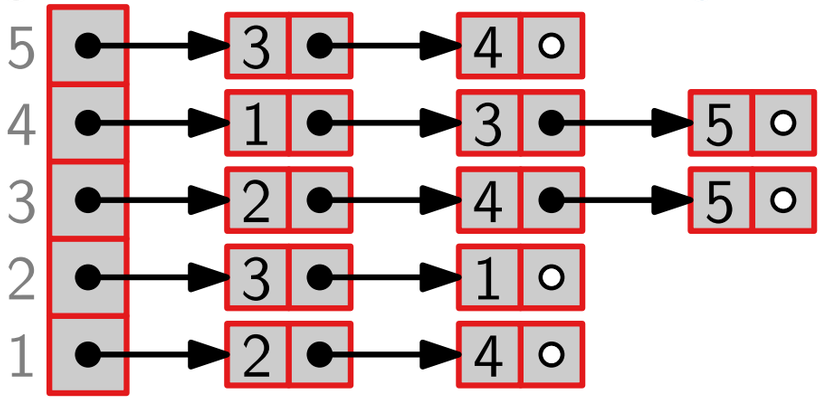
Adjazenzlisten

Wie repräsentiere ich einen Graphen?



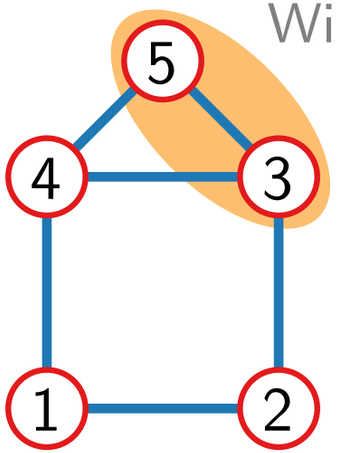
ungerichteter Graph

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



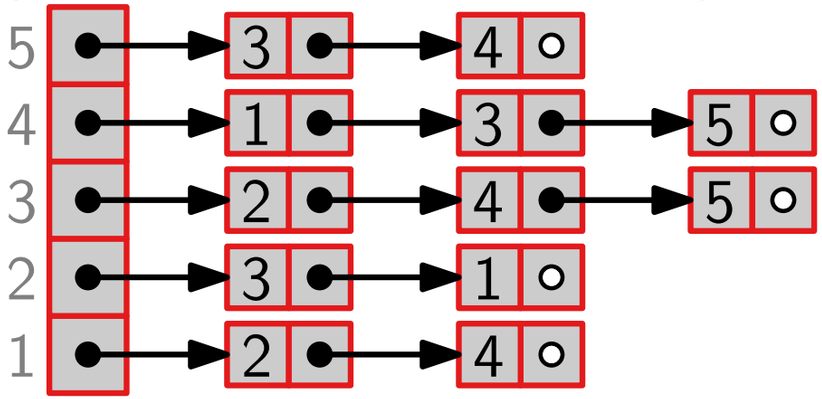
Adjazenzlisten

Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

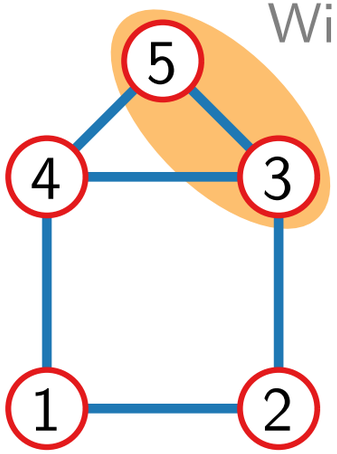
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



Adjazenzlisten

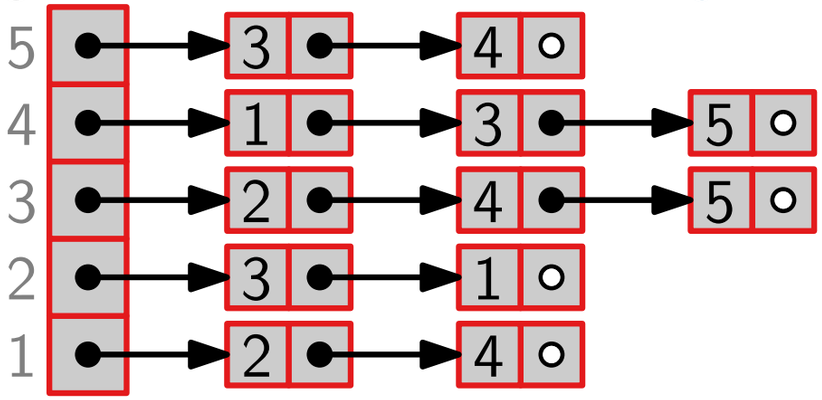
Adjazenzmatrix

Wie repräsentiere ich einen Graphen?

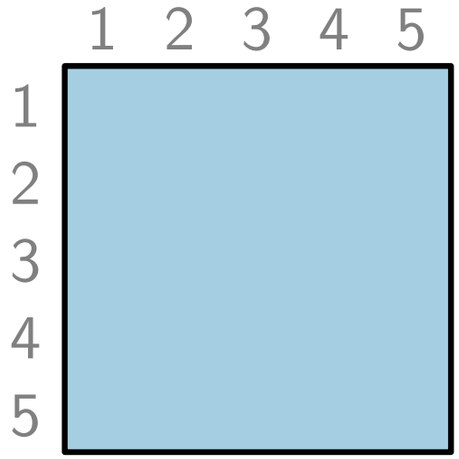


ungerichteter Graph

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.

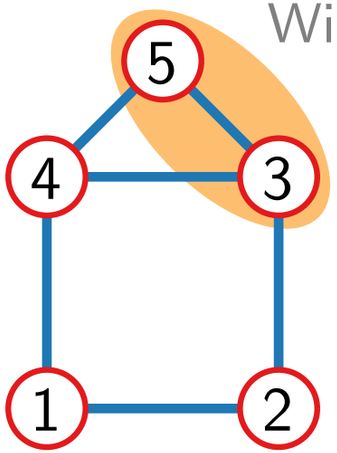


Adjazenzlisten



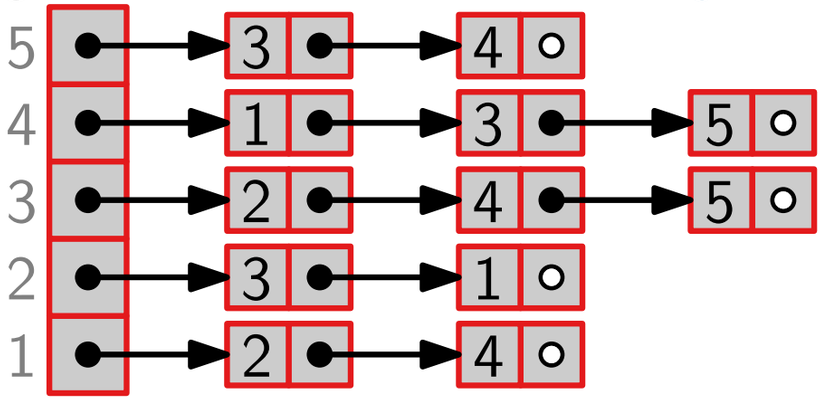
Adjazenzmatrix

Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.

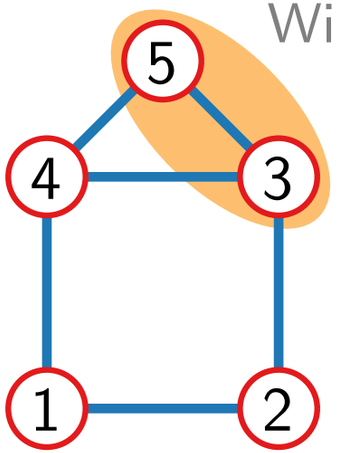


Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

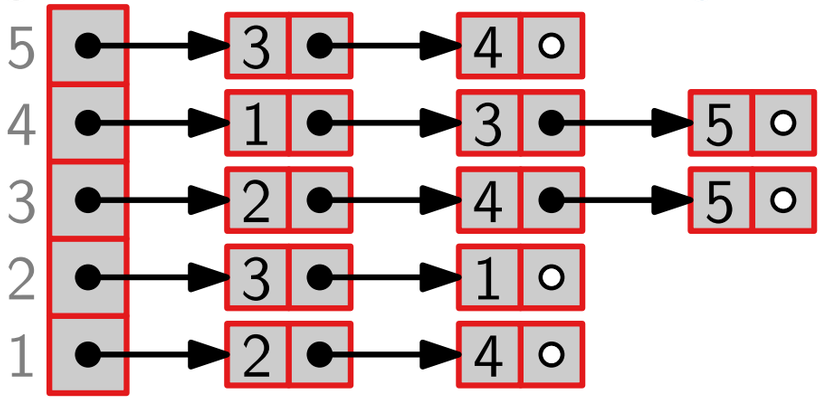
Adjazenzmatrix

Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

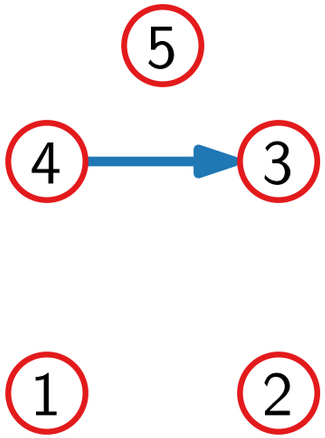
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



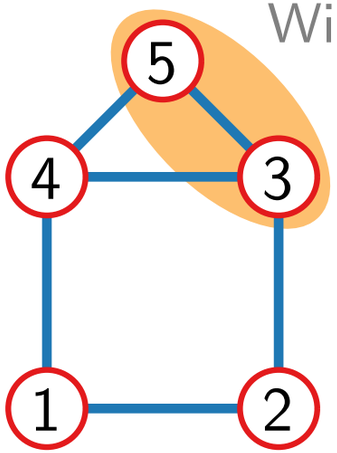
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

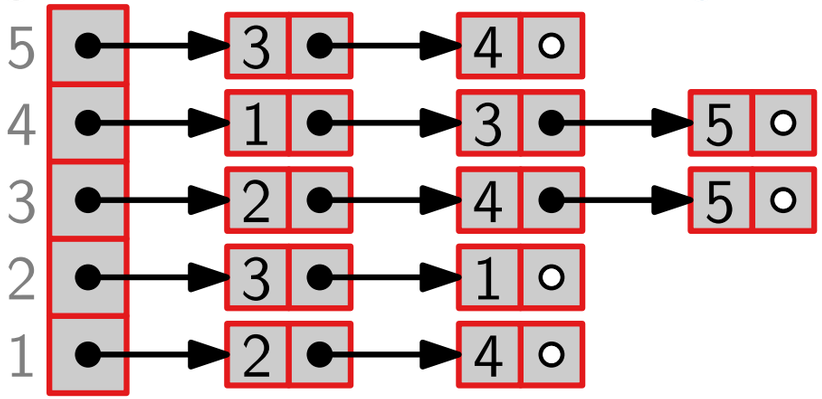


Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

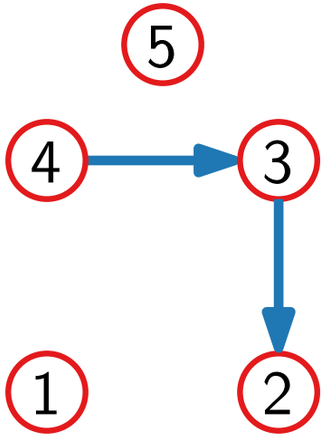
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



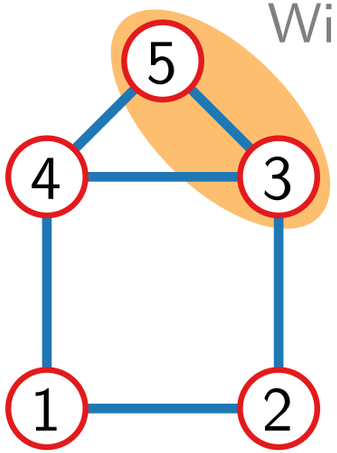
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

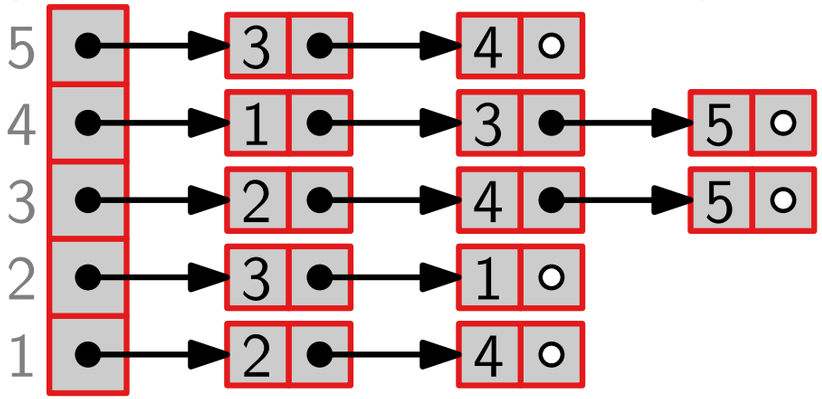


Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

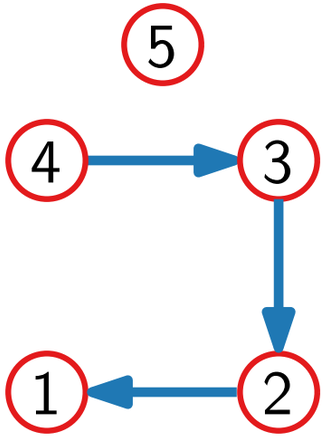
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



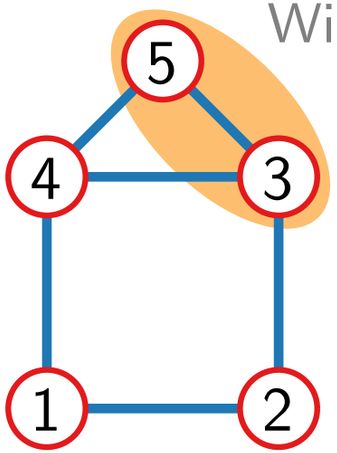
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

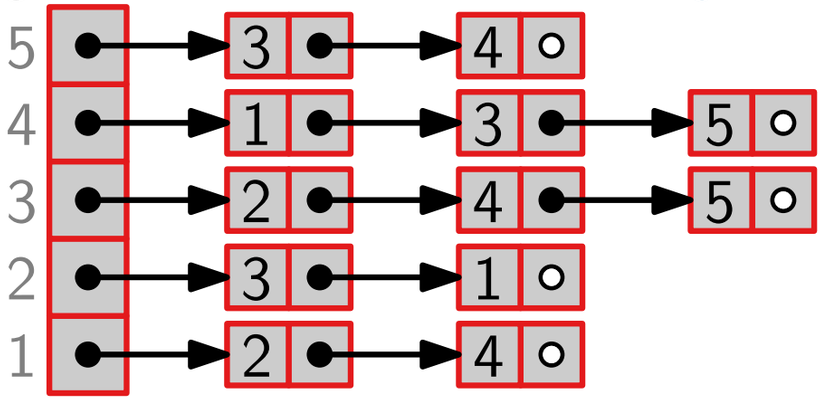


Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

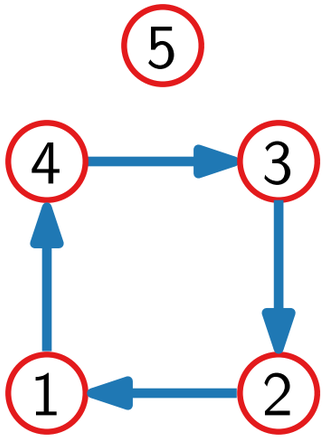
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



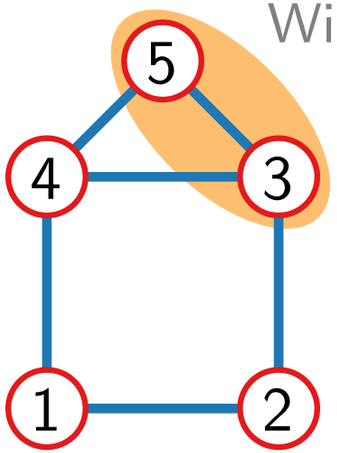
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

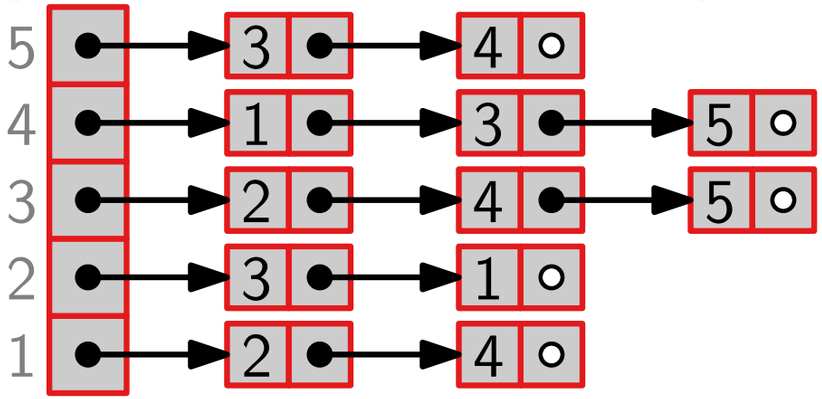


Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

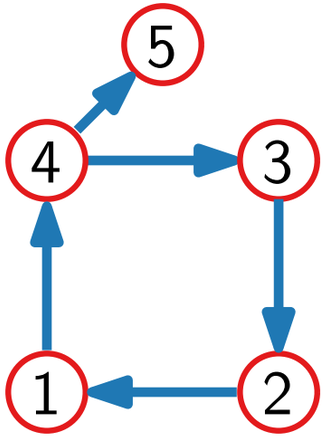
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



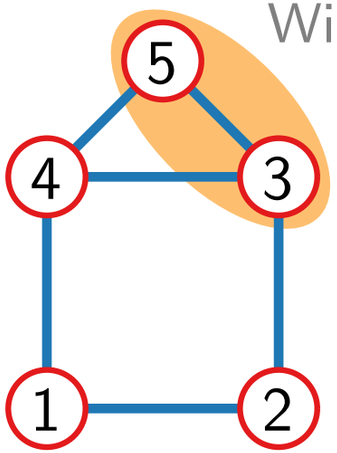
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

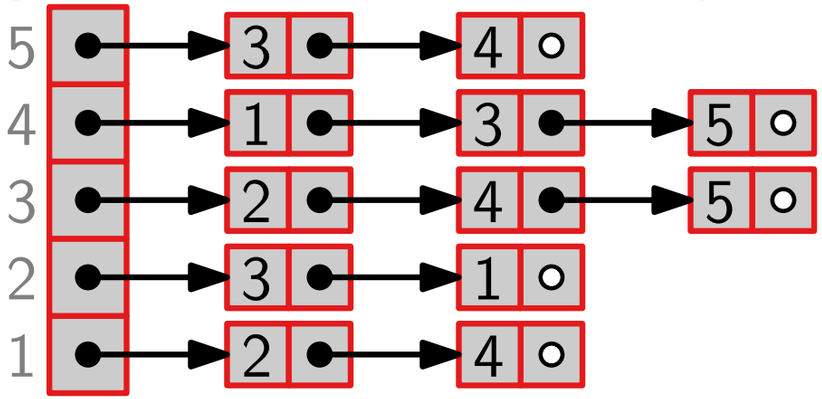


Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

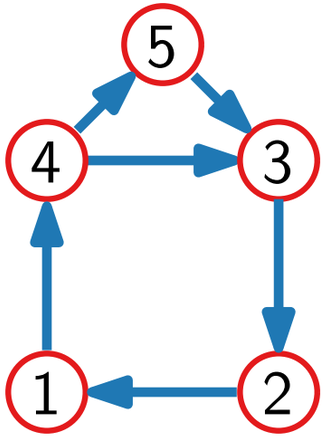
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



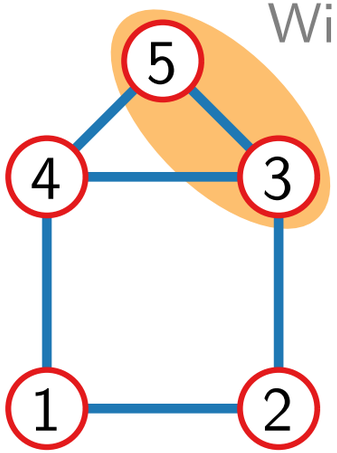
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

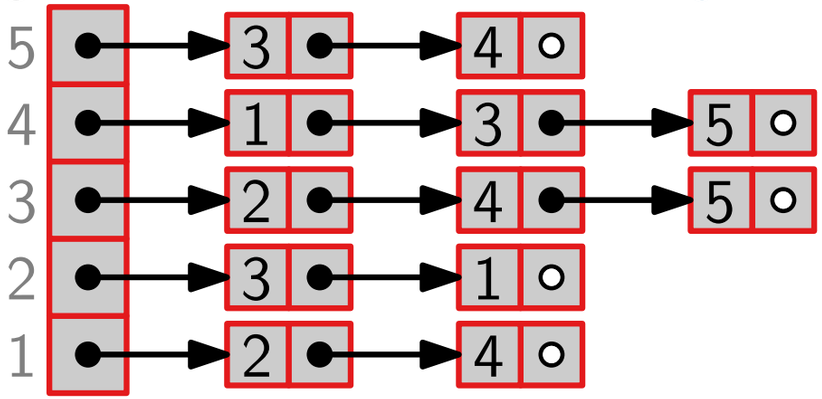


Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

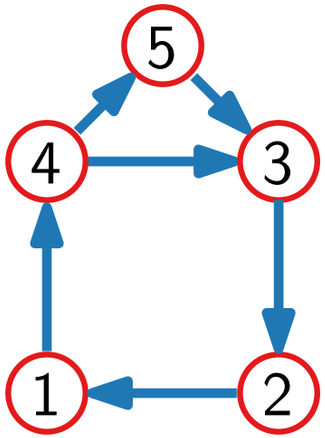
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



