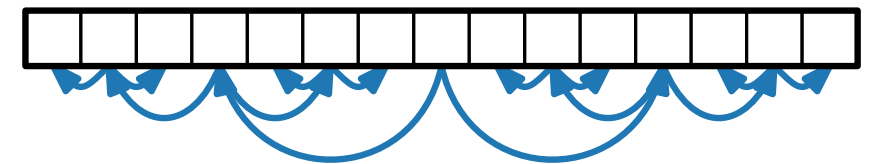
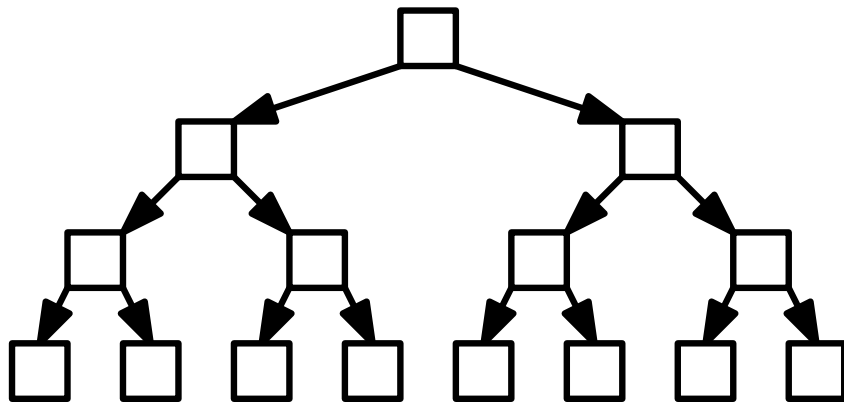


Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 13: Binäre Suchbäume



Zwischentest II: 11.12.2025, 8:15–10:00

- Zufallsexperimente, (Indikator-) Zufallsvariable, Erwartungswert
- (Randomisiertes) QuickSort
- Untere Schranke für WC-Laufzeit von vergleichsbasierten Sortierverfahren
- Linearzeit-Sortierverfahren
- Auswahlproblem (Median): randomisiert & deterministisch
- Elementare Datenstrukturen
- Hashing
- Binäre Suchbäume (Rot-Schwarz-Bäume noch nicht)

Dynamische Menge



Abstrakter Datentyp: Dynamische Menge

verwaltet Elemente einer Menge M , wobei jedes Element $x \in M$ aus einem Schlüssel $x.key$ und einem Wert $x.value$ besteht.

Beliebiges Objekt

Operation

ptr INSERT(key k , value v)
DELETE(ptr x)

ptr SEARCH(key k)

Wörter-
buch

ptr MINIMUM()

ptr MAXIMUM()

ptr PREDECESSOR(ptr x)

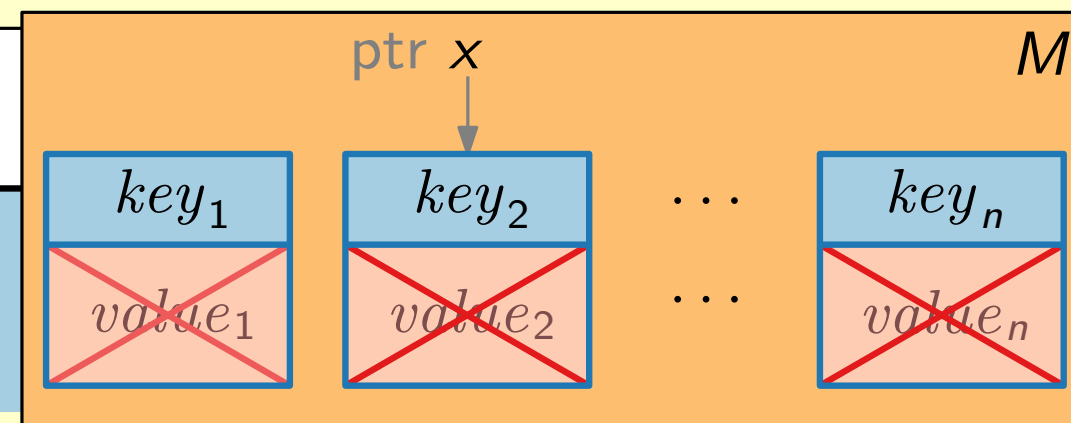
ptr SUCCESSOR(ptr x)