Adjazenzlisten

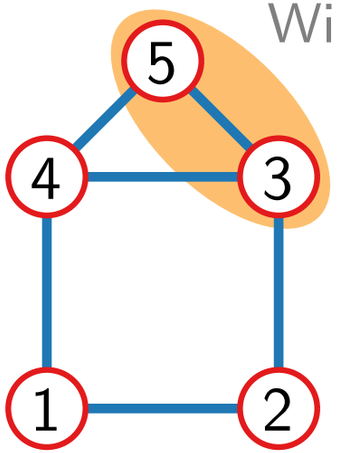
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



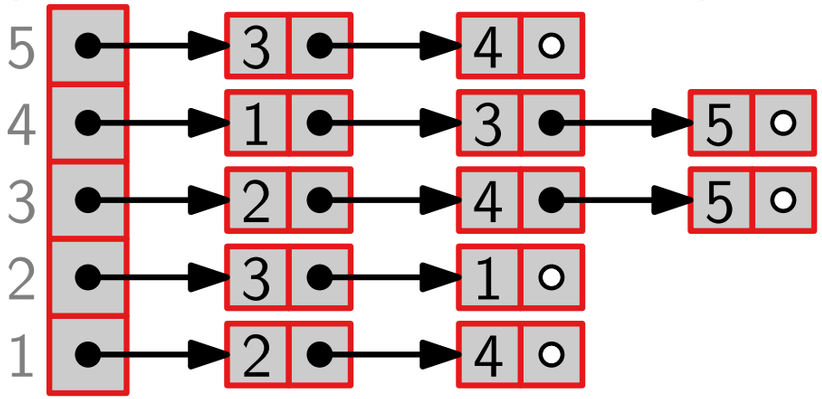
gerichteter Graph

Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

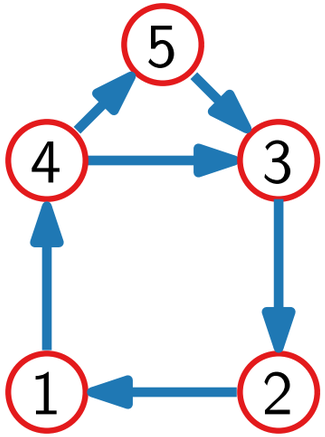
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



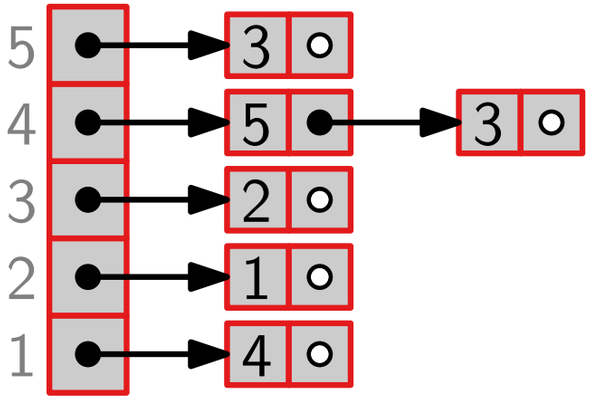
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

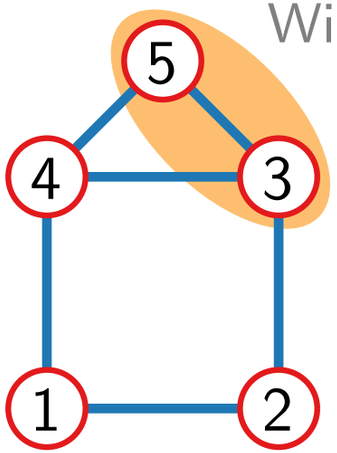


gerichteter Graph



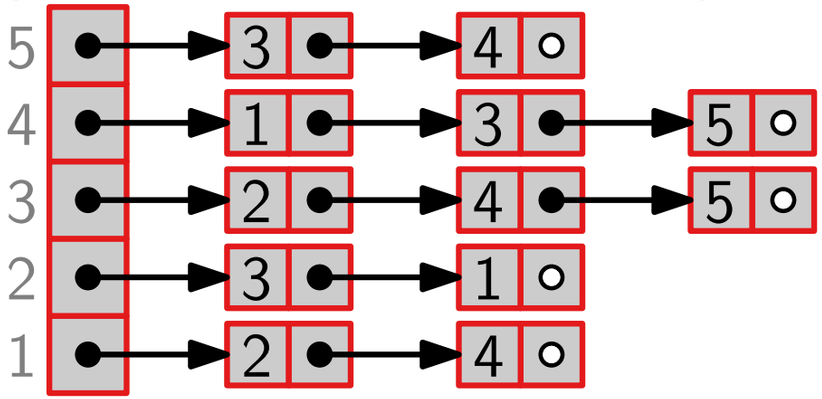
$\text{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

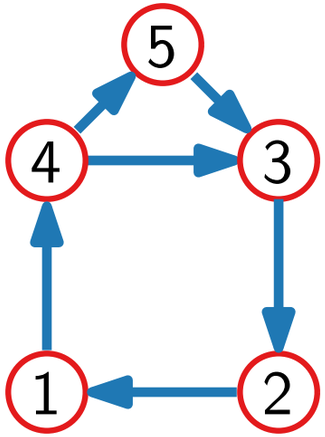
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



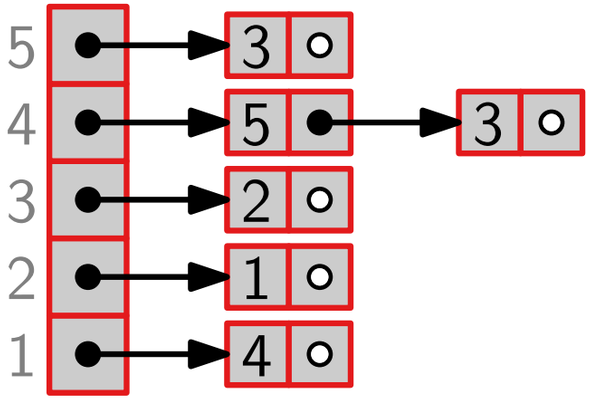
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



gerichteter Graph



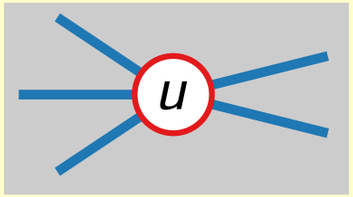
$\text{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0

$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$

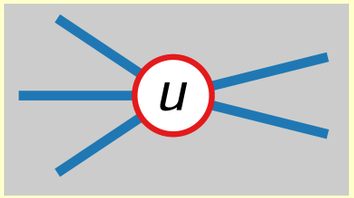
Grad eines Knotens

Def.



Grad eines Knotens

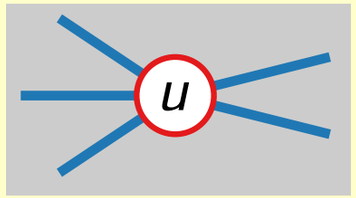
Def.

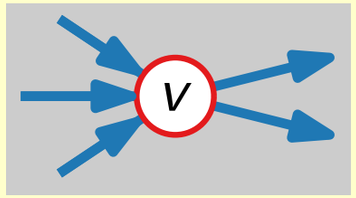


$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

Grad eines Knotens

Def.

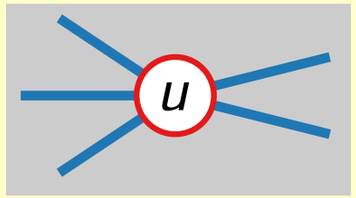




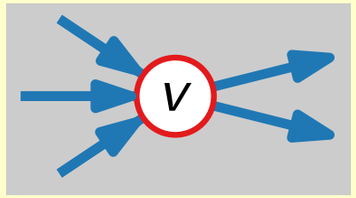
$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

Grad eines Knotens

Def.



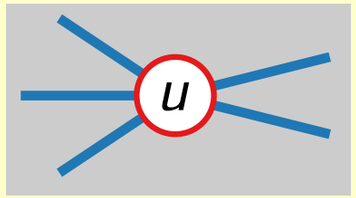
$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



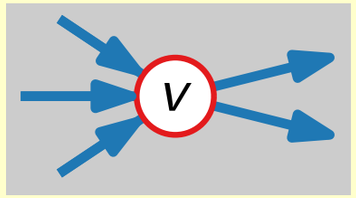
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

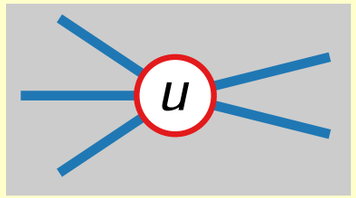


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

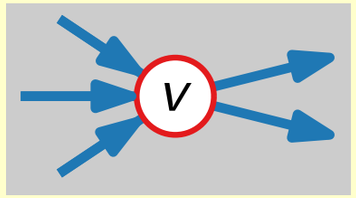
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



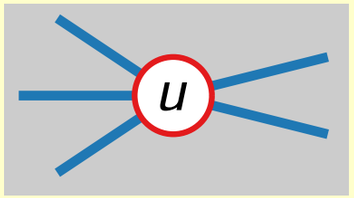
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

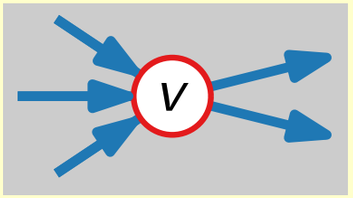
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $=$ [redacted].

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



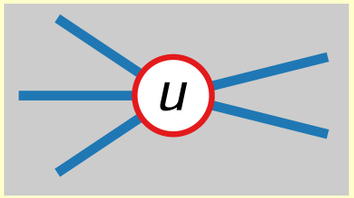
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

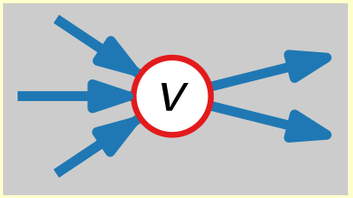
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

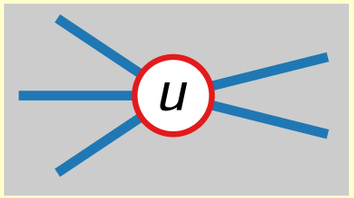
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

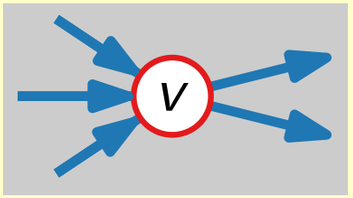
Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

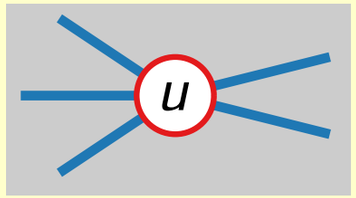
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

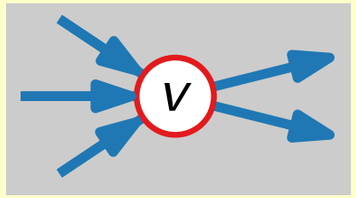
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

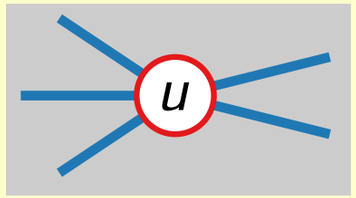
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

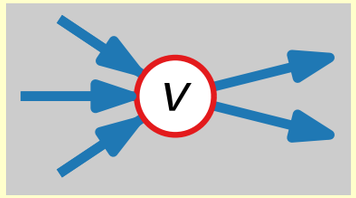
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

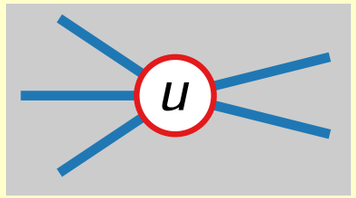
Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

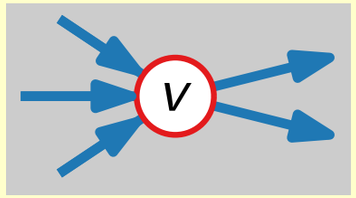
Eine Kante ist **inzident** zu ihren Endknoten.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

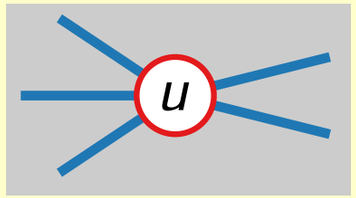
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist **inzident** zu ihren Endknoten.

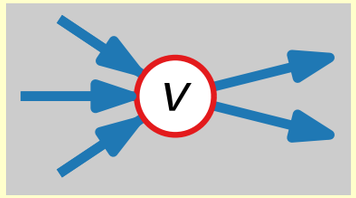
Ein Knoten ist **inzident** zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist **inzident** zu ihren Endknoten.

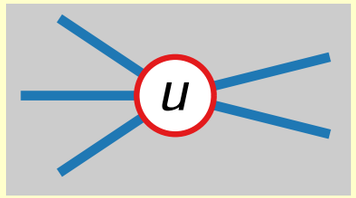
Ein Knoten ist **inzident** zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten:

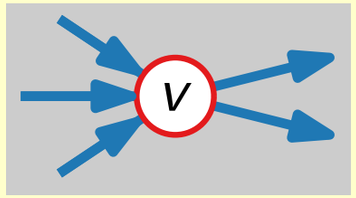
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist **inzident** zu ihren Endknoten.

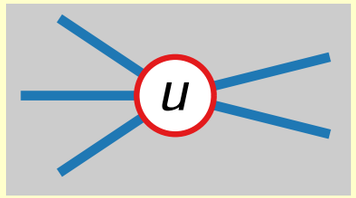
Ein Knoten ist **inzident** zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg(v)$

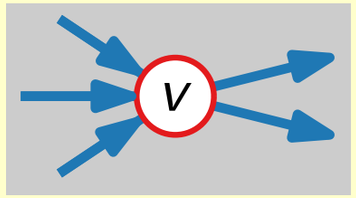
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist **inzident** zu ihren Endknoten.

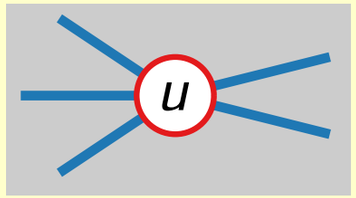
Ein Knoten ist **inzident** zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg(v)$

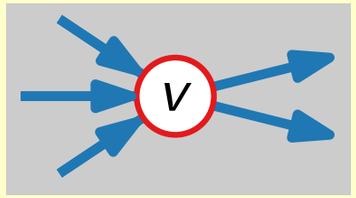
Aus Sicht der Kanten: $2 \cdot |E|$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist **inzident** zu ihren Endknoten.

Ein Knoten ist **inzident** zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

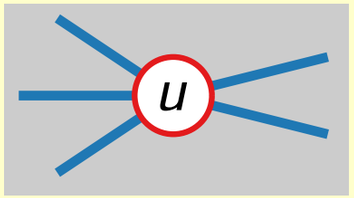
Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg(v)$

Aus Sicht der Kanten: $2 \cdot |E|$

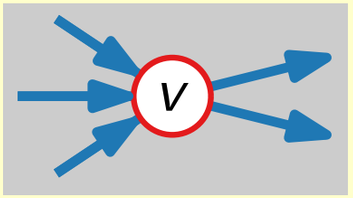
also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

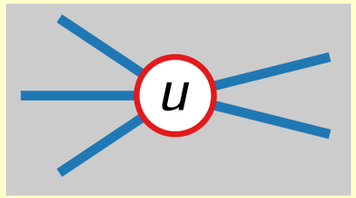
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

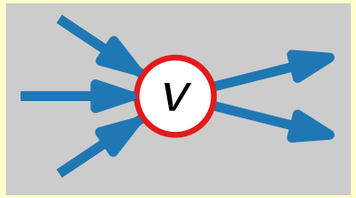
✓

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

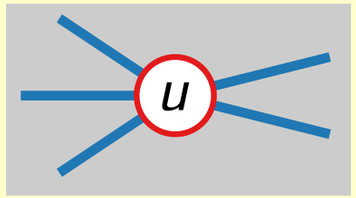
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

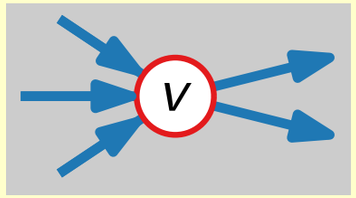
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

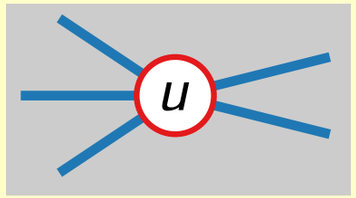
✓

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

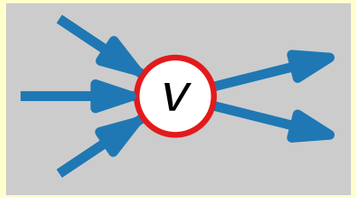
Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

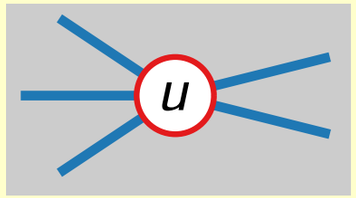
✓

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

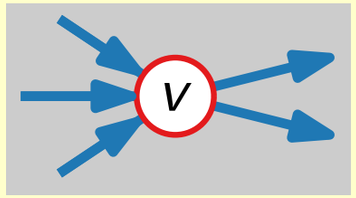
Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v) + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

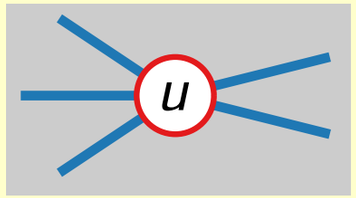
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v) + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$

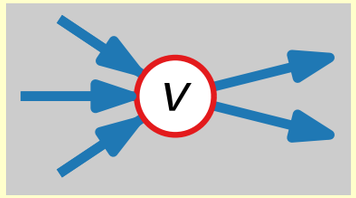
gerade!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

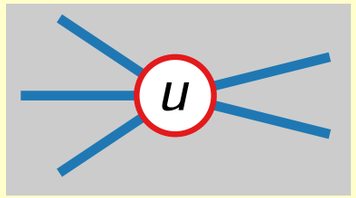
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

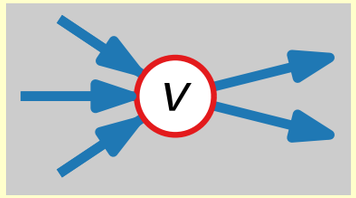
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} = \sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v) + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

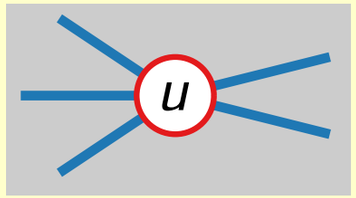
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

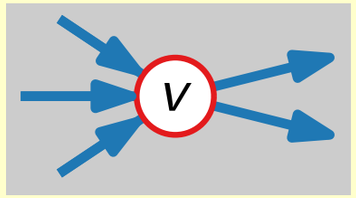
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

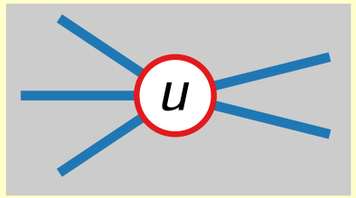
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

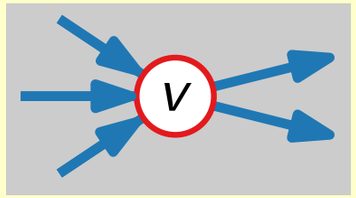
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

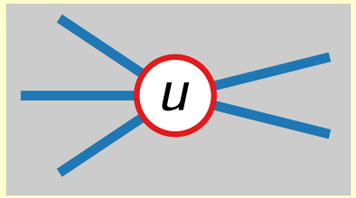
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

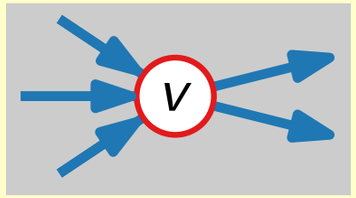
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)}_{\Rightarrow \ \textit{gerade!}}$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

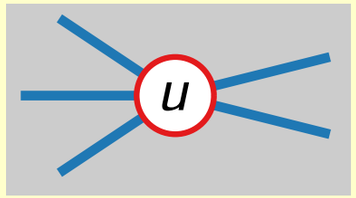
Beweis.