Pointer

Funktionalität

Veränderungen

Anfragen

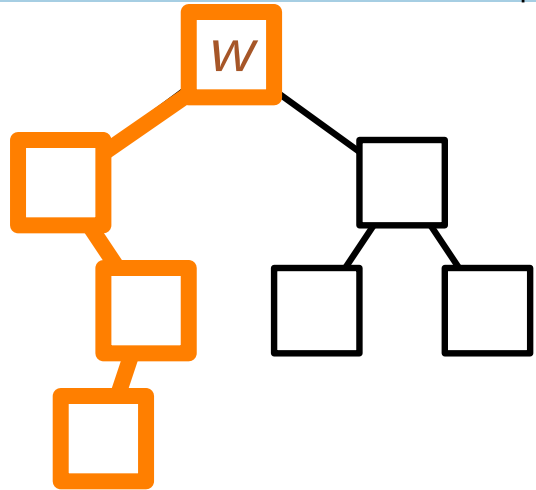


Vereinfachung

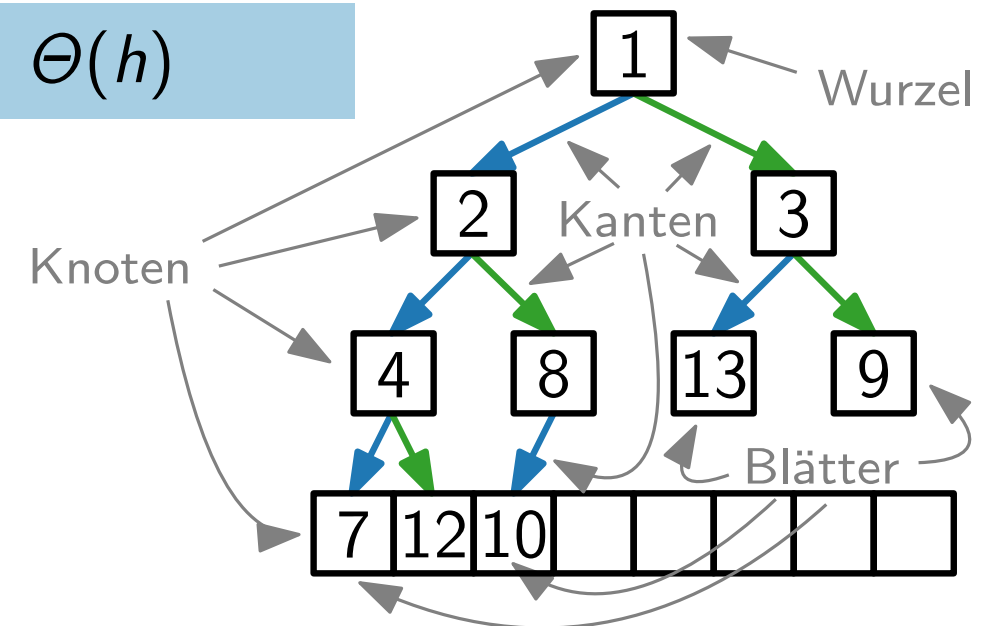
Implementierung

	SEARCH	INS/DEL	MIN/MAX	PRED/SUCC
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
sortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
sortiertes Feld	?	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
MINHEAP	—	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)/-$	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$

* unter bestimmten Annahmen.



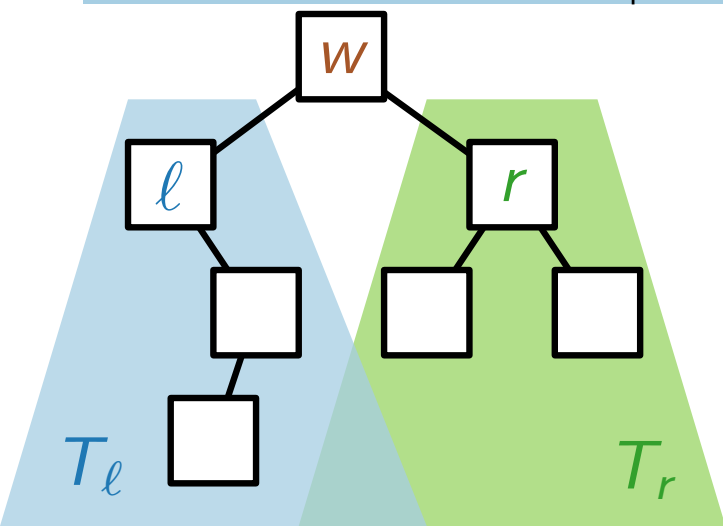
$h(T)$ = Höhe des Baums T
 = Anz. Kanten auf längstem
 Wurzel-Blatt-Pfad



Implementierung

	SEARCH	INS/DEL	MIN/MAX	PRED/SUCC
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
sortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
sortiertes Feld	?	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
MINHEAP	—	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)/—$	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$

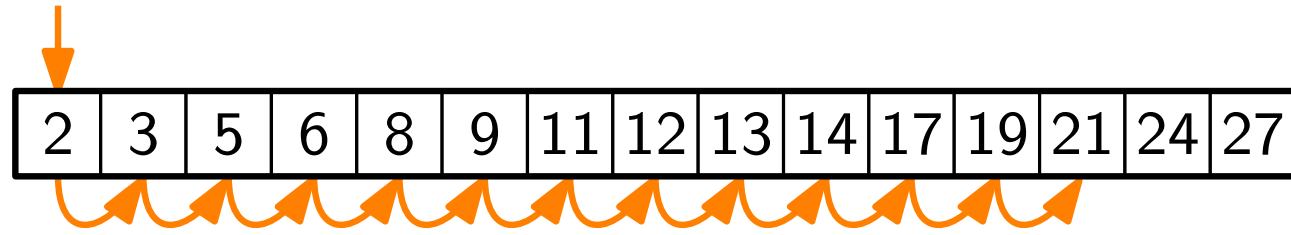
* unter bestimmten Annahmen.



$h(T)$ = Höhe des Baums T
 = Anz. Kanten auf längstem
 Wurzel-Blatt-Pfad

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls Baum = Blatt} \\ 1 + \max\{h(T_\ell), h(T_r)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

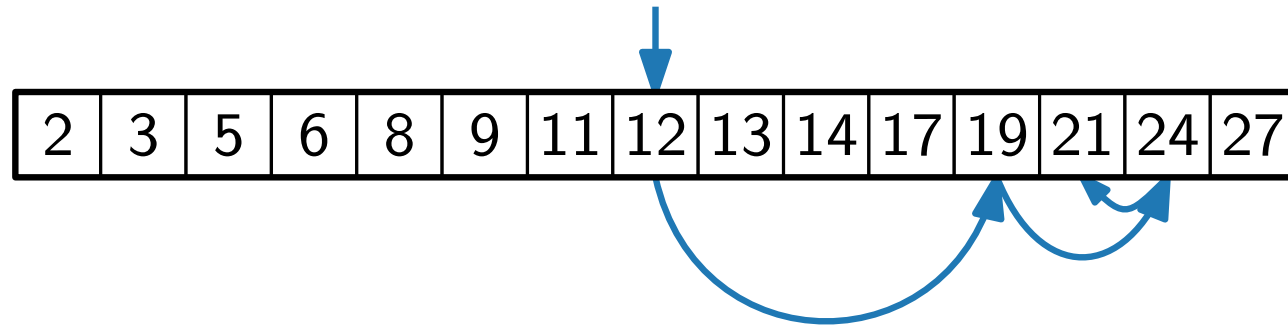
Suche im sortierten Feld



SEARCH(21)

Lineare Suche: hier 13 im Worst Case n Schritte

Suche im sortierten Feld



SEARCH(21)

	hier	im Worst Case	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte

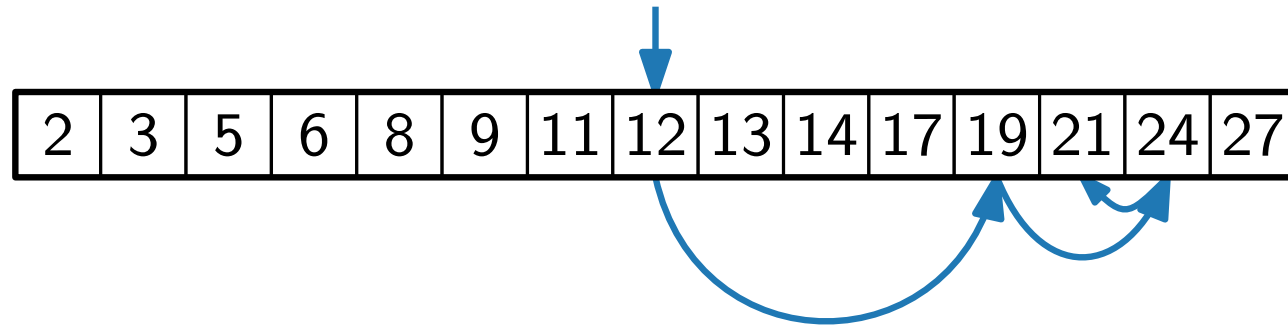
Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$$\begin{aligned}
 &\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor} \\
 &= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n+1) \rceil
 \end{aligned}$$

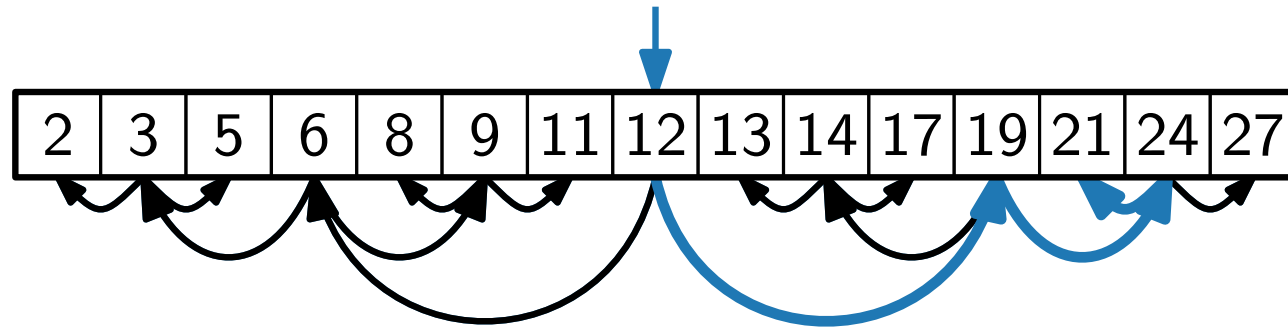
Suche im sortierten Feld



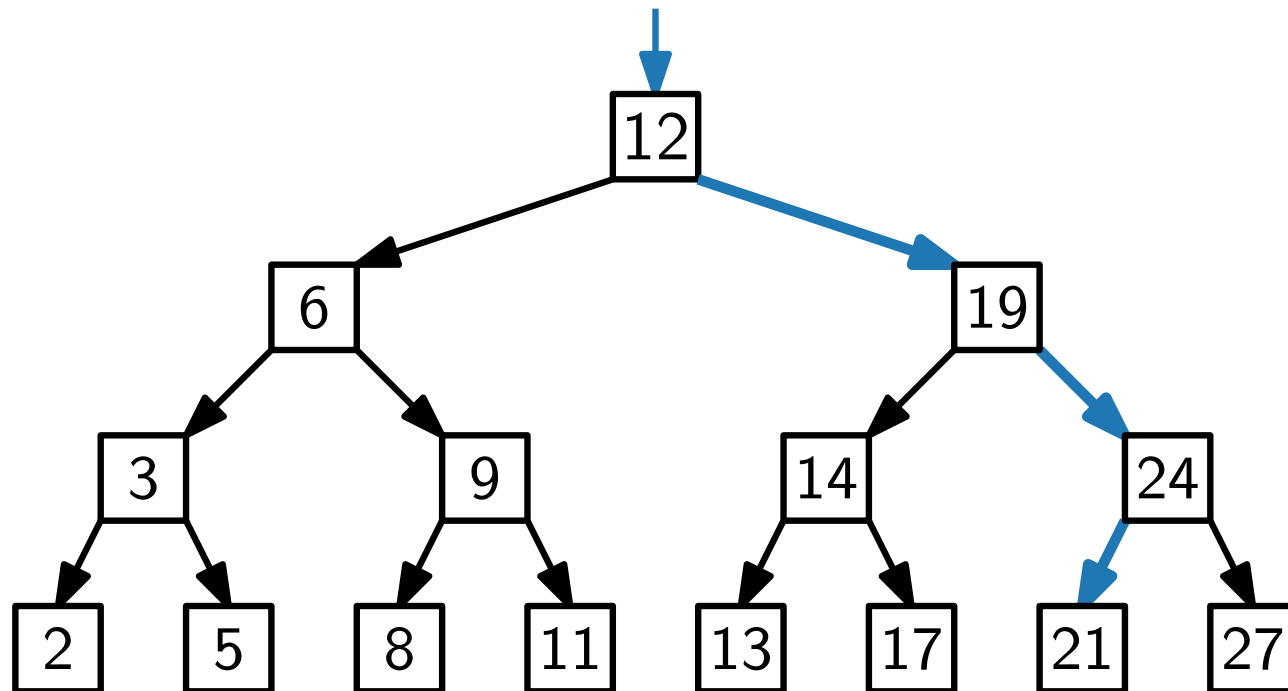
SEARCH(21)

	hier	im Worst Case		≈ 1 Mio.
Lineare Suche:	13	n	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte	20

Suche im sortierten Feld



SEARCH(21)



Jeder Knoten hat höchstens zwei Kinder.