$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\text{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\text{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v)}_{\text{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)}_{\Rightarrow \text{ gerade!}}$$

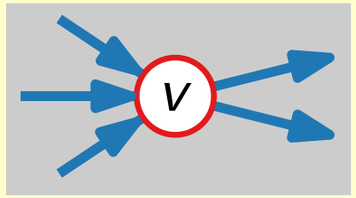
$\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$ *gerade* $\Rightarrow$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)}_{\Rightarrow \ \textit{gerade!}}$$

$\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$ *gerade* $\Rightarrow$ $|V_{\text{ung}}|$ ist *gerade!* □

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

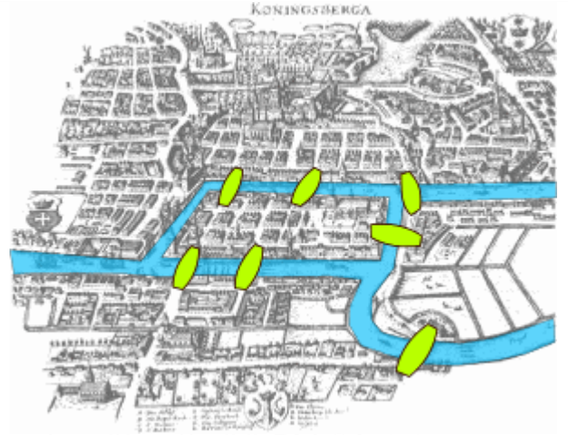
   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

Königsberger Brückenproblem

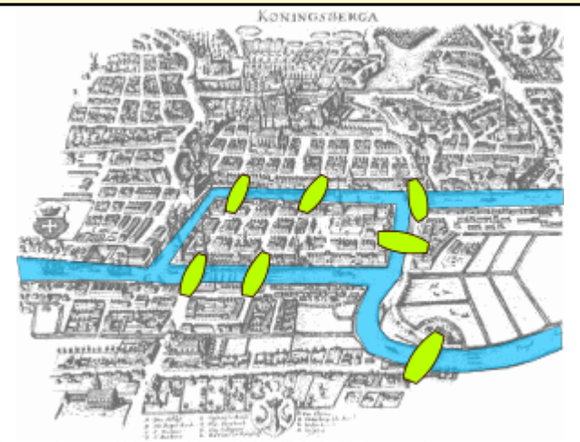


Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

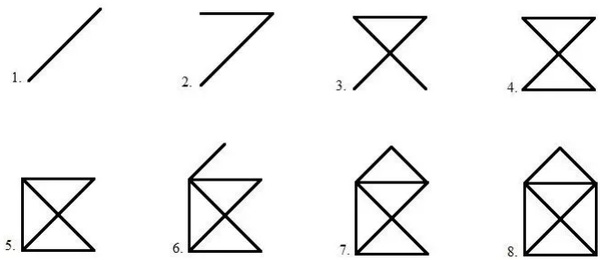
   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

Königsberger Brückenproblem



Bogdan Giușcă, CC BY-SA 3.0,
via Wikimedia Commons

Das Haus vom Nikolaus



https://www.skizzen-zeichnungen.de/anleitung-zeichnen-vom-haus-vom-nikolaus/

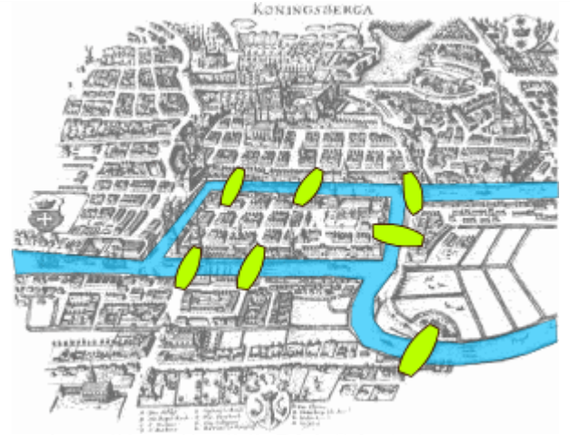
Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

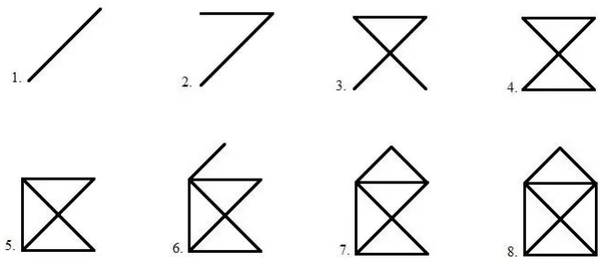
Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

Königsberger Brückenproblem



Bogdan Giușcă, CC BY-SA 3.0,
via Wikimedia Commons

Das Haus vom Nikolaus



https://www.skizzen-zeichnungen.de/anleitung-zeichnen-vom-haus-vom-nikolaus/

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

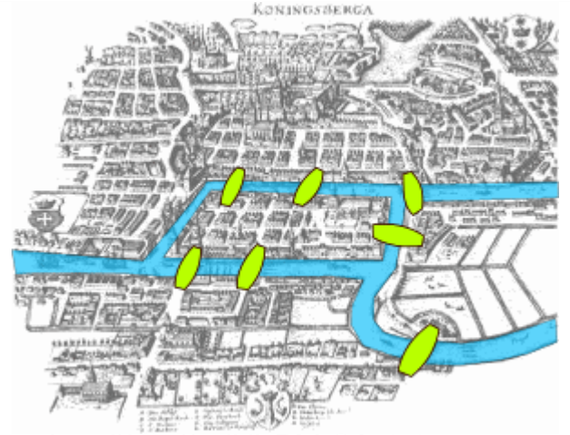
1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

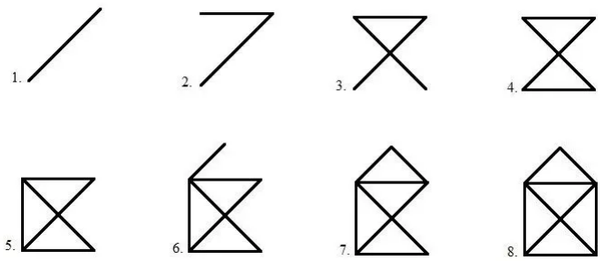
2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

Königsberger Brückenproblem



Bogdan Giuşcă, CC BY-SA 3.0,
via Wikimedia Commons

Das Haus vom Nikolaus



https://www.skizzen-zeichnungen.de/anleitung-zeichnen-vom-haus-vom-nikolaus/

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

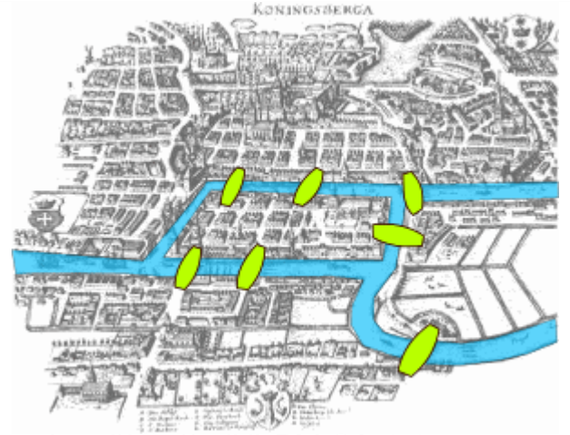
2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

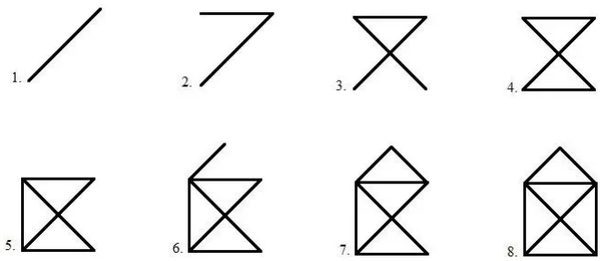
Kapitän Nemo, Public domain, via Wikimedia Commons

Königsberger Brückenproblem



Bogdan Giuşcă, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Das Haus vom Nikolaus



https://www.skizzen-zeichnungen.de/anleitung-zeichnen-vom-haus-vom-nikolaus/

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

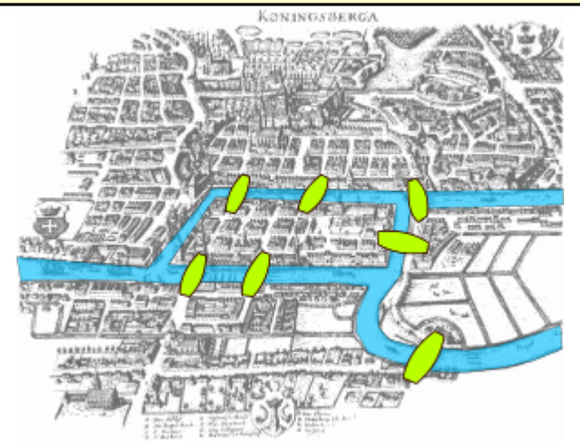
2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

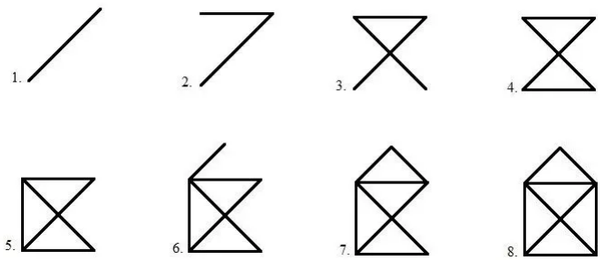
Kapitän Nemo, Public domain, via Wikimedia Commons

Königsberger Brückenproblem



Bogdan Giuşcă, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Das Haus vom Nikolaus



https://www.skizzen-zeichnungen.de/anleitung-zeichnen-vom-haus-vom-nikolaus/

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

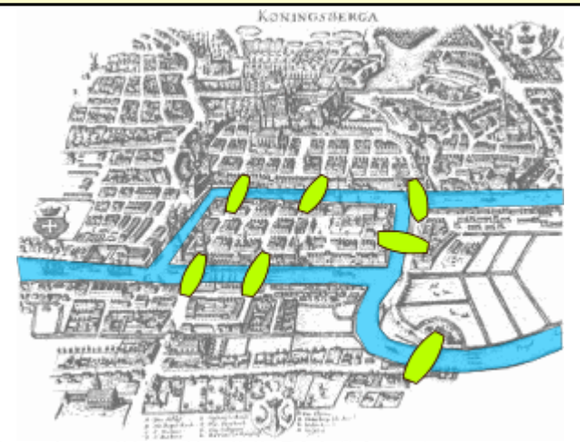
   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

$\mathcal{P}$

$\mathcal{NP}$-schwer

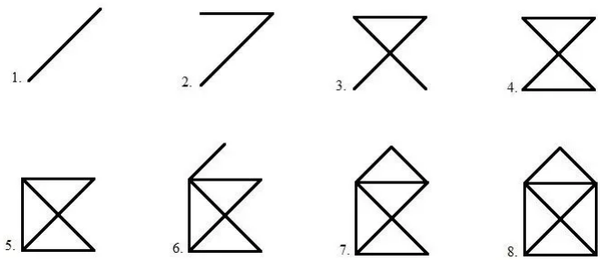
Kapitän Nemo, Public domain, via Wikimedia Commons

Königsberger Brückenproblem



Bogdan Giuşcă, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Das Haus vom Nikolaus



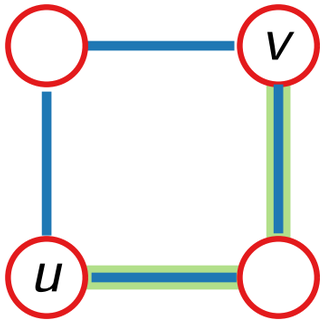
https://www.skizzen-zeichnungen.de/anleitung-zeichnen-vom-haus-vom-nikolaus/

Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

Zusammenhang

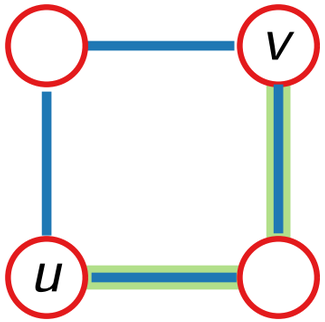
Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.



Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

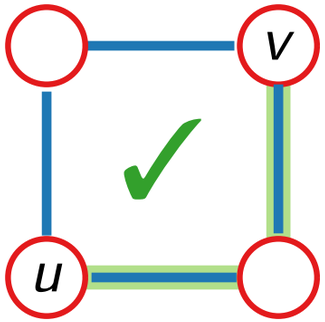
Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.



Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

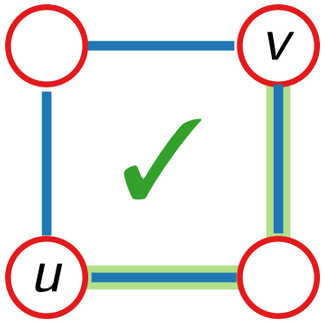
Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.

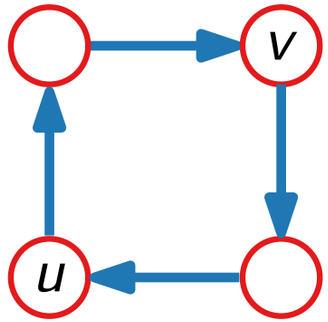


Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.

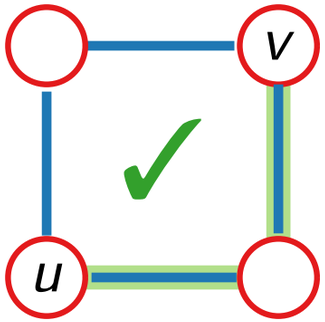


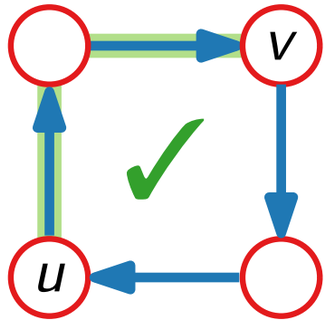


Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.

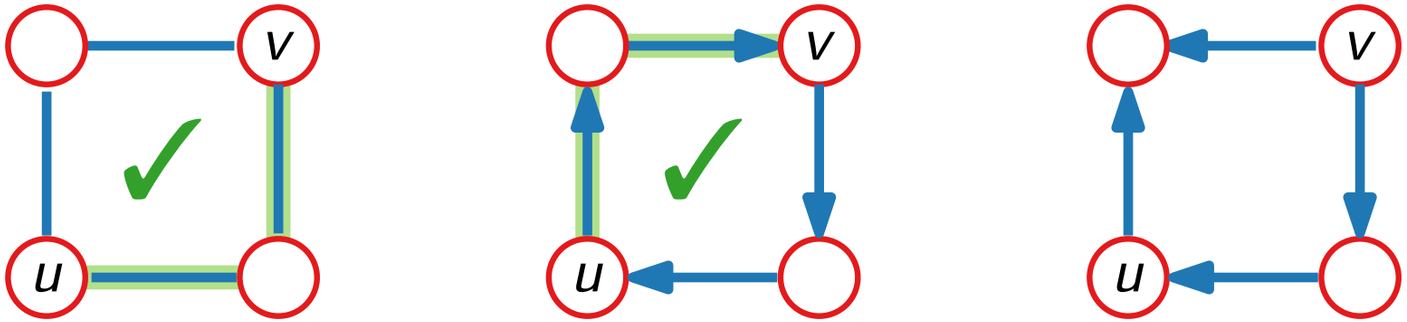




Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

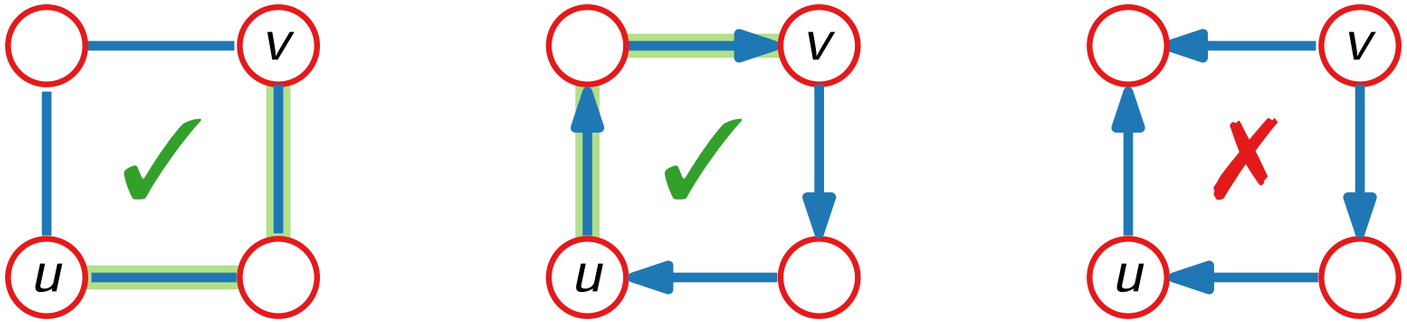
Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.



Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

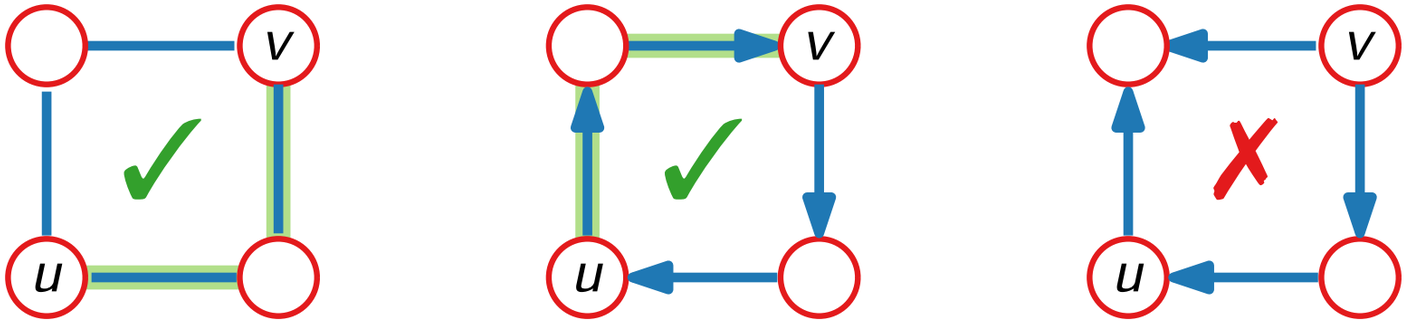
Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.



Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.

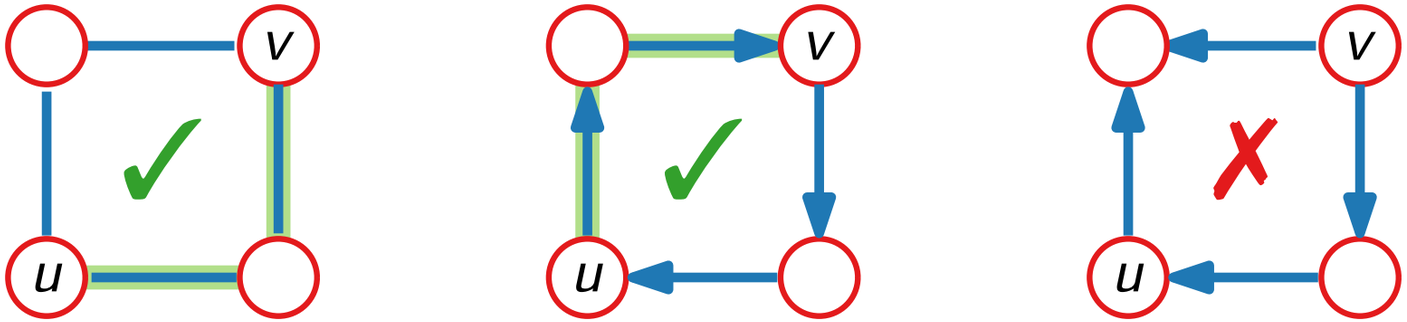


Def. Ein ungerichteter Graph heißt **zusammenhängend**, wenn jedes Knotenpaar voneinander aus erreichbar ist.

Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.



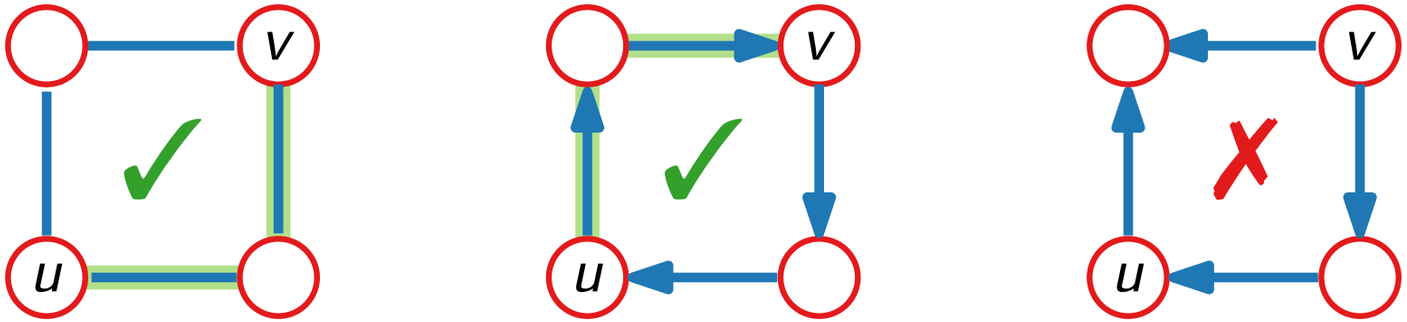
Def. Ein ungerichteter Graph heißt **zusammenhängend**, wenn jedes Knotenpaar voneinander aus erreichbar ist.

Def. Ein gerichteter Graph heißt **(schwach) zusammenhängend**, wenn der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.



Def. Ein ungerichteter Graph heißt **zusammenhängend**, wenn jedes Knotenpaar voneinander aus erreichbar ist.

Def. Ein gerichteter Graph heißt **(schwach) zusammenhängend**, wenn der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

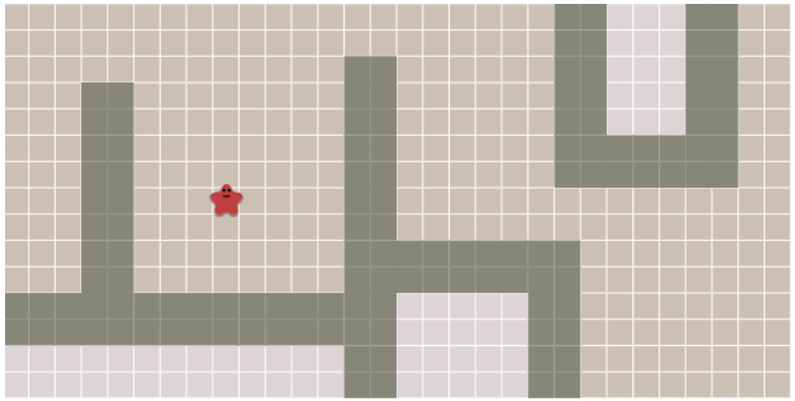
Def. Einen maximalen zusammenhängenden Teilgraphen nennt man eine **Zusammenhangskomponente**.

Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?

Wie durchlaufe ich einen Graphen?

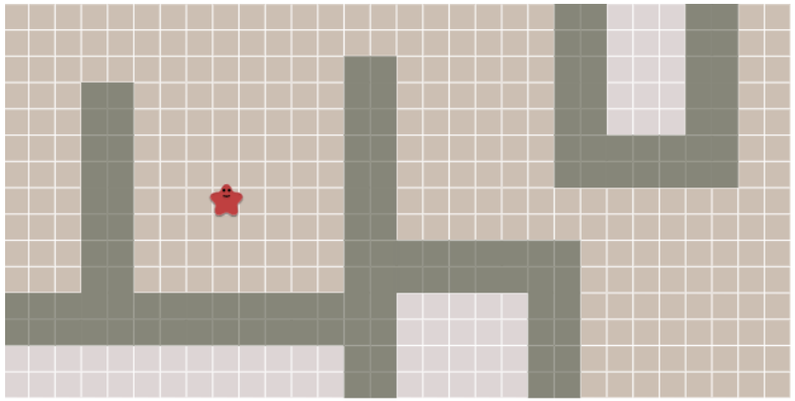
Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?

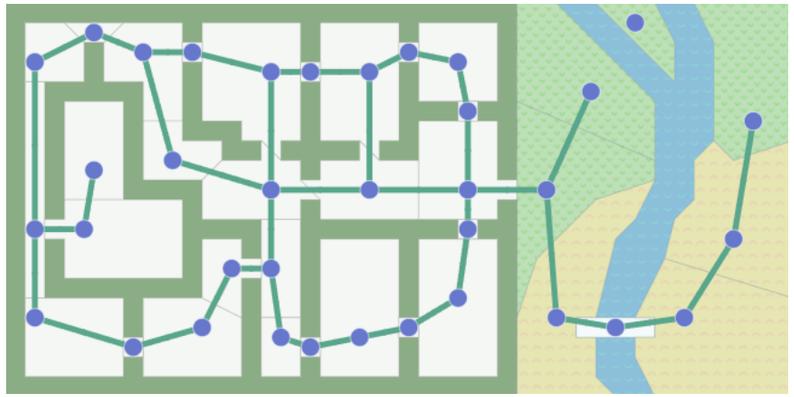


Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?

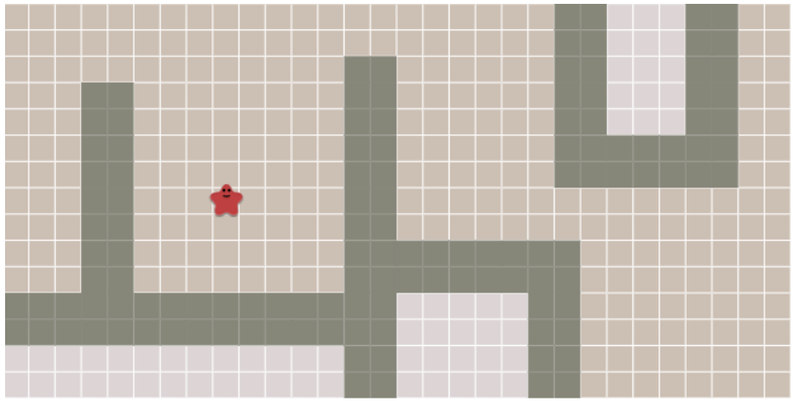


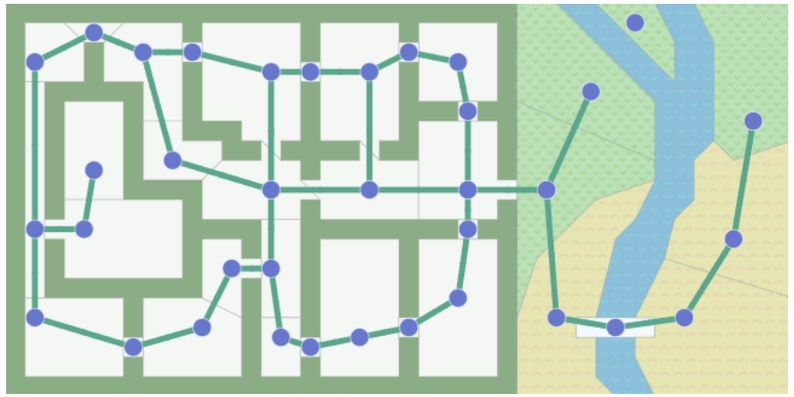


Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

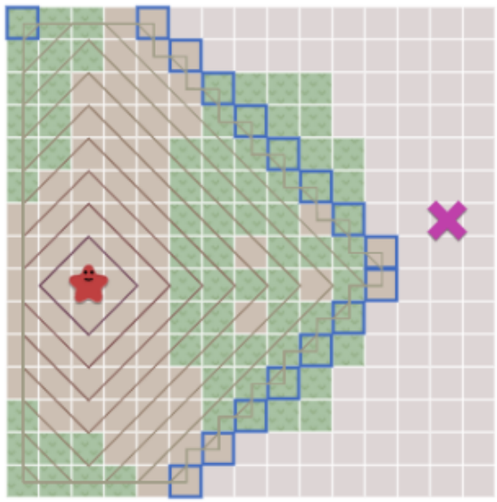
Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?



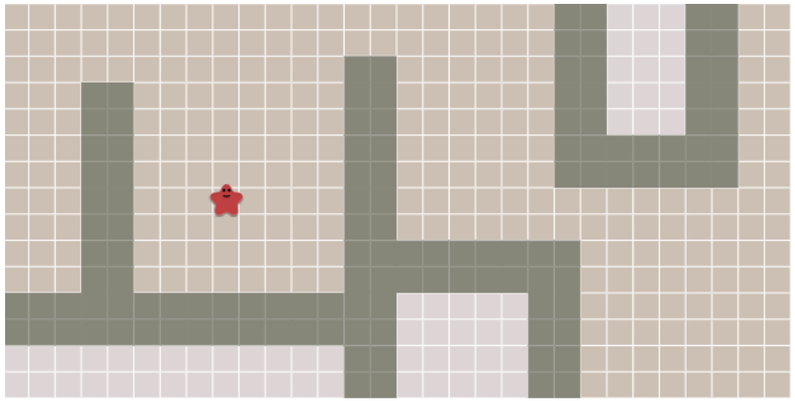


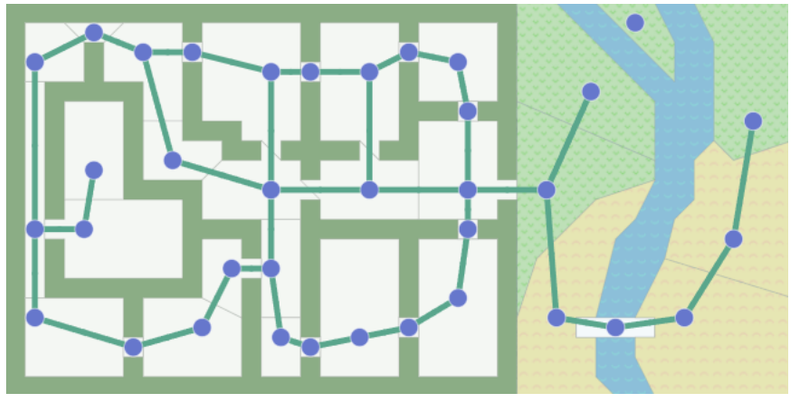
Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html



Wie durchlaufe ich einen Graphen?

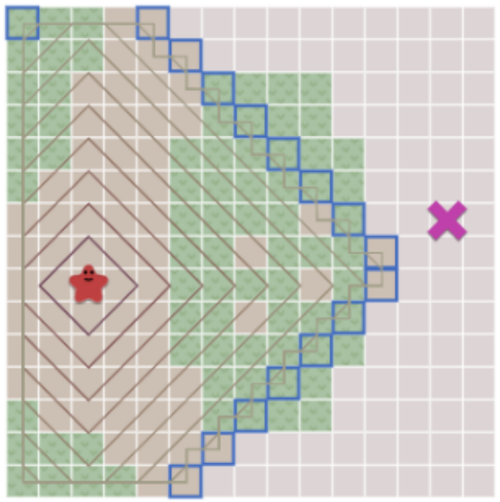
Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?





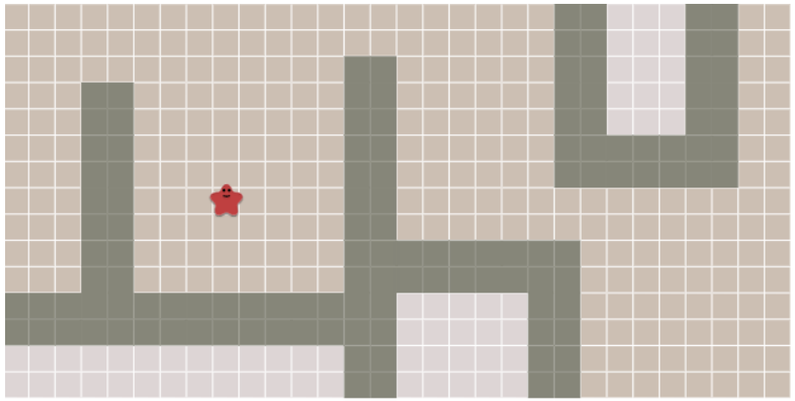
Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

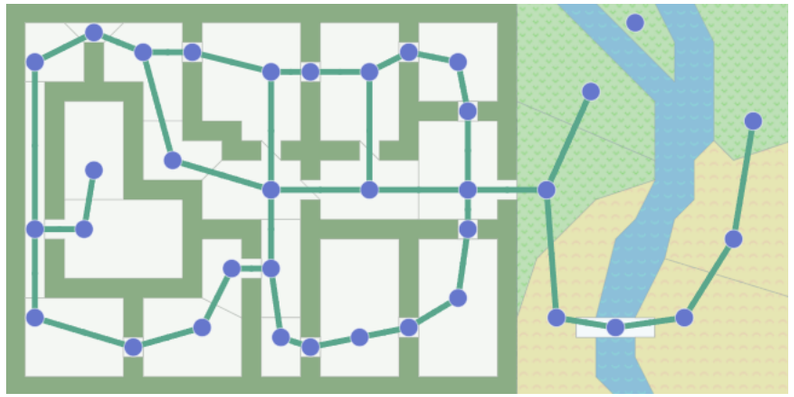
1. wellenförmige Ausbreitung ab s



Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?

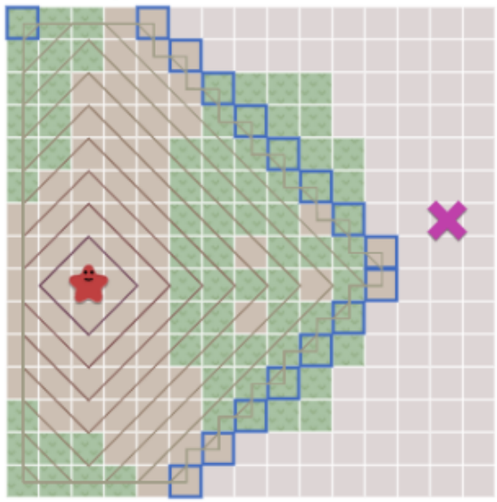




Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

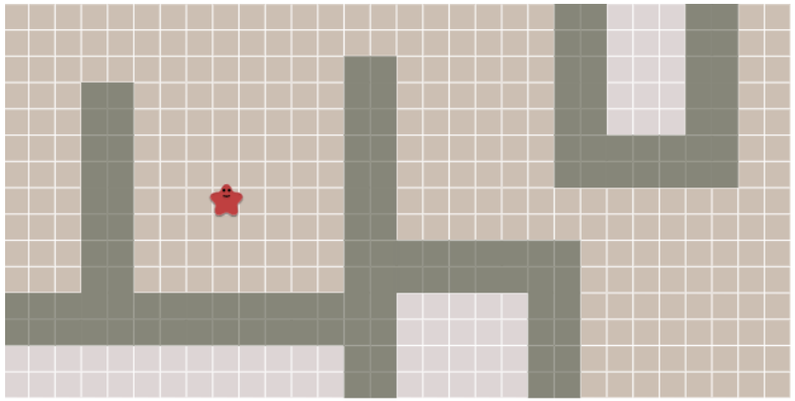
1. wellenförmige Ausbreitung ab s

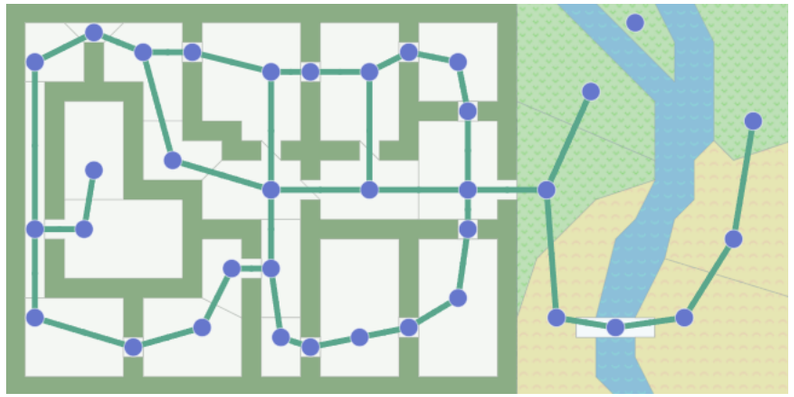
   Breitensuche (breadth-first search, BFS)



Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?

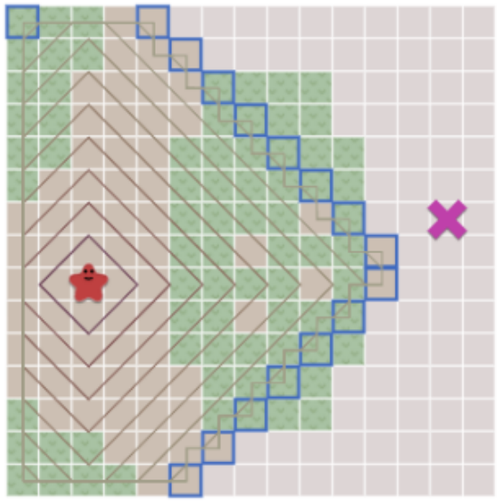


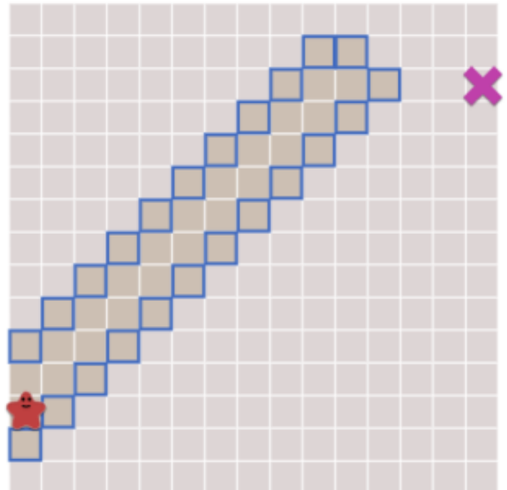


Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

1. wellenförmige Ausbreitung ab s

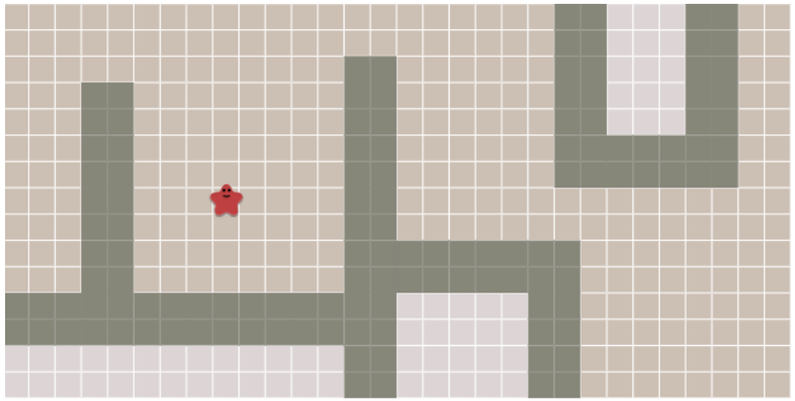
   Breitensuche (breadth-first search, BFS)

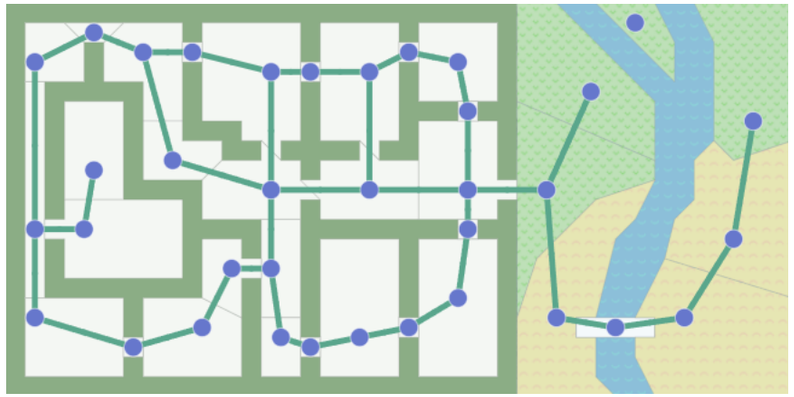




Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?

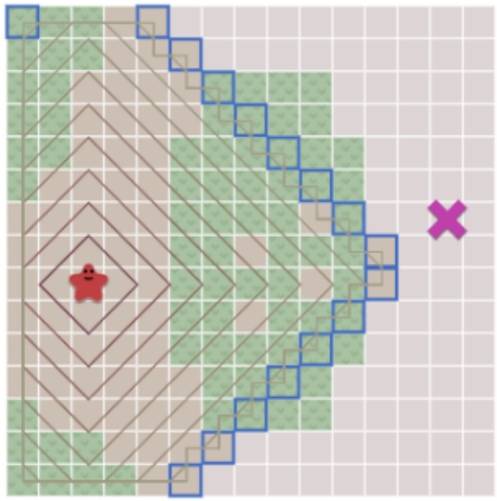




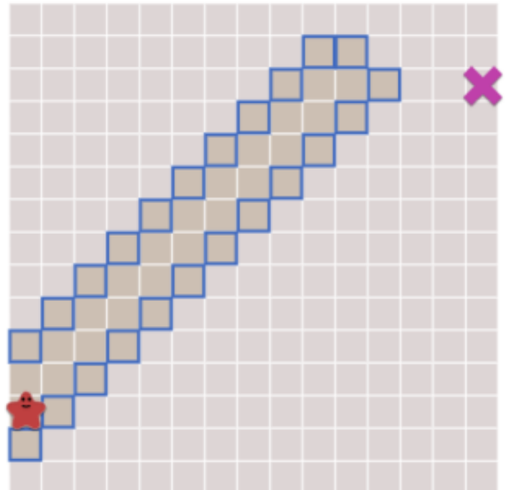
Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

1. wellenförmige Ausbreitung ab s

   Breitensuche (breadth-first search, BFS)

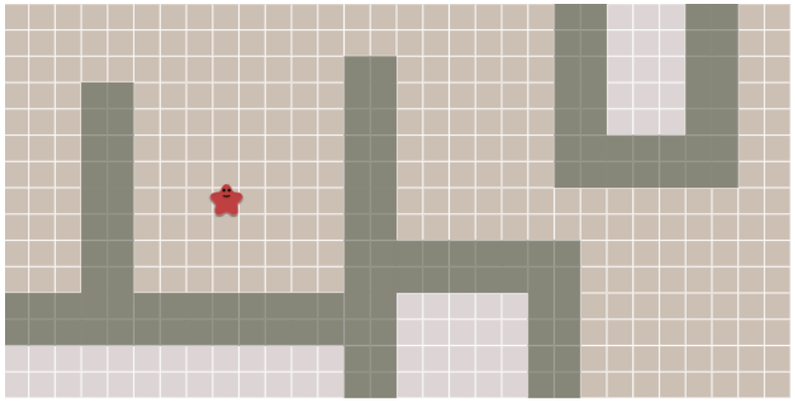


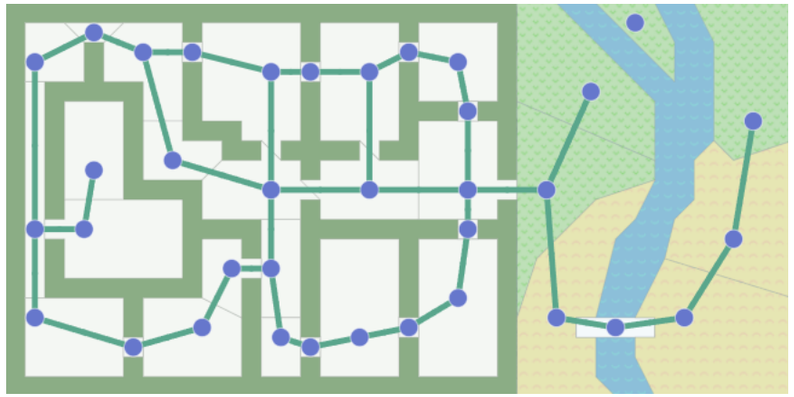
2. von s möglichst schnell weit weg



Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?

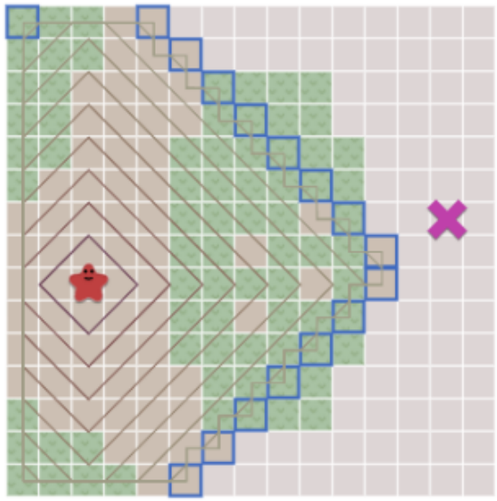




Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

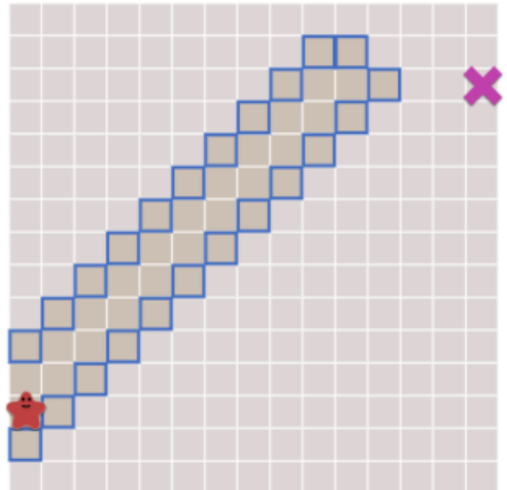
1. wellenförmige Ausbreitung ab s

   Breitensuche (breadth-first search, BFS)



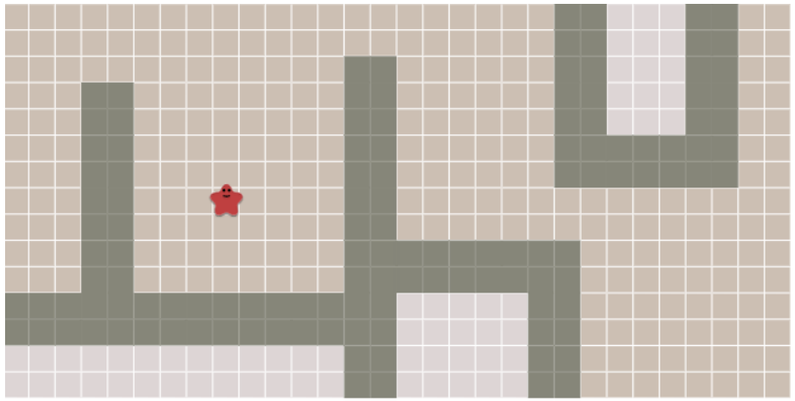
2. von s möglichst schnell weit weg

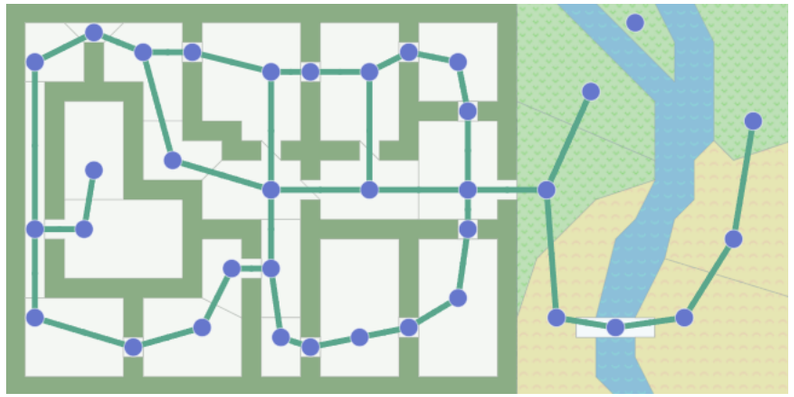
   Tiefensuche (depth-first search, DFS)



Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?