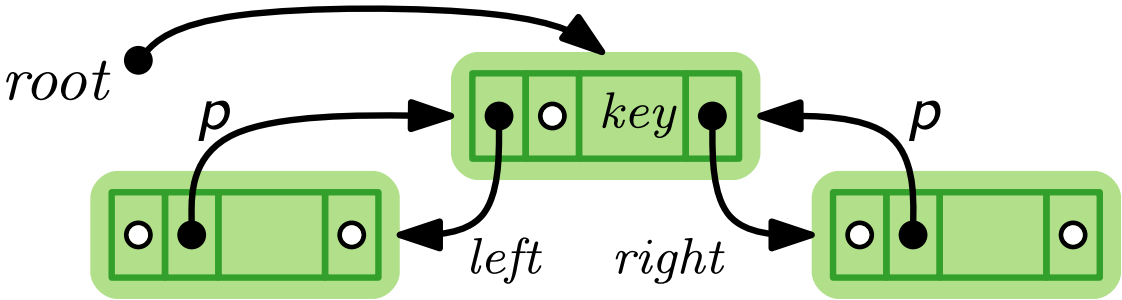
**Binärer
Suchbaum**

zusammenhängender
kreisfreier Graph
(mehr dazu in 2 Wochen)

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft.

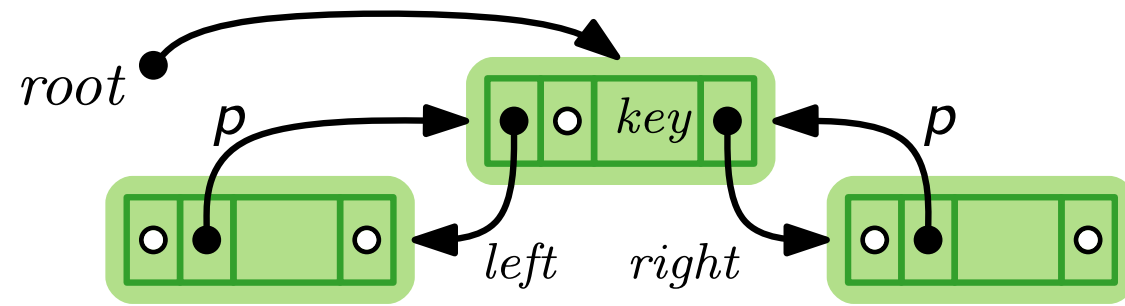
Für jeden Knoten v gilt:
alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$
rechten $\geq$

Binärer Suchbaum



Operation	Implementierung
BINSEARCHTREE()	$root = nil$ NODE(key k, NODE par) $key = k$ $p = par$ $right = left = nil$ NODE:
Node SEARCH(key k) Node INSERT(key k) DELETE(Node x) Node MINIMUM() Node MAXIMUM() Node PREDECESSOR(Node x) Node SUCCESSOR(Node x)	TODO

Inorder-Traversierung



(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung:

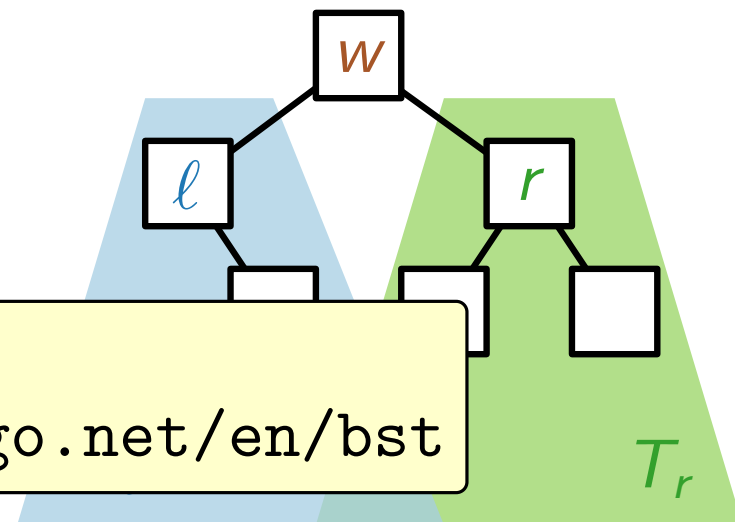
1. Durchlaufe rekursiv **linken Teilbaum** der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der **Wurzel** aus.
3. Durchlaufe rekursiv **rechten Teilbaum** der Wurzel.

Code:

```
INORDERTREEWALK(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    INORDERTREEWALK(x.left)
    gib x.key aus
    INORDERTREEWALK(x.right)
```

Demo.

<https://visualgo.net/en/bst>



Korrektheit

Zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Reihenfolge ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h .

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Induktionshypothese sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} linker und rechter Teilbaum der Wurzel.

T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. rekursive Def. der Höhe

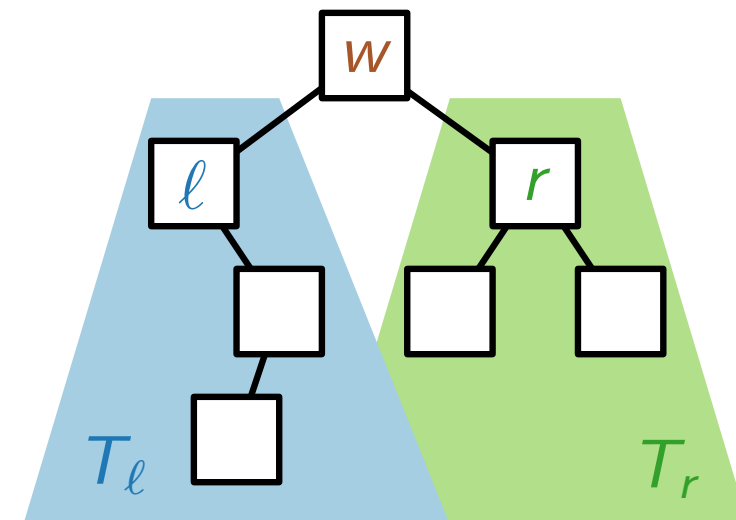
Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft $\Rightarrow$