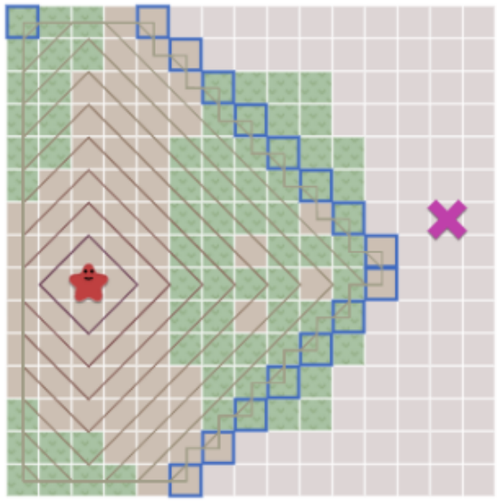


Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

1. wellenförmige Ausbreitung ab s

   Breitensuche (breadth-first search, BFS)

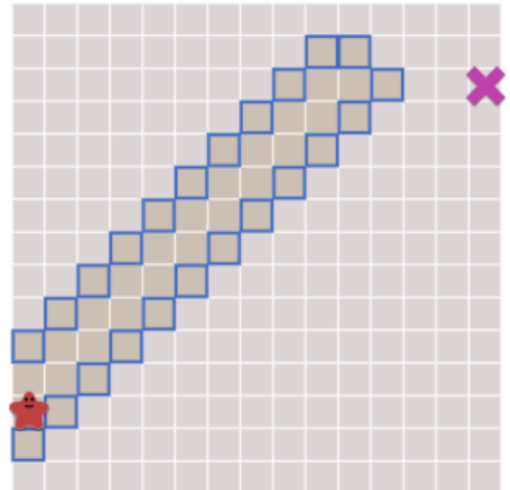
heute



2. von s möglichst schnell weit weg

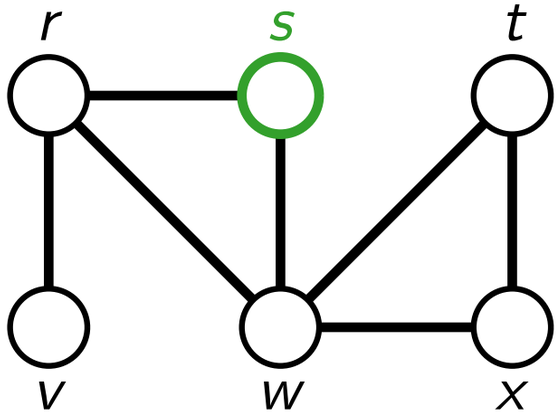
   Tiefensuche (depth-first search, DFS)

nächstes Mal



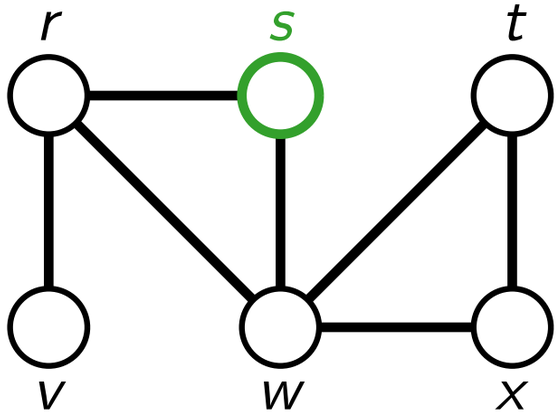
Breitensuche

BFS(Graph G, Vertex s)



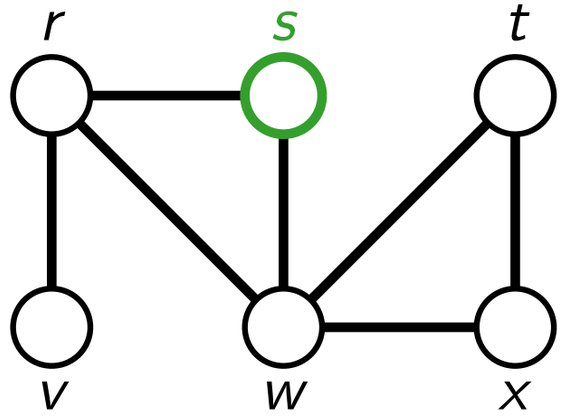
Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
```



Breitensuche

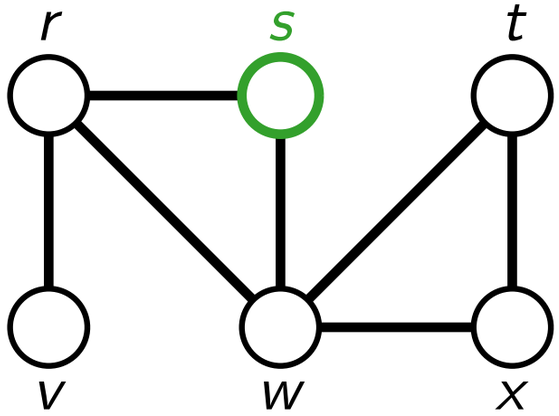
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
```




```
Initialize(Graph G, Vertex s)
```

Breitensuche

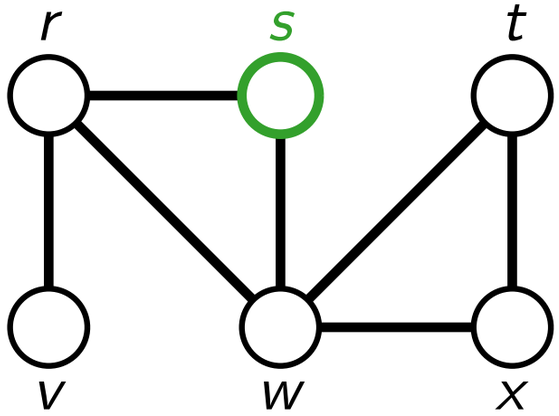
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
```




```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
```

Breitensuche

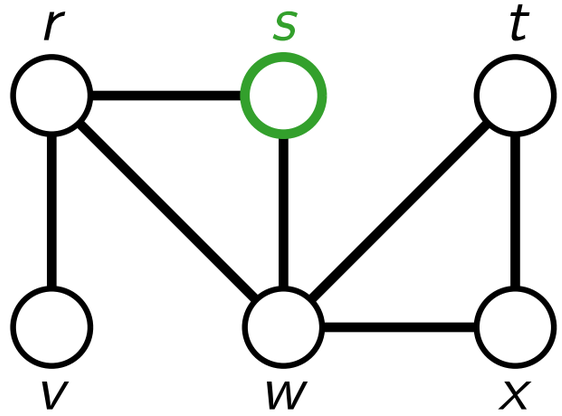
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
```




```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
```

Breitensuche

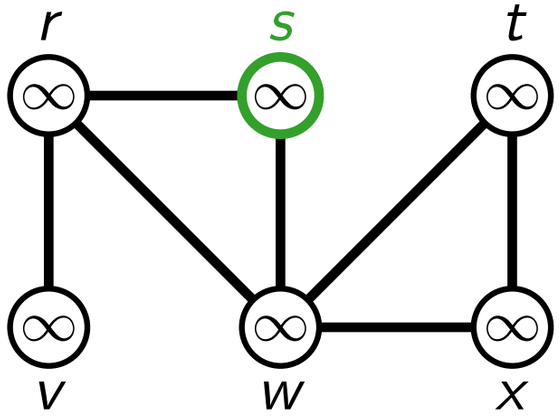
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)



INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.d = \infty$

Breitensuche

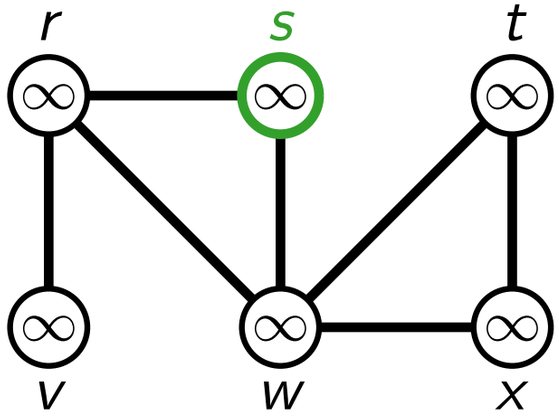
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
```




```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
```

Breitensuche

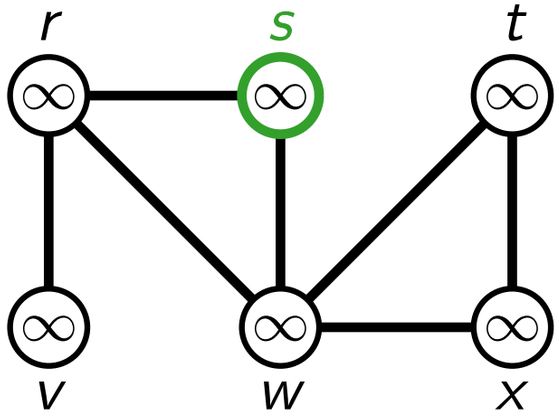
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
```




```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
```

Breitensuche

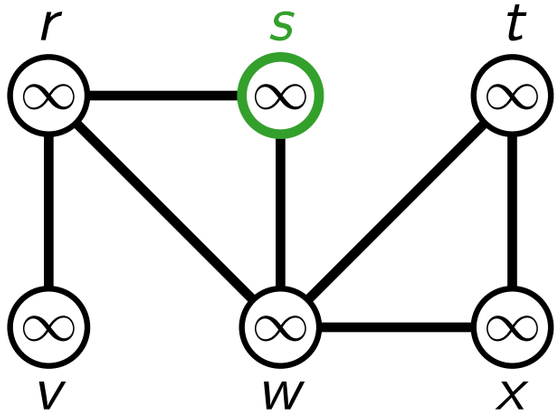
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)



INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.d = \infty$
    $u.\pi = nil$ Vorgänger

Breitensuche

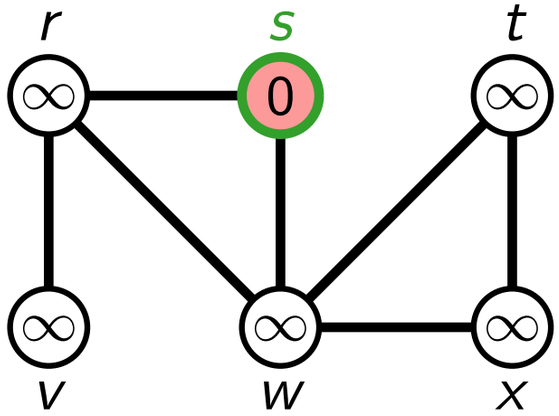
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
```




```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil        Vorgänger
  s.color = red
  s.d = 0
```

Breitensuche

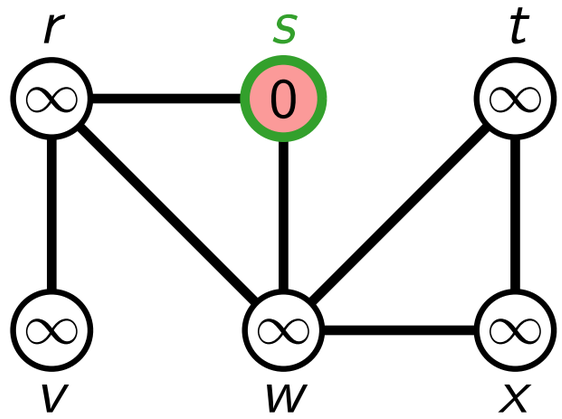
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
```

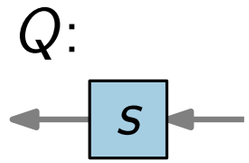



```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil        Vorgänger
  s.color = red
  s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
```

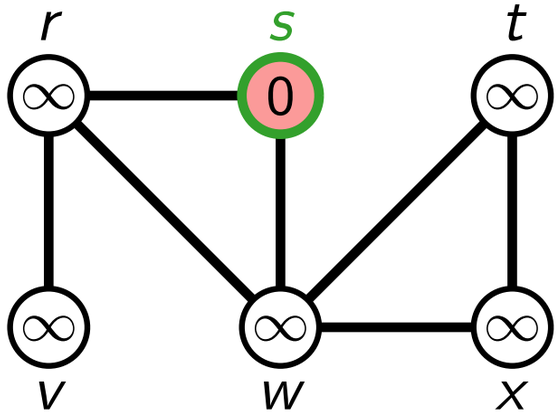




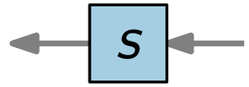

```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil        Vorgänger
  s.color = red
  s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    INITIALIZE(G, s)
    Q = new QUEUE()
    Q.ENQUEUE(s)
    while not Q.EMPTY() do
```



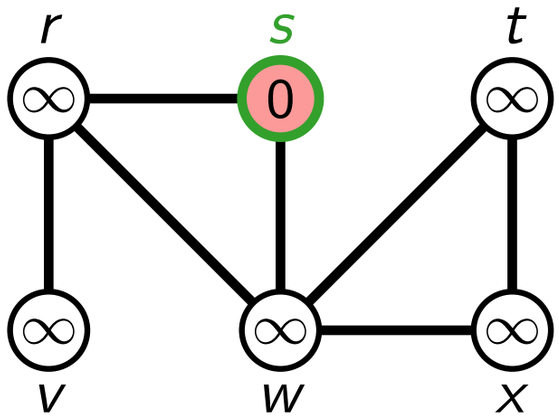
Q:

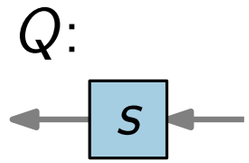



```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
```

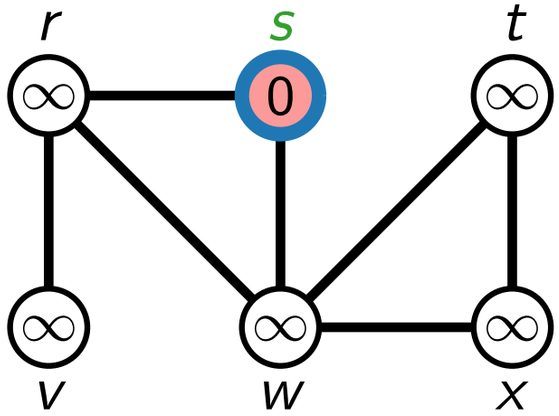





```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    INITIALIZE(G, s)
    Q = new QUEUE()
    Q.ENQUEUE(s)
    while not Q.EMPTY() do
        u = Q.DEQUEUE()
```

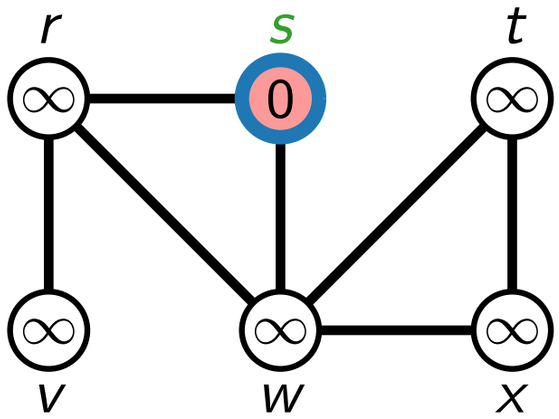


Q:

```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
```

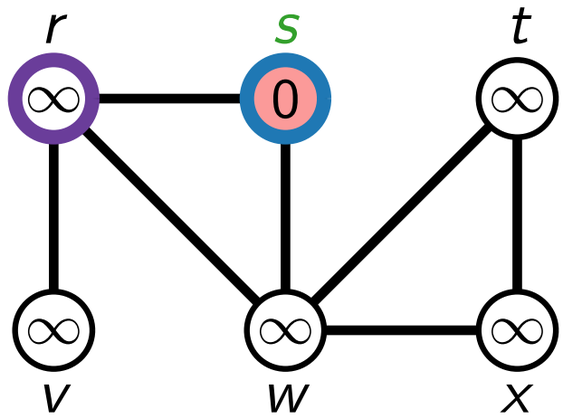


Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil      Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    INITIALIZE(G, s)
    Q = new QUEUE()
    Q.ENQUEUE(s)
    while not Q.EMPTY() do
        u = Q.DEQUEUE()
        foreach v ∈ Adj[u] do
```

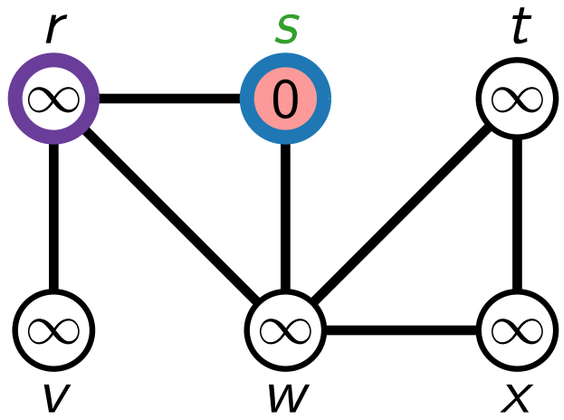


Q:

```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            Aufgabe:
            Schreiben Sie Pseudocode, so dass:
            v.d = Länge eines kürzesten
                  s-v-Weges über u, falls ...
            v.π = Vorgänger auf diesem Weg
```

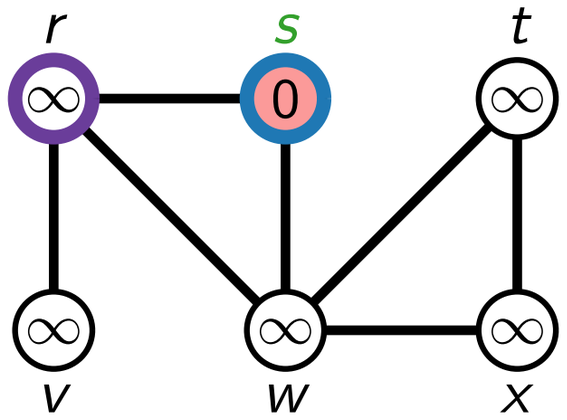


Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    INITIALIZE(G, s)
    Q = new QUEUE()
    Q.ENQUEUE(s)
    while not Q.EMPTY() do
        u = Q.DEQUEUE()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
```

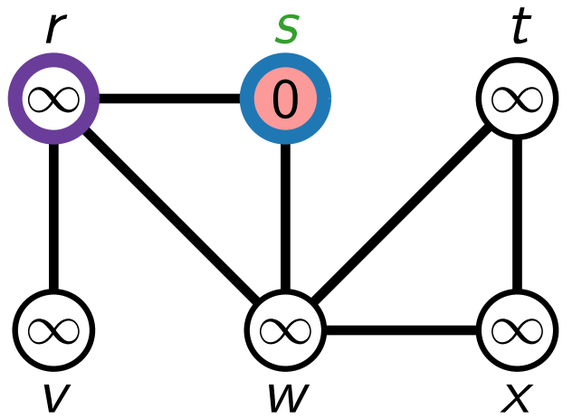


Q:

```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    INITIALIZE(G, s)
    Q = new QUEUE()
    Q.ENQUEUE(s)
    while not Q.EMPTY() do
        u = Q.DEQUEUE()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
```

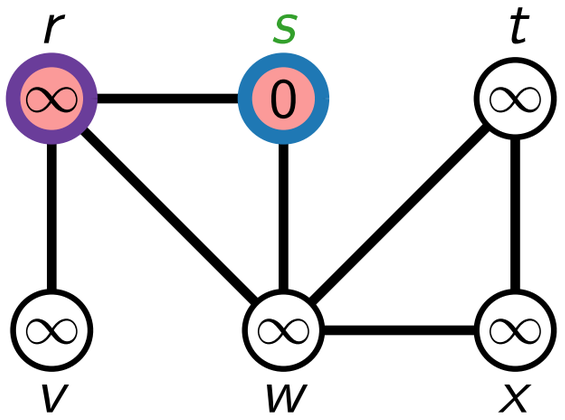


Q:

```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    INITIALIZE(G, s)
    Q = new QUEUE()
    Q.ENQUEUE(s)
    while not Q.EMPTY() do
        u = Q.DEQUEUE()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
```