Ausgabe (sortierte Schlüssel von T_{links} , dann $root.key$, dann sortierte Schlüssel von T_{rechts}) ist sortiert. ✓

Code:

```
INORDERTREEWALK(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    INORDERTREEWALK( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    INORDERTREEWALK( $x.right$ )
```



Laufzeit

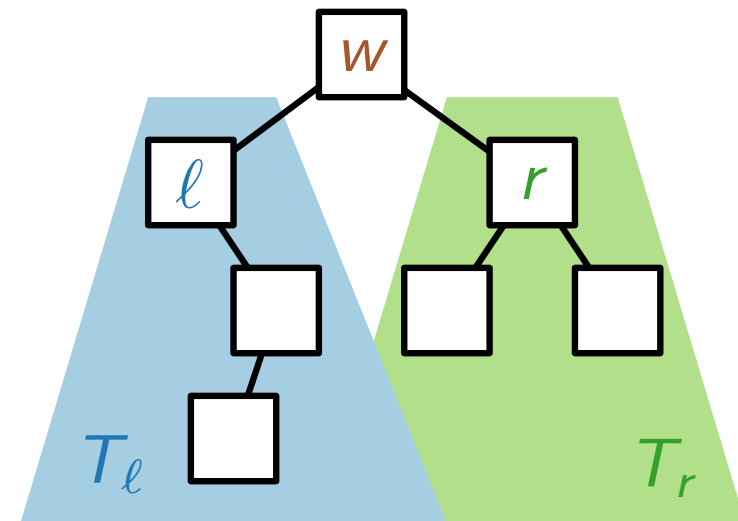
Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - 1$

Code:

```
INORDERTREEWALK(Node  $x = \text{root}$ )
  if  $x \neq \text{nil}$  then
    INORDERTREEWALK( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    INORDERTREEWALK( $x.\text{right}$ )
```



Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - 1$

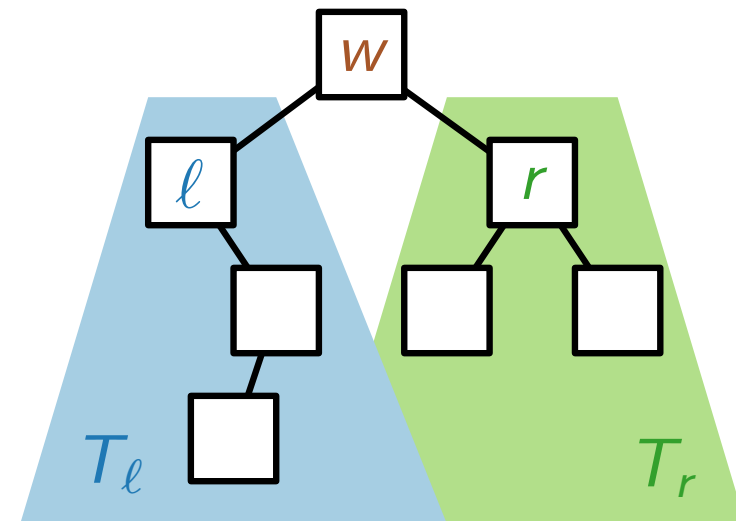
oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt INORDERTREEWALK eine konstante Anzahl von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\# \text{Kanten} = \# \text{Knoten} - 1 = n - 1$

Beweis durch
Induktion

Code:

```
INORDERTREEWALK(Node  $x = \text{root}$ )
  if  $x \neq \text{nil}$  then
    INORDERTREEWALK( $x.\text{left}$ )
    gib  $x.\text{key}$  aus
    INORDERTREEWALK( $x.\text{right}$ )
```



Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - 1$

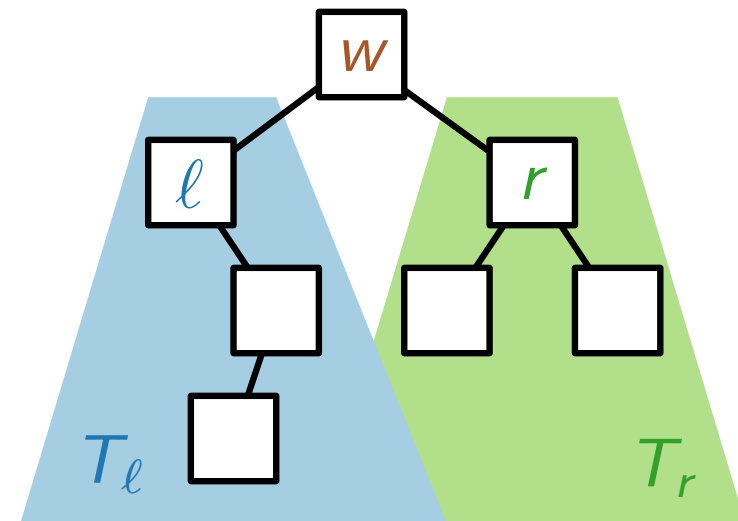
oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt INORDERTREEWALK eine konstante Anzahl von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\# \text{Kanten} = \# \text{Knoten} - 1 = n - 1$

$\Rightarrow T(n) = c_1 \cdot (n - 1) + c_2 \cdot n \in \mathcal{O}(n)$.