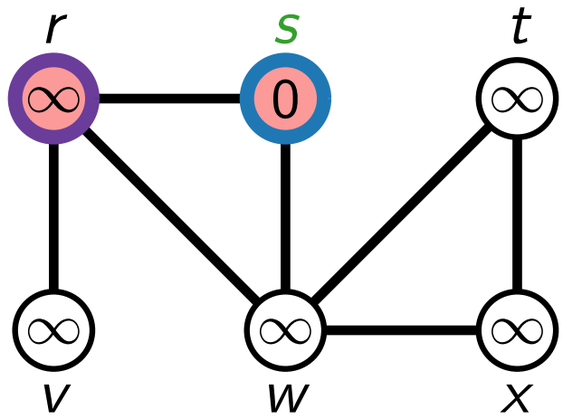


Q:

```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    INITIALIZE(G, s)
    Q = new QUEUE()
    Q.ENQUEUE(s)
    while not Q.EMPTY() do
        u = Q.DEQUEUE()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
```

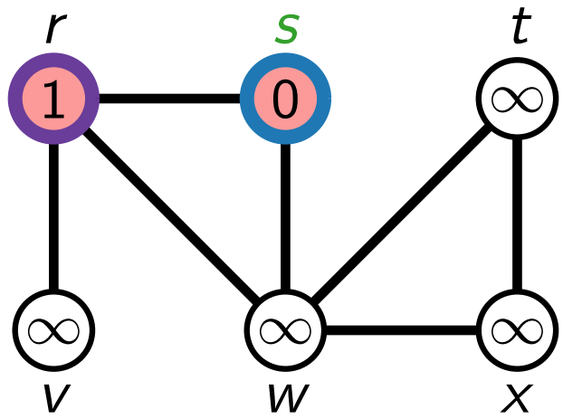


Q:

```
INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
```

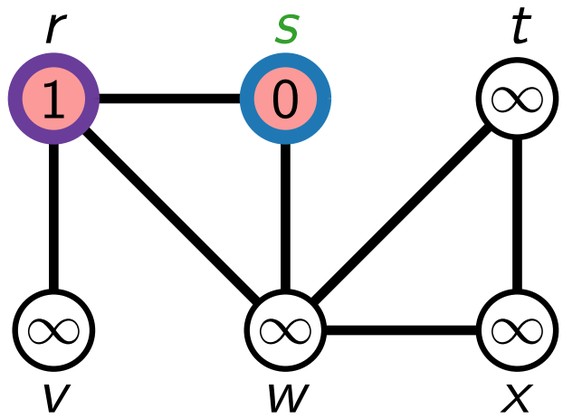


Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
```

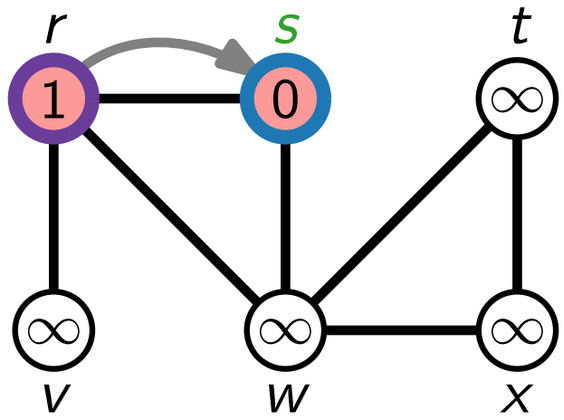


Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
```

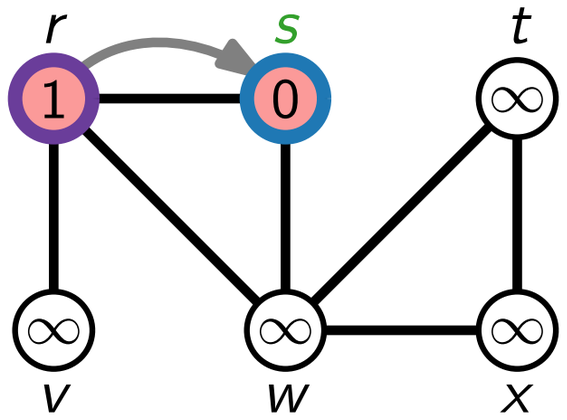


Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```

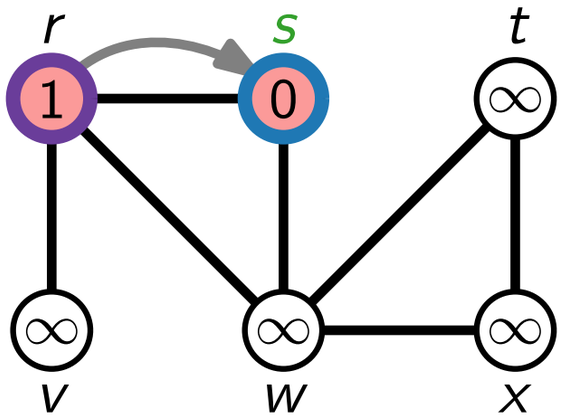


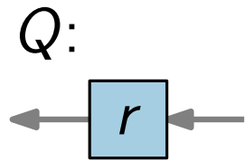
Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```

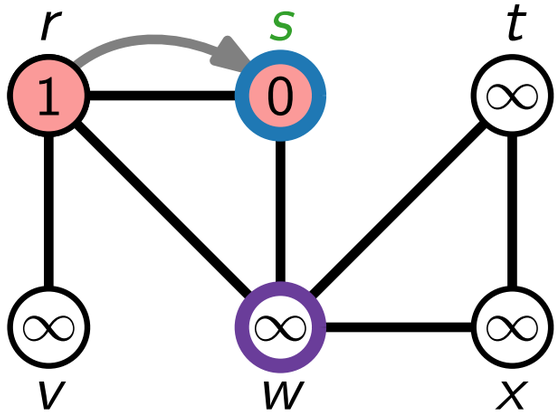


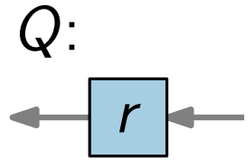



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```

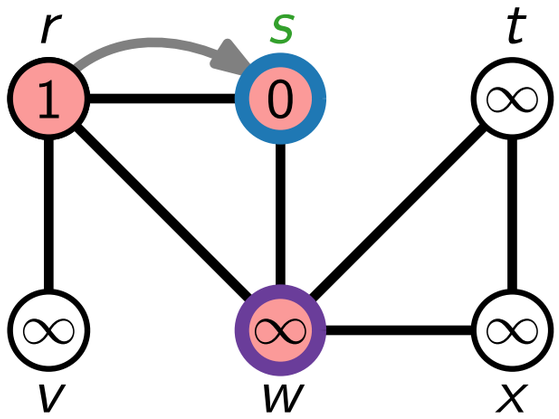


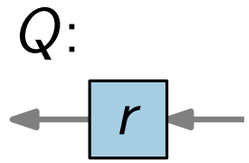



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```

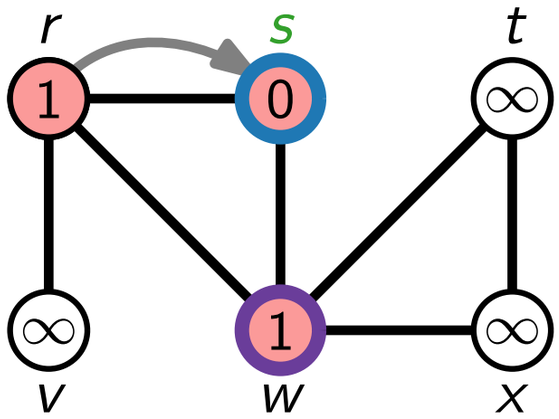


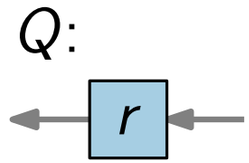



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```

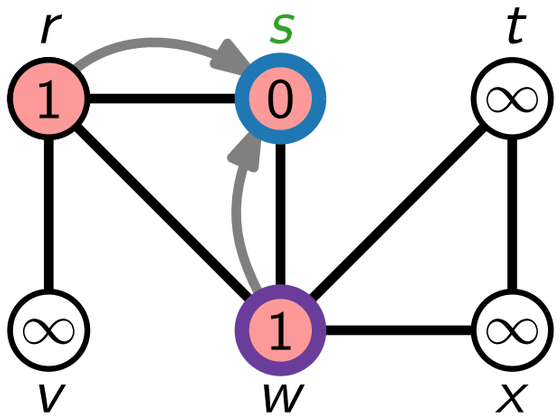


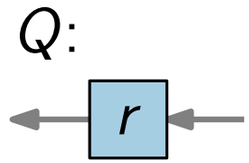



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```

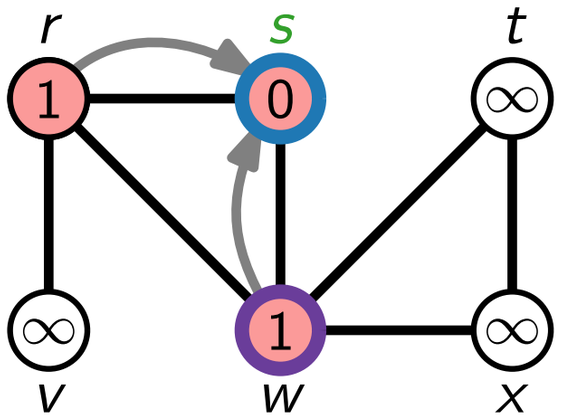




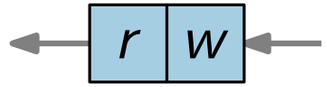

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```



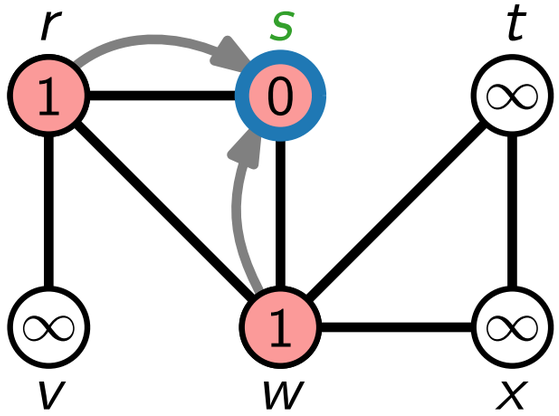
Q:

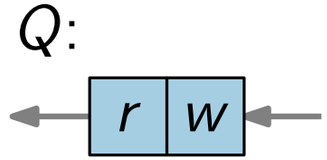



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil      Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```

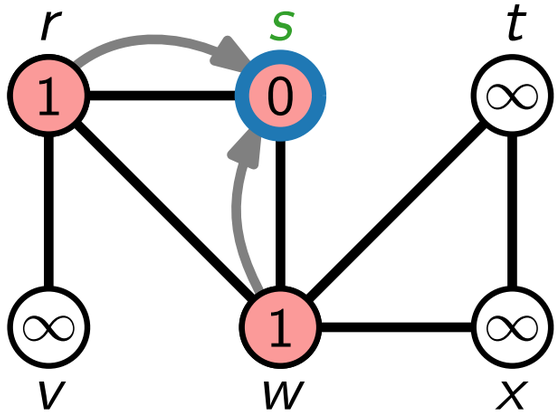


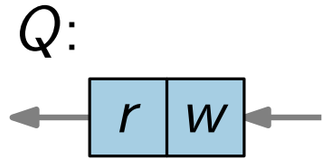



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

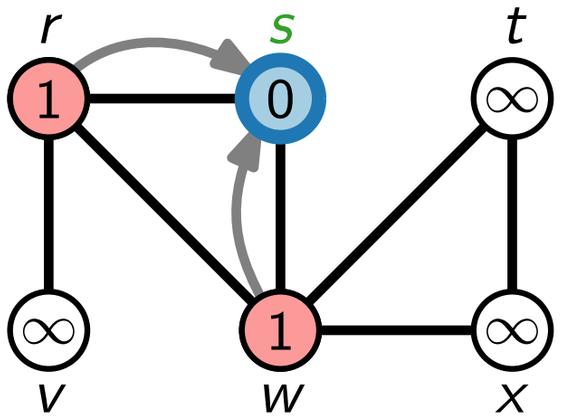


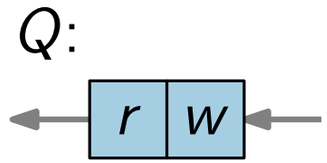



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

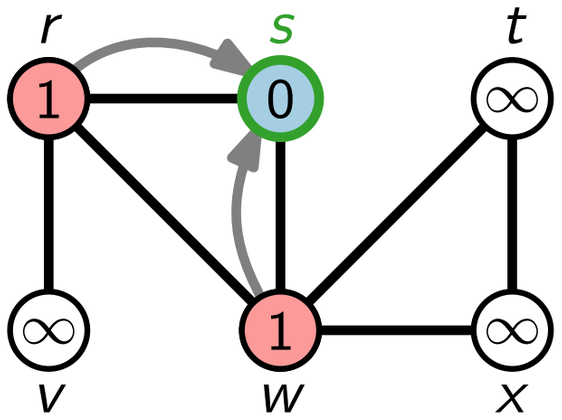


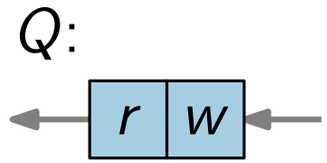



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

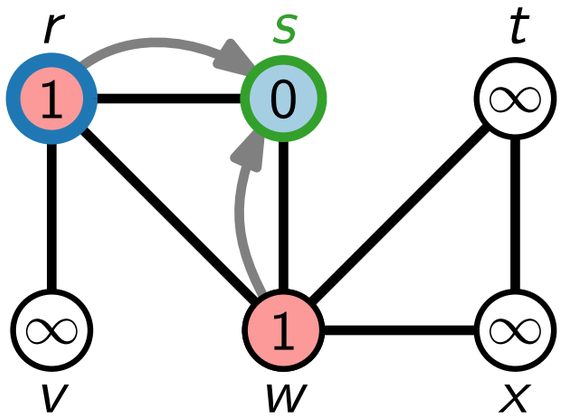





```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

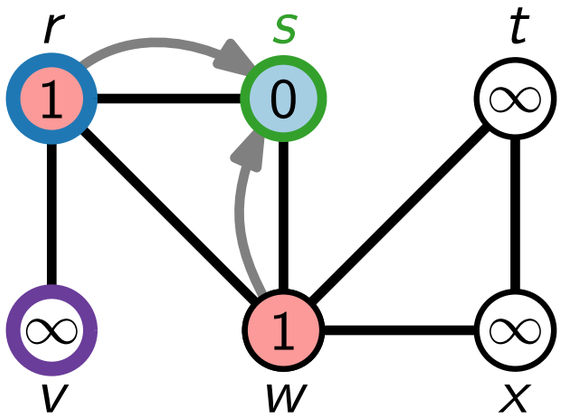


Q:


```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil      Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

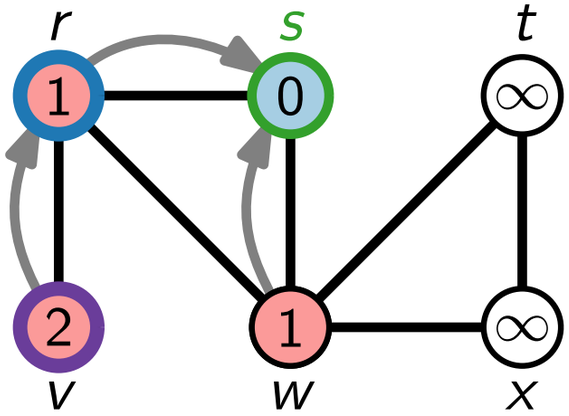


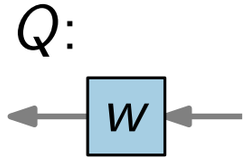
Q:


```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



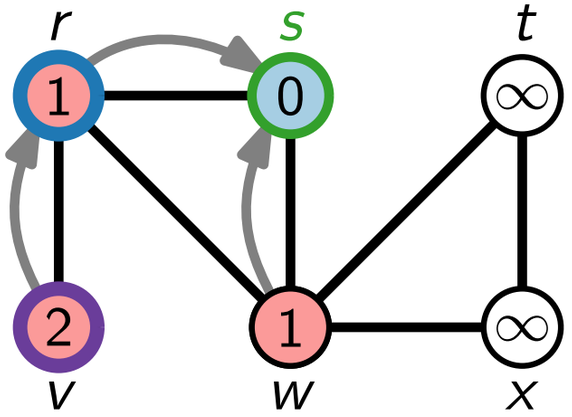


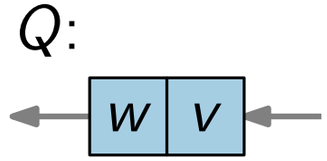

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil
    s.color = red
    s.d = 0
```

Vorgänger

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

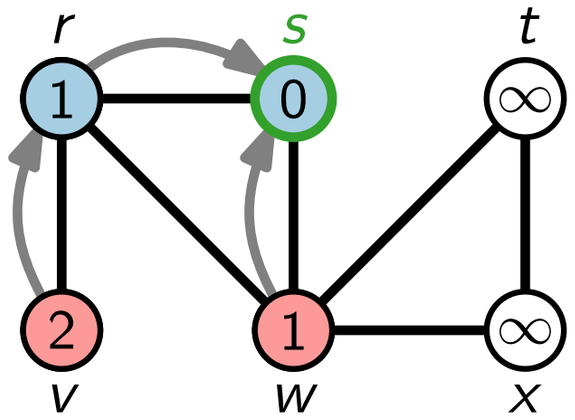


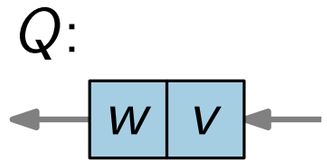



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

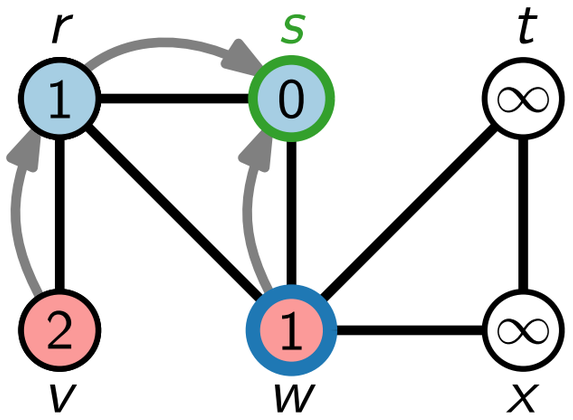


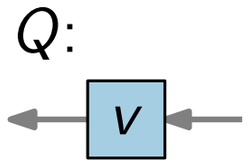



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

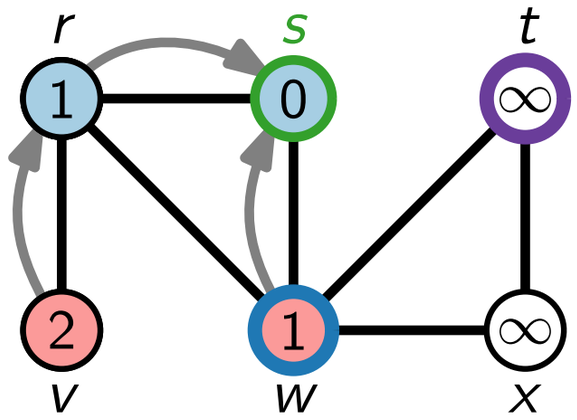


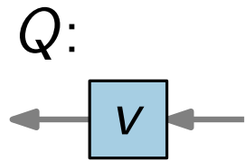



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil      Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

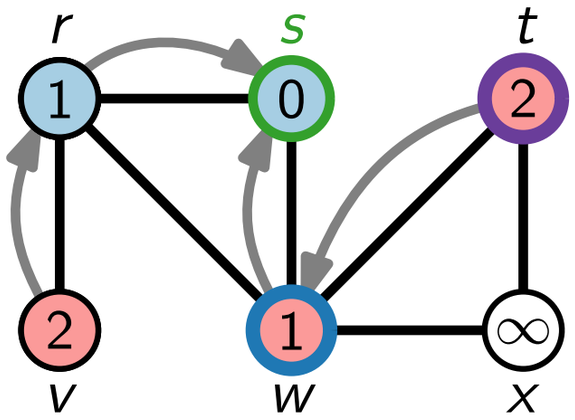


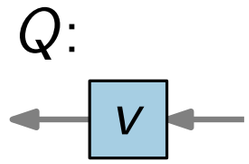



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil      Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

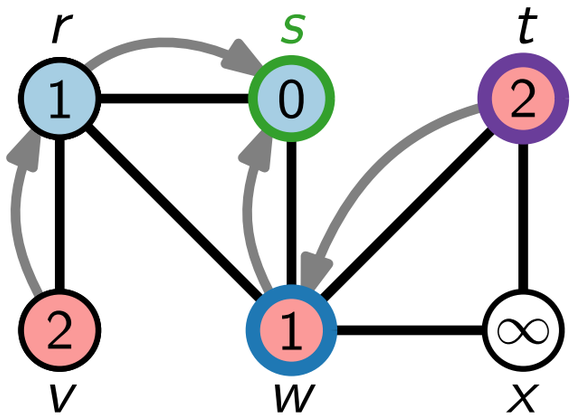


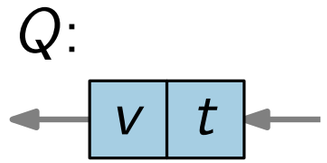



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil      Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