Code:

```
INORDERTREEWALK(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    INORDERTREEWALK(x.left)
    gib x.key aus
    INORDERTREEWALK(x.right)
```



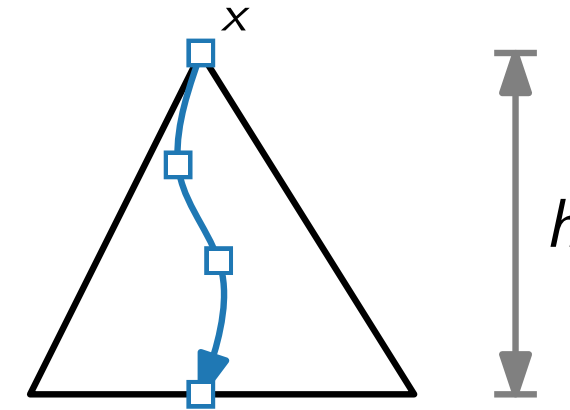
Suche

rekursiv

```
Node SEARCH(key  $k$ , Node  $x = root$ )
  if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then
    return  $x$ 
  if  $k < x.key$  then
    return SEARCH( $k$ ,  $x.left$ )
  else return SEARCH( $k$ ,  $x.right$ )
```

iterativ

```
while  $x \neq nil$  and  $x.key \neq k$  do
  if  $k < x.key$  then
     $x = x.left$ 
  else  $x = x.right$ 
return  $x$ 
```



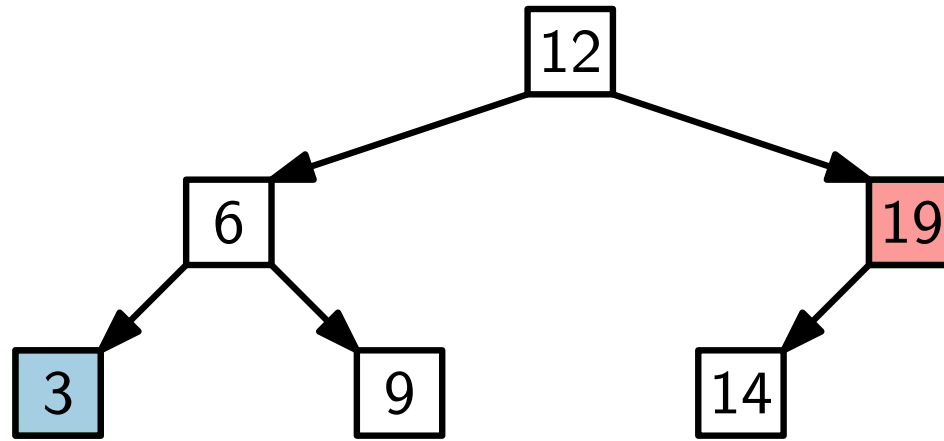
Laufzeit: $\mathcal{O}(h)$

Laufzeit: $\mathcal{O}(h)$

Trotzdem schneller, da keine Verwaltung der rekursiven Methodenaufrufe.

Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



Antwort: Min steht ganz links, Max ganz rechts!

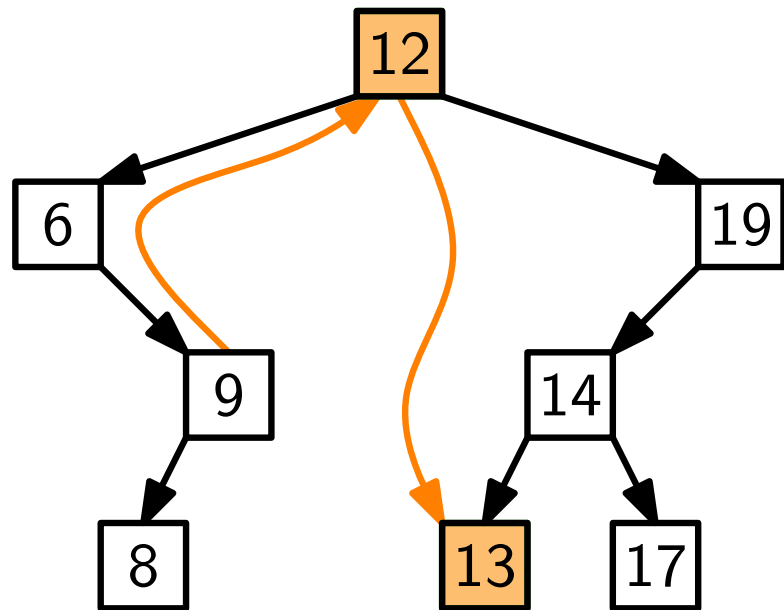
iterativ

```
Node MINIMUM(Node x = root)
  if x == nil then return nil
  while x.left ≠ nil do
    x = x.left
  return x
```

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: $\text{NACHFOLGER}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Nachfolger(19) = *nil*

Nachfolger(12) = 13 = MINIMUM(12.right)

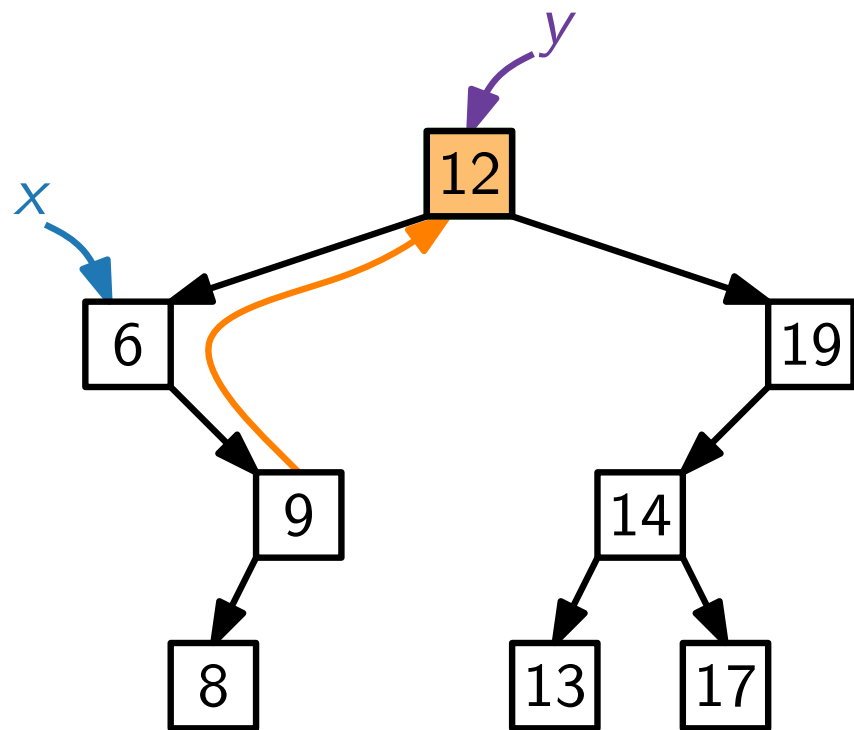
Nachfolger(9) = ?

9 hat kein rechtes Kind; 9 = MAXIMUM(12.left)

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: $\text{NACHFOLGER}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Tipp: Probieren Sie auch
z.B. $\text{SUCCESSOR}(19)$!

NODE SUCCESSOR(NODE x)

```

if  $x.\text{right} \neq \text{nil}$  then
  | return MINIMUM( $x.\text{right}$ )
 $y = x.p$ 
while  $y \neq \text{nil}$  and  $x == y.\text{right}$  do
  |  $x = y$ 
  |  $y = y.p$ 
return  $y$ 
  
```

Einfügen

Node INSERT(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

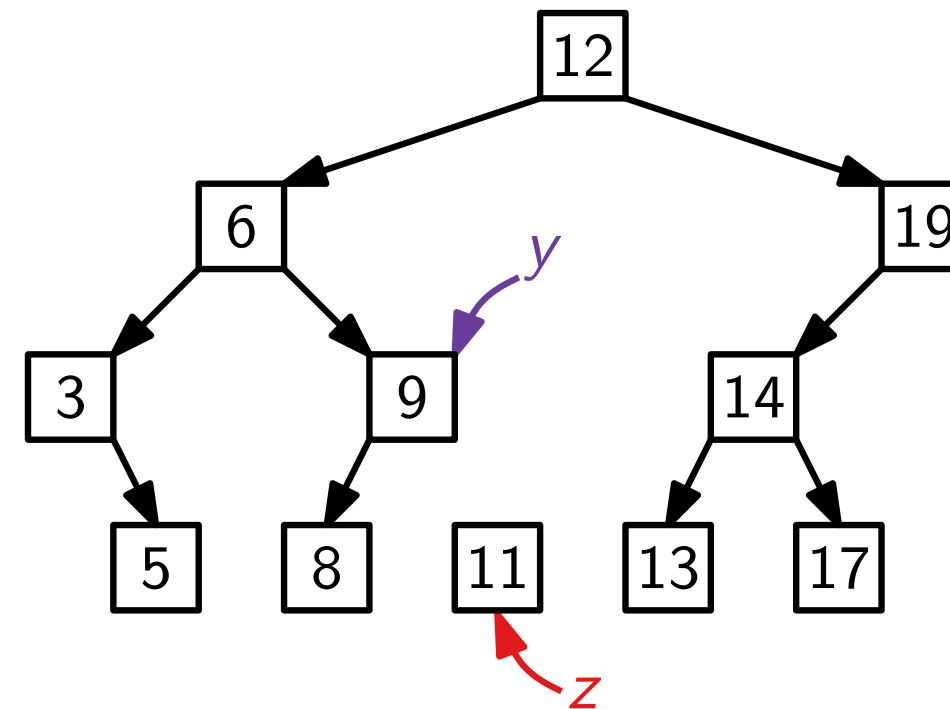
$y = x$

if $k < x.key$ **then**

$x = x.left$

else $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$



INSERT(11)

$x == nil$

Einfügen

Node INSERT(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

$y = x$

if $k < x.key$ **then**

$x = x.left$

else $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$

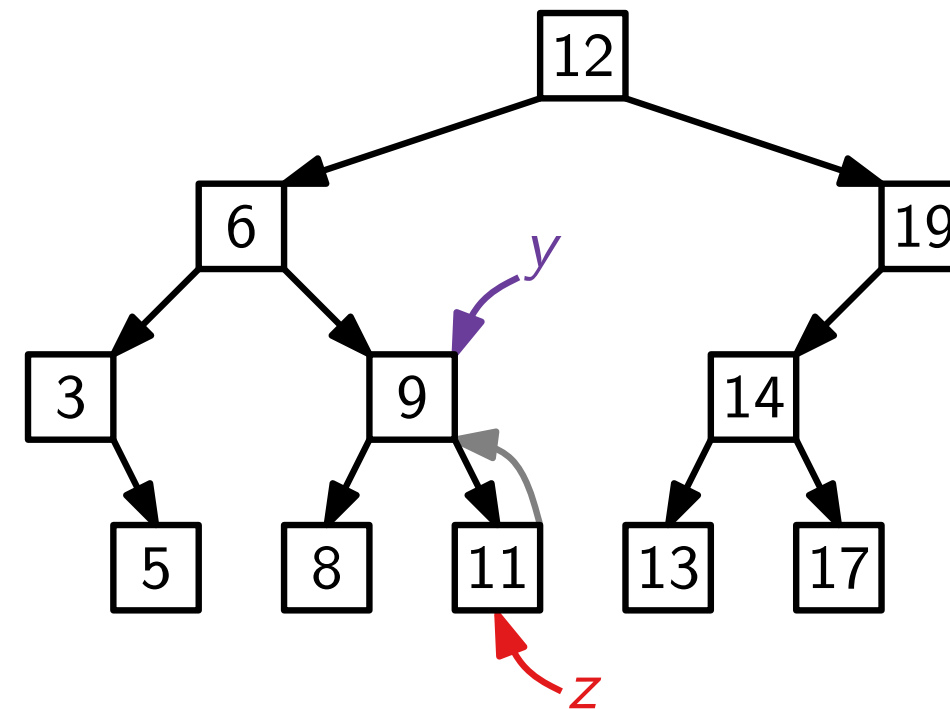
if $y == nil$ **then** $root = z$

else

if $k < y.key$ **then** $y.left = z$

else $y.right = z$

return z



INSERT(11)