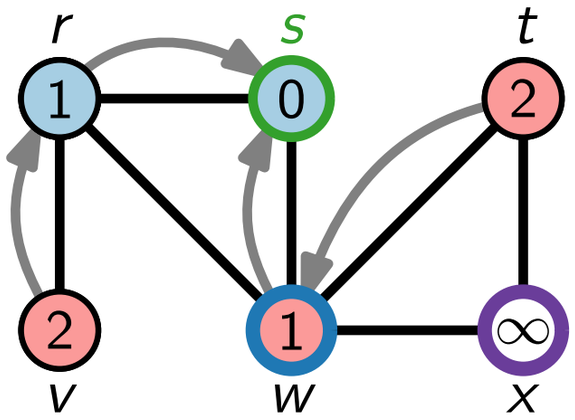


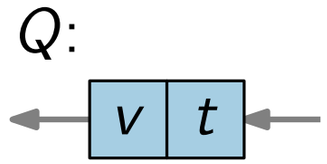



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

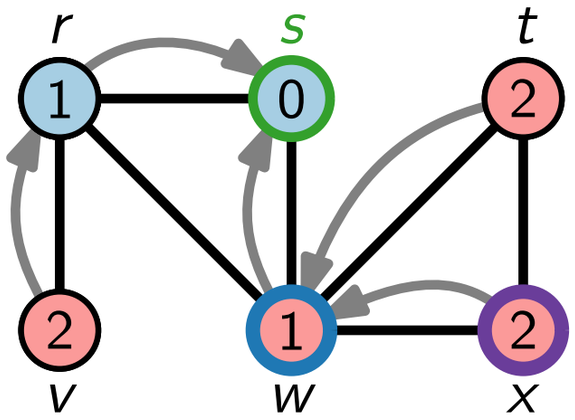


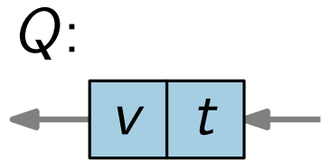



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

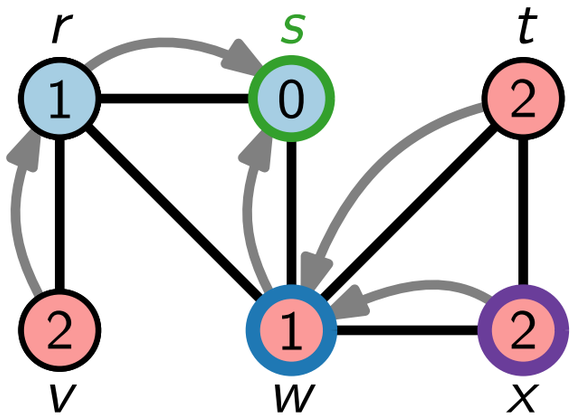


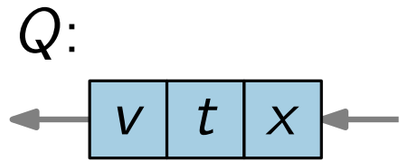



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

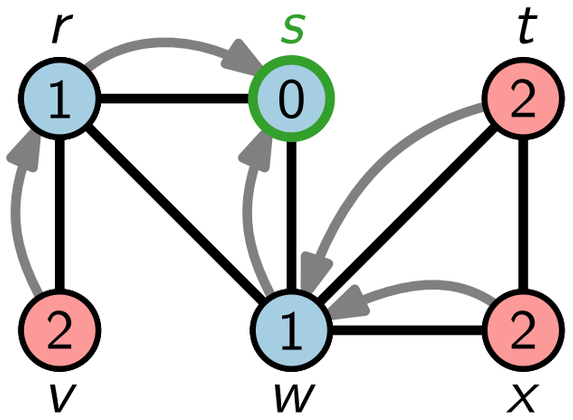


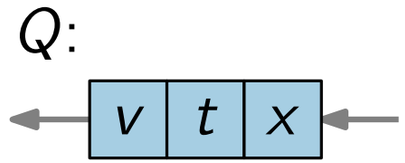



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

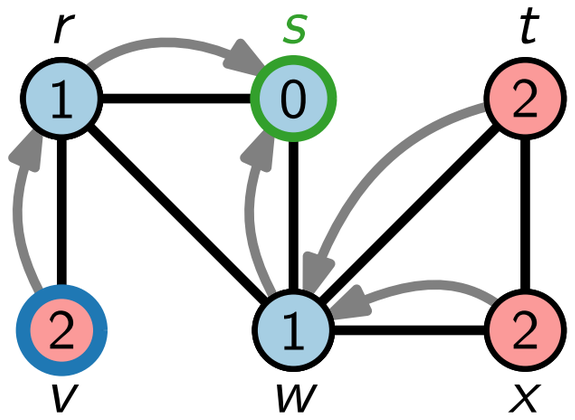


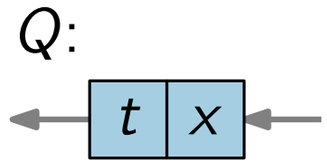



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



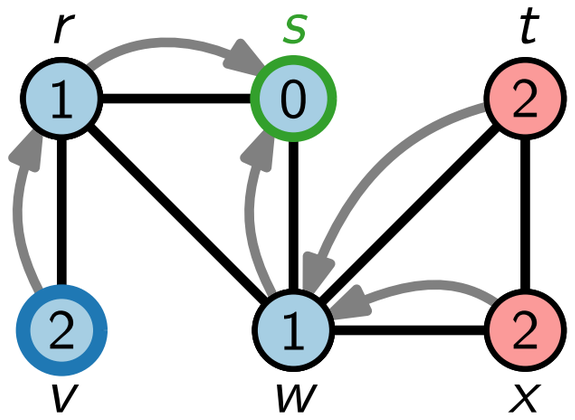


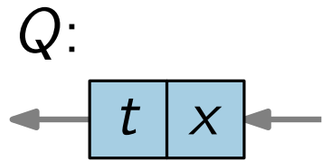

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil
    s.color = red
    s.d = 0
```

Vorgänger

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

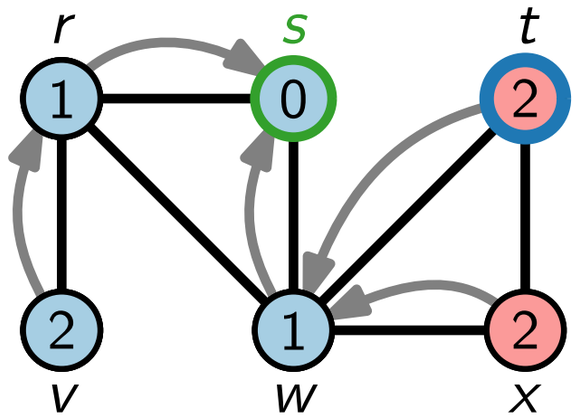


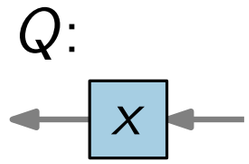



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

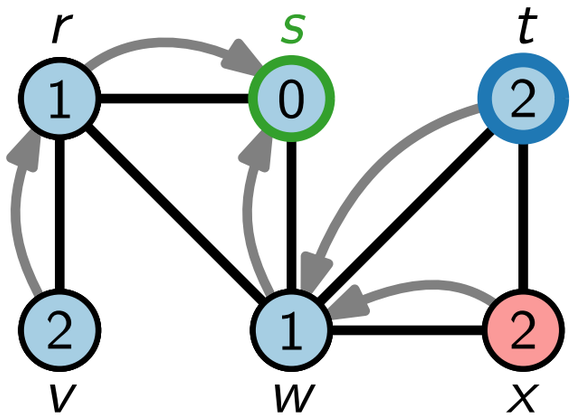


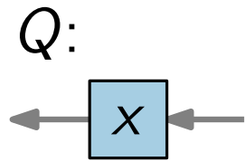



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



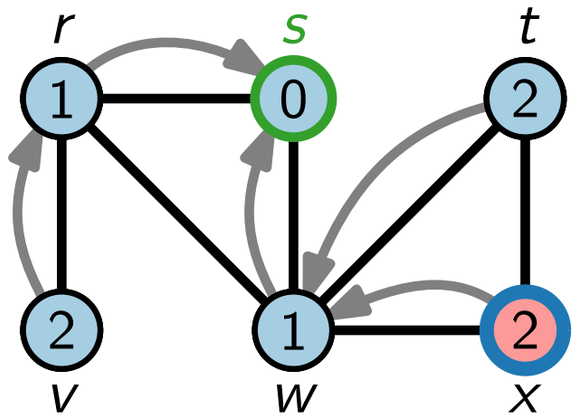



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil
    s.color = red
    s.d = 0
```

Vorgänger

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



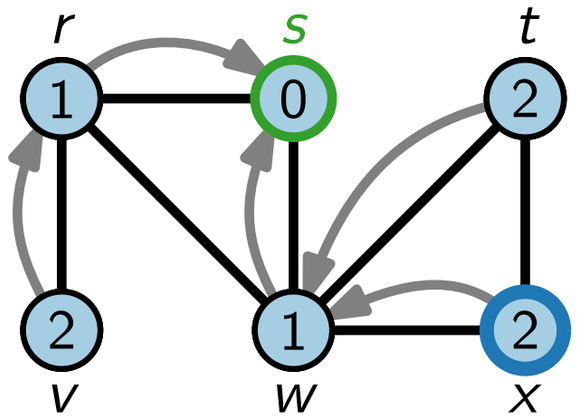
Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil
    s.color = red
    s.d = 0
```

Vorgänger

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



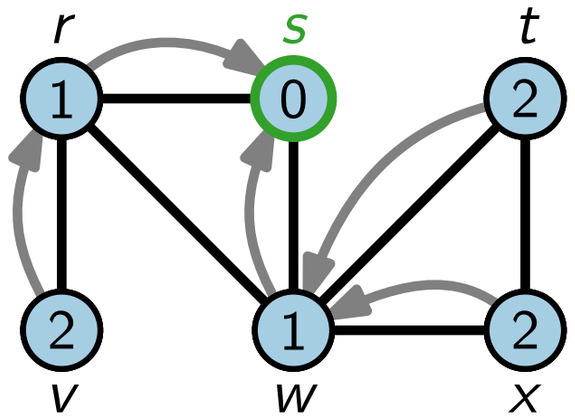
Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil
    s.color = red
    s.d = 0
```

Vorgänger

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```

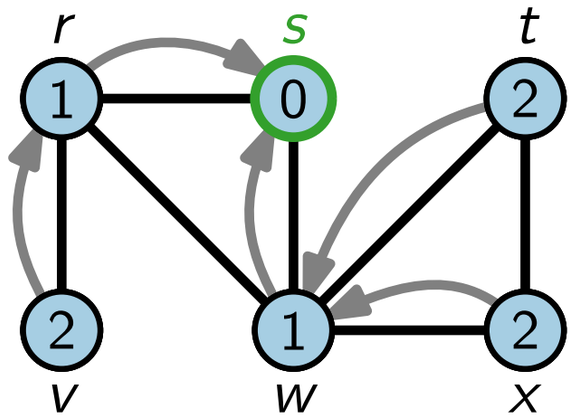


Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

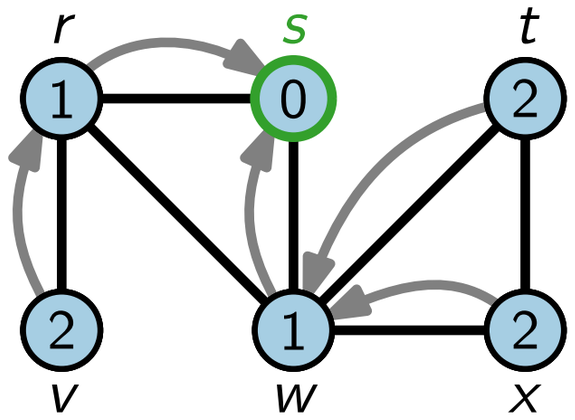
```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Demo.

`https://algo.uni-trier.de/demos/graphtraversal.html`

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



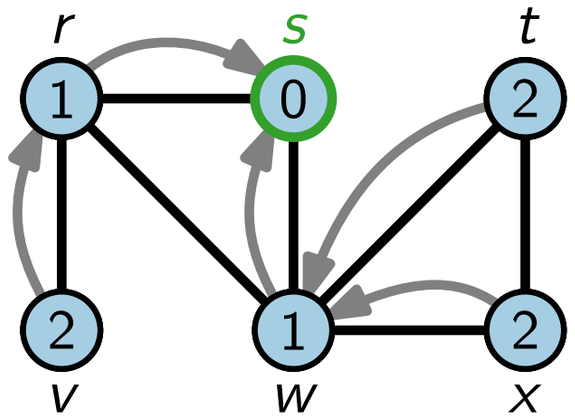
Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Laufzeit?

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

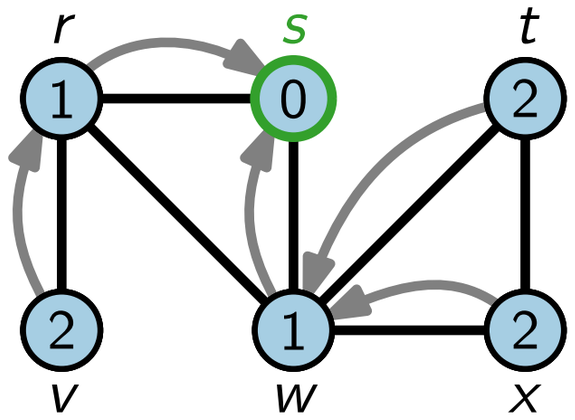
```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Initialize

Laufzeit?

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

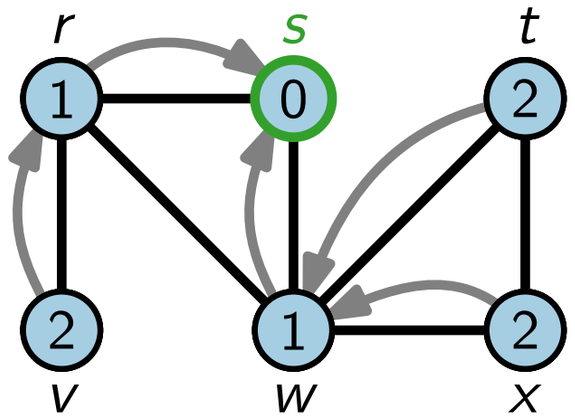
Laufzeit?

Initialize

$\mathcal{O}(|V|)$

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

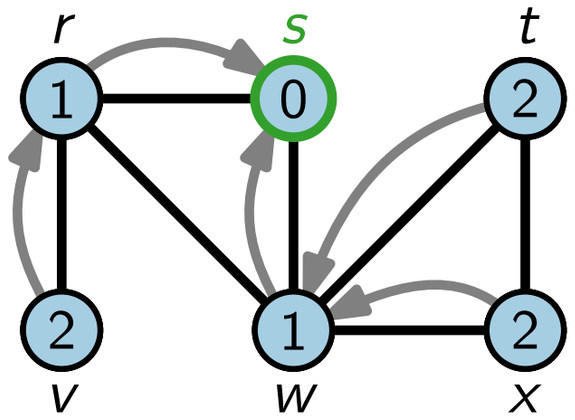
Laufzeit?

Initialize: $\mathcal{O}(|V|)$

En-/Dequeues

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

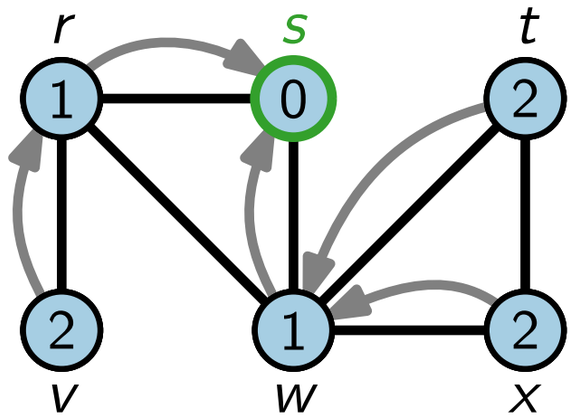
```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Laufzeit?

Initialize: $\mathcal{O}(|V|)$ + En-/Dequeues: $\mathcal{O}(|V|)$

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

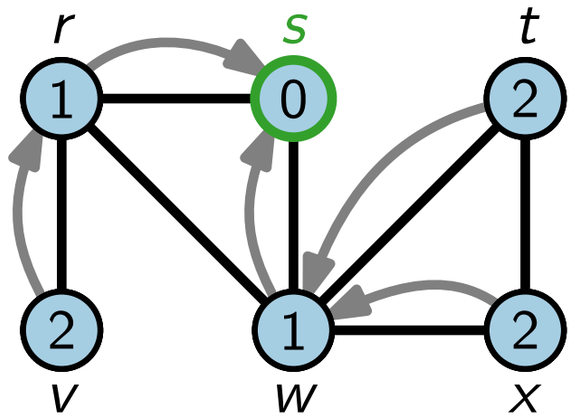
```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Laufzeit?

Initialize: $\mathcal{O}(|V|)$ + En-/Dequeues: $\mathcal{O}(|V|)$ + Adjazenzlisten (foreach-Schleifen)

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

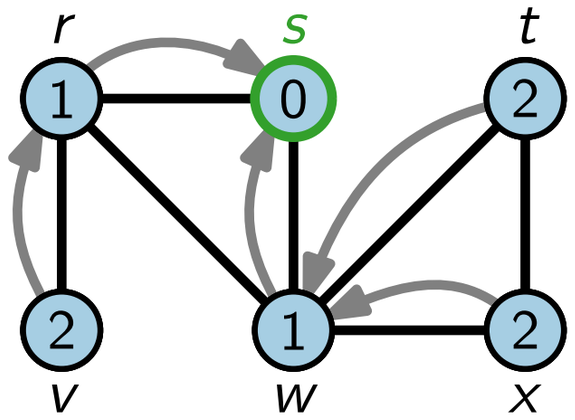
Laufzeit?

Initialize: $\mathcal{O}(|V|)$ + En-/Dequeues: $\mathcal{O}(|V|)$ + Adjazenzlisten (foreach-Schleifen): $\mathcal{O}(|E|)$

Beob. über Knotengrade!

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = red
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
        u.color = blue
```



Q:

```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil        Vorgänger
    s.color = red
    s.d = 0
```

Laufzeit?

$$\underbrace{\mathcal{O}(|V|)}_{\text{Initialize}} + \underbrace{\mathcal{O}(|V|)}_{\text{En-/Dequeues}} + \underbrace{\mathcal{O}(|E|)}_{\text{Adjazenzlisten (foreach-Schleifen)}} = \mathcal{O}(|V| + |E|)$$

Beob. über Knotengrade!

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

berechneter Abstand von s — **tatsächlicher** Abstand von s

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

berechneter Abstand von s — **tatsächlicher** Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: **berechneter** Abstand von s — $\delta(s, v)$: **tatsächlicher** Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: **berechneter** Abstand von s — $\delta(s, v)$: **tatsächlicher** Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis.

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: berechneter Abstand von s — $\delta(s, v)$: tatsächlicher Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

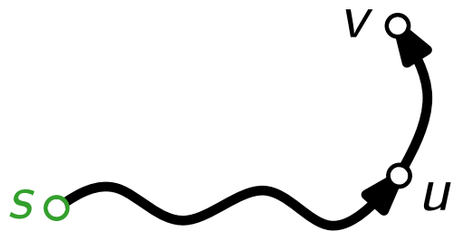
$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: **berechneter** Abstand von s — $\delta(s, v)$: **tatsächlicher** Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

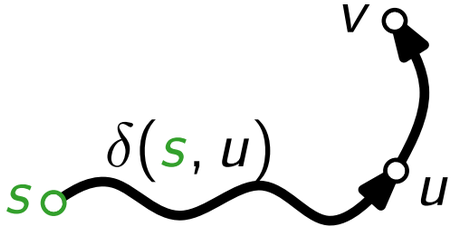
$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: berechneter Abstand von s — $\delta(s, v)$: tatsächlicher Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

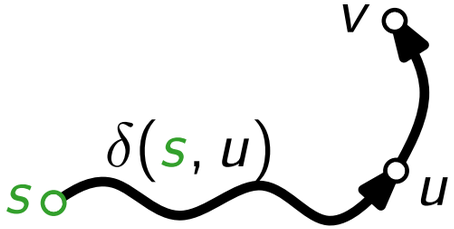
$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: **berechneter** Abstand von s — $\delta(s, v)$: **tatsächlicher** Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Dieser s-v-Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

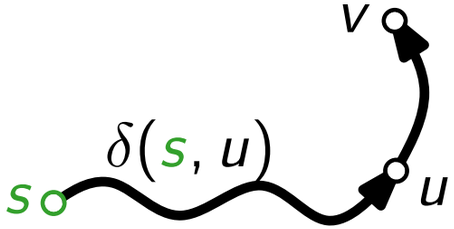
$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: **berechneter** Abstand von s — $\delta(s, v)$: **tatsächlicher** Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Dieser s-v-Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.

$\Downarrow$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

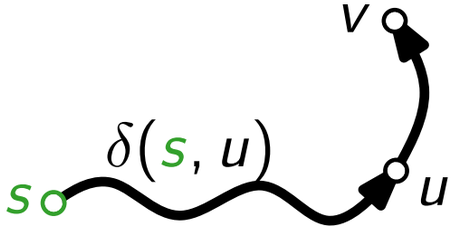
$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: berechneter Abstand von s — $\delta(s, v)$: tatsächlicher Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Dieser s-v-Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.

$\Downarrow$

Kürzester s-v-Weg hat Länge $\leq \delta(s, u) + 1$.

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: berechneter Abstand von s — $\delta(s, v)$: tatsächlicher Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 2. Fall: u ist **nicht** von s erreichbar (d.h. $\nexists$ s-u-Weg)

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: berechneter Abstand von s — $\delta(s, v)$: tatsächlicher Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 2. Fall: u ist **nicht** von s erreichbar (d.h. $\nexists$ s-u-Weg)

$\Rightarrow \delta(s, u) = \infty$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

$v.d$: berechneter Abstand von s — $\delta(s, v)$: tatsächlicher Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 2. Fall: u ist **nicht** von s erreichbar (d.h. $\nexists$ s-u-Weg)

$\Rightarrow \delta(s, u) = \infty$
$\Rightarrow \delta(s, v) \leq \infty + 1$ ✓

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

✓

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$:

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s):

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

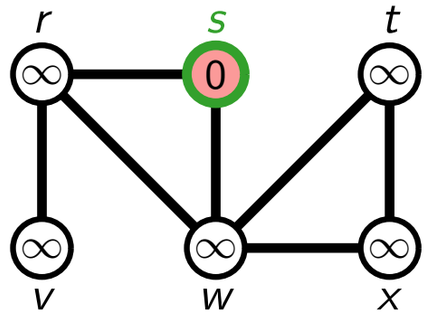
✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von Enqueue-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s):



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

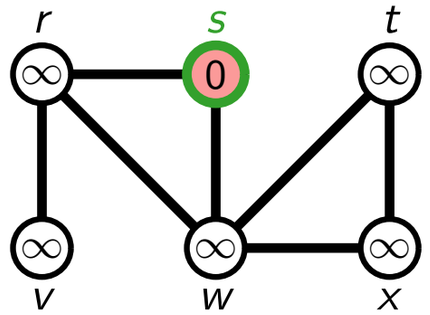
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von Enqueue-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s):

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

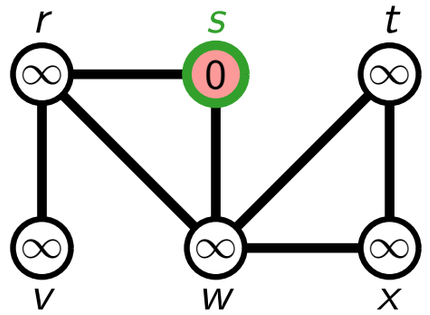
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s):

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty$



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

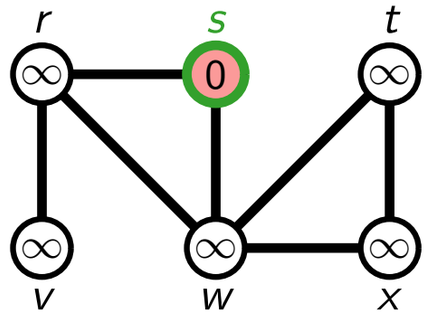
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s):

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

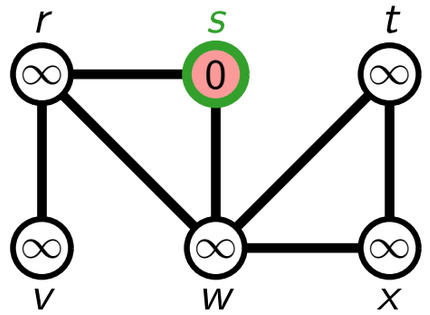
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

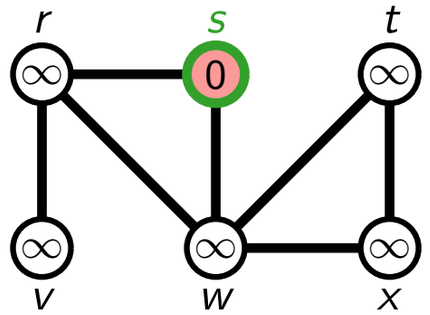
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

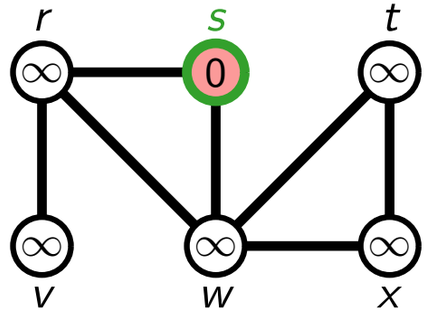
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

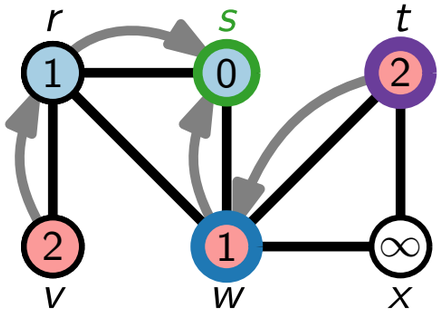
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

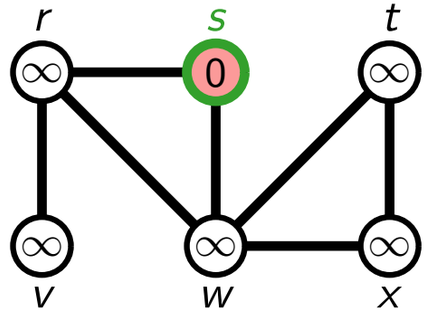
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

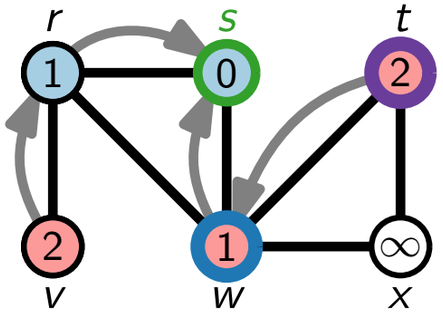
$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

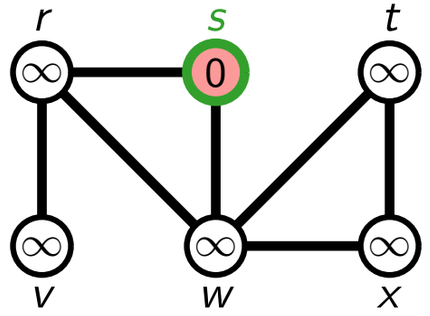
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
    u = Q.DEQUEUE()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.ENQUEUE(v)
    u.color = blue
```

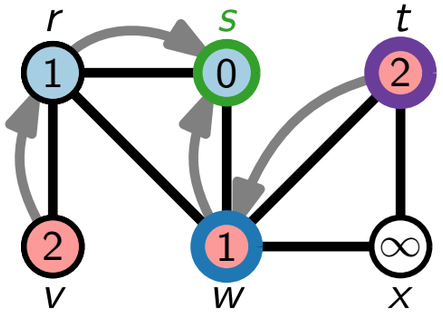
$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.
$v.d = u.d + 1$



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

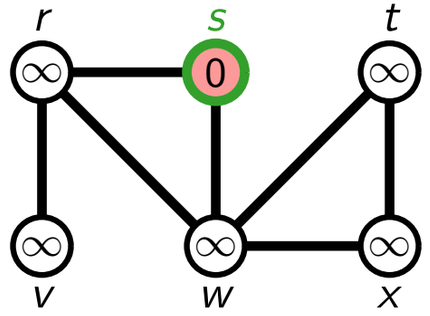
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

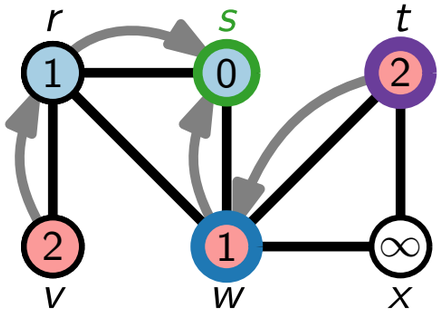
$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.
$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1$



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

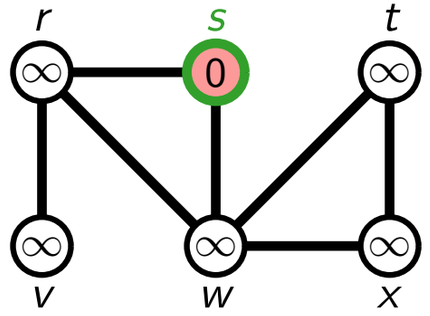
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

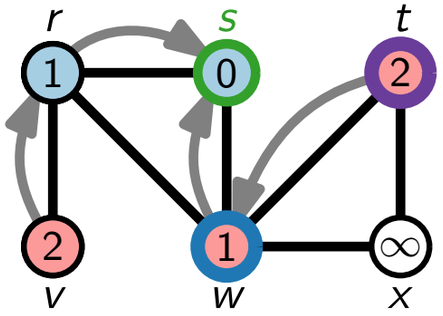


$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1$

Induktionsannahme für u



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

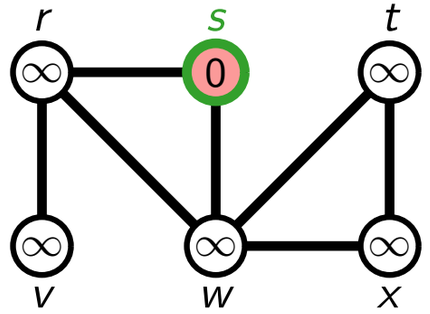
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



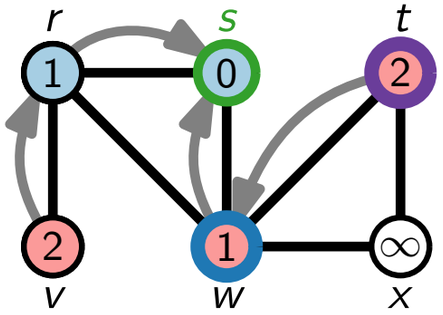
$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1$

Induktionsannahme für u

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. ENQUEUE-Oper. $< k$)



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

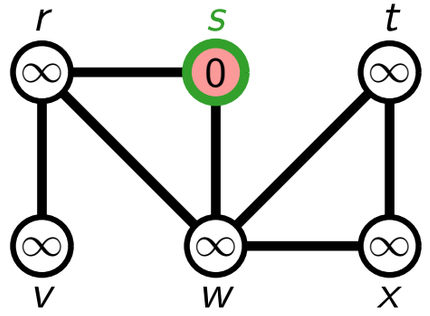
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



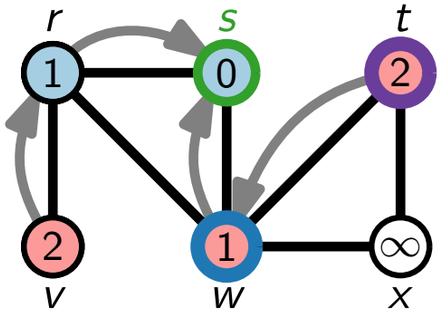
$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$

Induktionsannahme für u

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. ENQUEUE-Oper. $< k$)



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

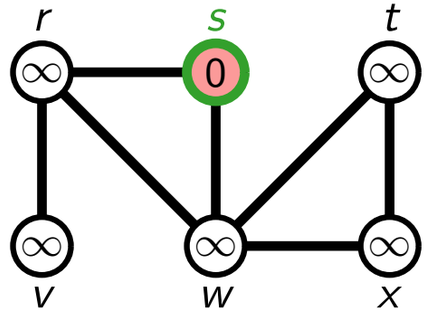
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



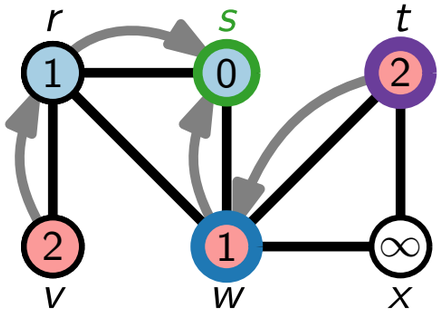
$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u — Lemma 1

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. ENQUEUE-Oper. $< k$)



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

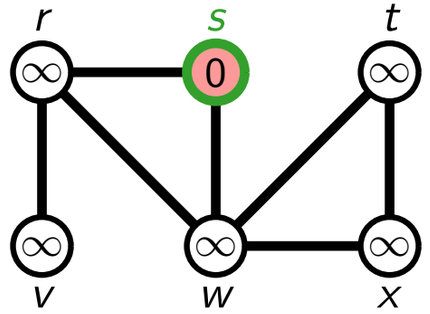
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

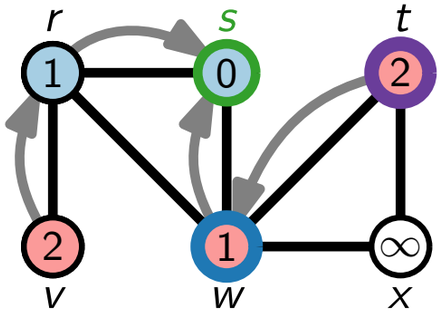
v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u — Lemma 1

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. ENQUEUE-Oper. $< k$)

Jetzt ist v rot.



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

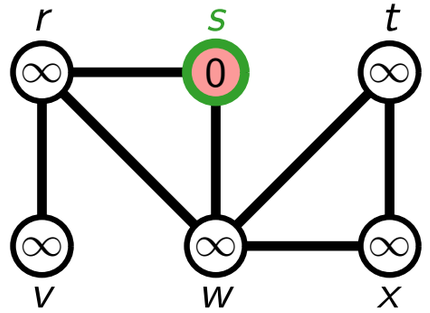
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

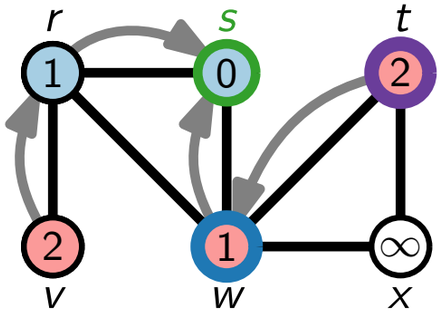
v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u — Lemma 1

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. ENQUEUE-Oper. $< k$)

Jetzt ist v rot. $\Rightarrow$ $v.d$ ändert sich nicht mehr.



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

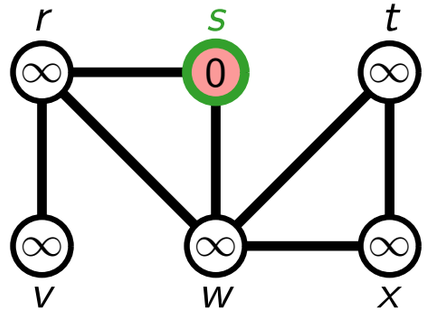
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v):

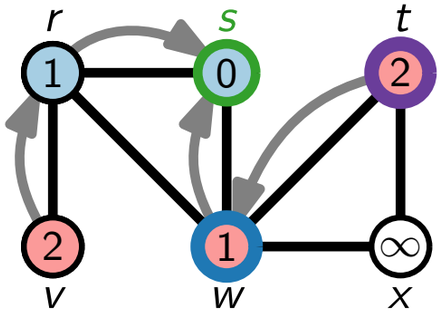
v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$

Induktionsannahme für u — Lemma 1

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. ENQUEUE-Oper. $< k$)

Jetzt ist v rot. $\Rightarrow$ $v.d$ ändert sich nicht mehr.



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

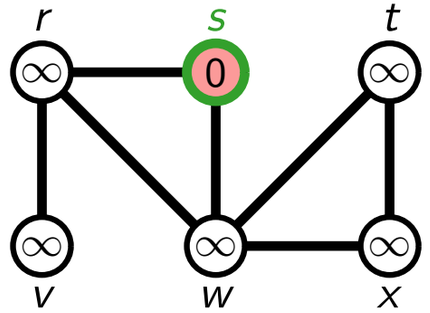
Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von ENQUEUE-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() do
      u = Q.DEQUEUE()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.ENQUEUE(v)
      u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$



$k > 1$: Situation nach Q.ENQUEUE(v): ✓

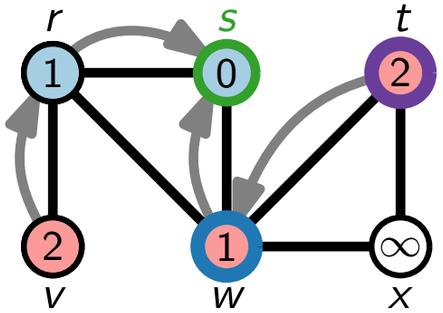
v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$

Induktionsannahme für u — Lemma 1

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. ENQUEUE-Oper. $< k$)

Jetzt ist v rot. $\Rightarrow$ $v.d$ ändert sich nicht mehr. □



Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

✓

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:

(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und

(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:

(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und

(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Also d-Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:
(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und
(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Also d-Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korollar. Angenommen u wird früher als v in Q eingefügt,
dann gilt $u.d \leq v.d$, wenn v in Q eingefügt wird.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:
(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und
(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Also d-Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korollar. Angenommen u wird früher als v in Q eingefügt, dann gilt $u.d \leq v.d$, wenn v in Q eingefügt wird.

Beweis. Folgt aus Lemma 3 und der Tatsache, dass jeder Knoten $\leq 1\times$ einen endlichen d-Wert bekommt.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G.
Nach BFS(G, s) gilt:

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G.
Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G.
Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii).

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Lemma 2 $\Rightarrow v.d \geq \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Lemma 2 $\Rightarrow$ $v.d \geq \delta(s, v)$. Noch z.z.: $v.d \leq \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

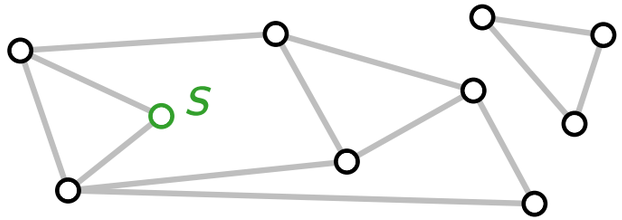
Lemma 2 $\Rightarrow v.d \geq \delta(s, v)$. Noch z.z.: $v.d \leq \delta(s, v)$.

Widerspruchsbeweis mit Wahl des „kleinsten Schurken“.

Siehe Kapitel 22.2 [CLRS].

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:



BFS-Bäume

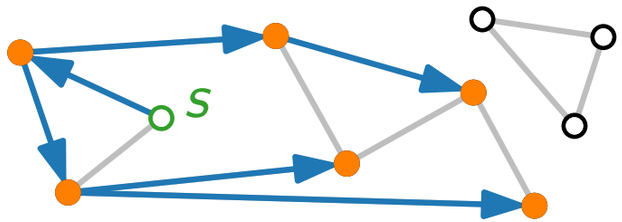
Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

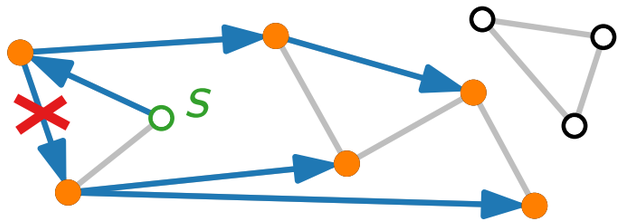
- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

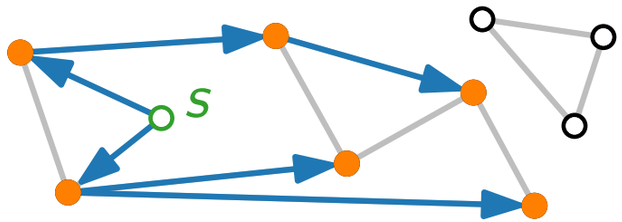
- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

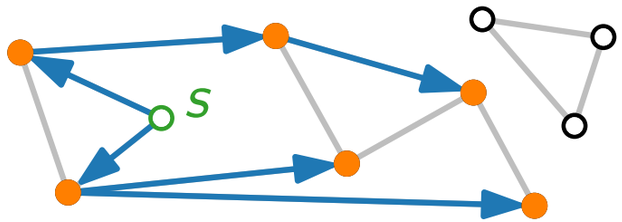
- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$

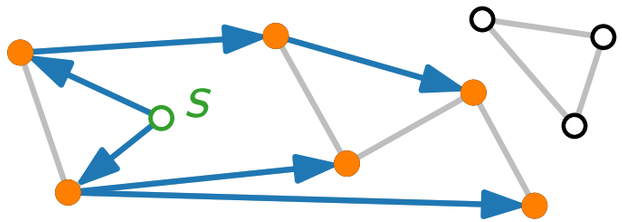


Klar: G_π ist ein Baum

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$

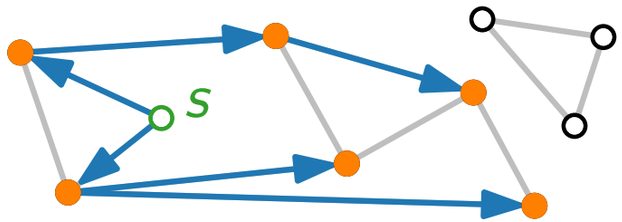


Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



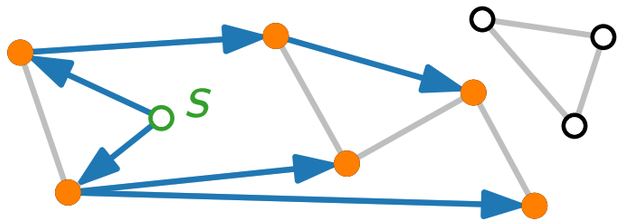
Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Behauptung: G_π ist ein **Kürzeste-Wege-Baum** (oder **BFS-Baum**), d.h.

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

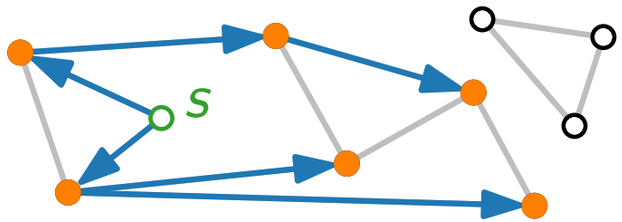
Behauptung: G_π ist ein **Kürzeste-Wege-Baum** (oder **BFS-Baum**), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

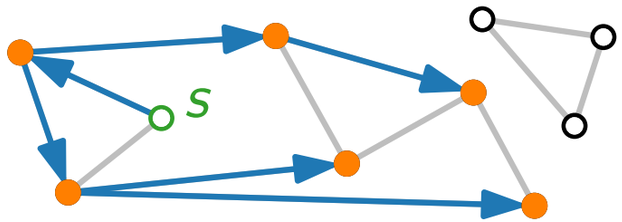
Behauptung: G_π ist ein **Kürzeste-Wege-Baum** (oder **BFS-Baum**), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

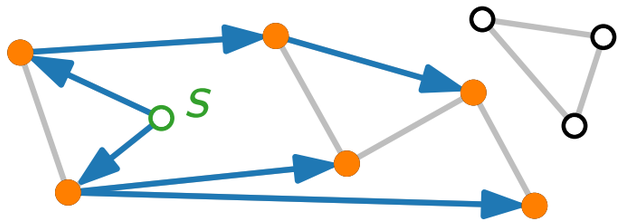
Behauptung: G_π ist ein **Kürzeste-Wege-Baum** (oder **BFS-Baum**), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Behauptung: G_π ist ein **Kürzeste-Wege-Baum** (oder **BFS-Baum**), d.h.

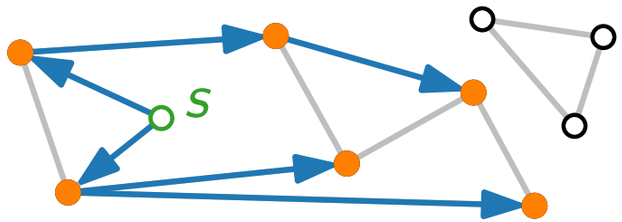
- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis:

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Behauptung: G_π ist ein **Kürzeste-Wege-Baum** (oder **BFS-Baum**), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis: Folgt aus (ii) und (iii) im Hauptsatz. □