$x == nil$

Löschen

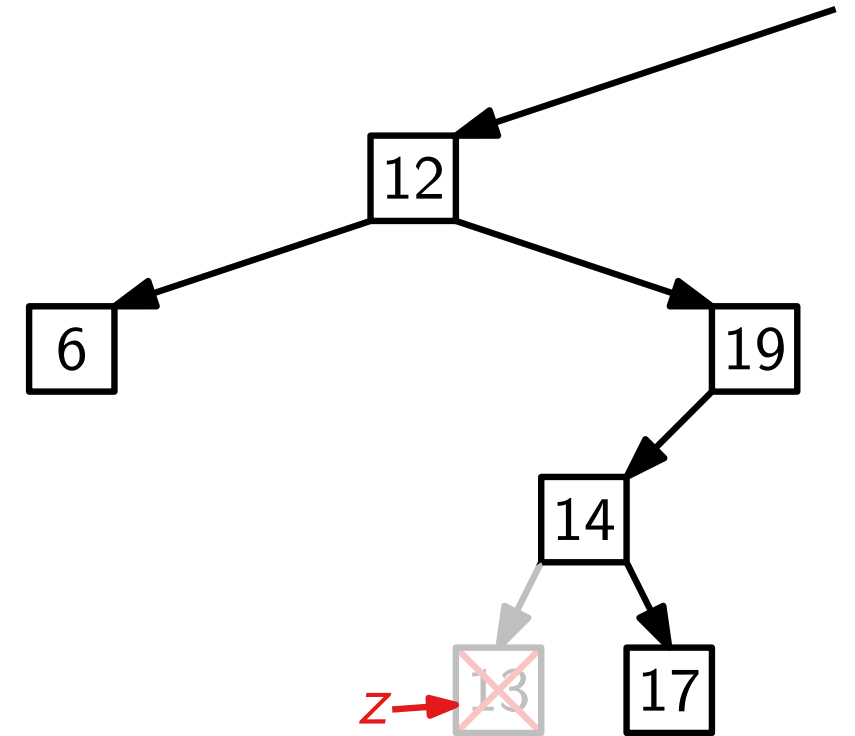
Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z .

2. z hat ein Kind x .

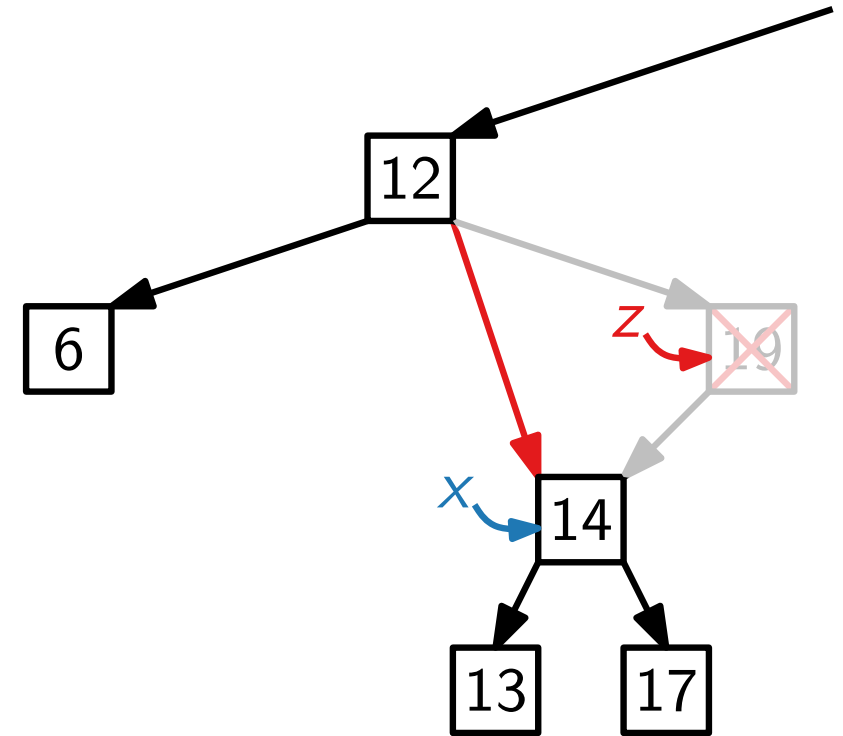
3. z hat zwei Kinder.



1. z hat keine Kinder.

2. z hat ein Kind x .

3. z hat zwei Kinder.



Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

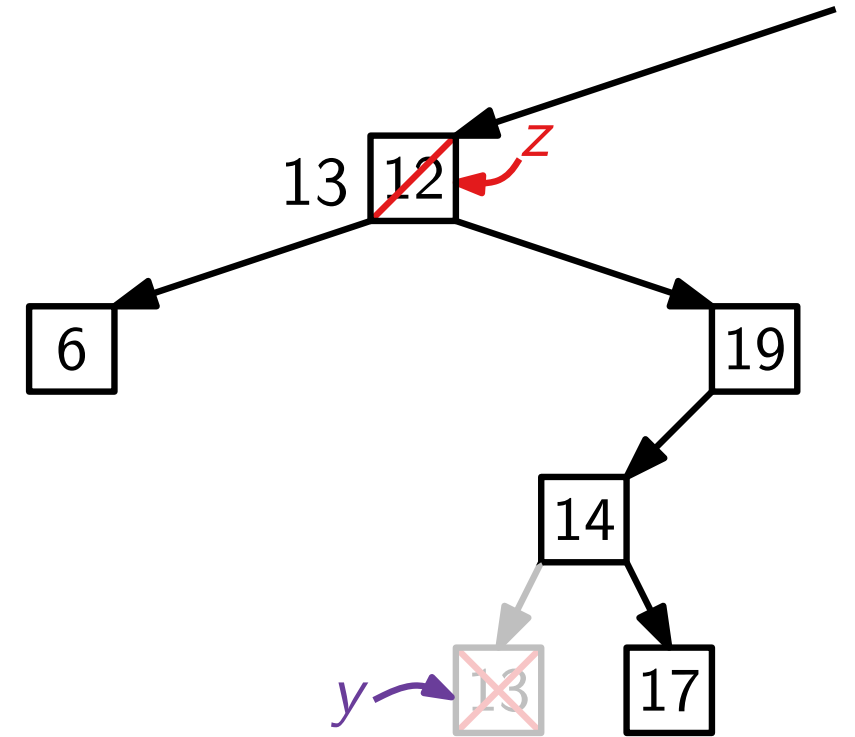
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z .

2. z hat ein Kind x .

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x .
Setze $x.p = z.p$. Lösche z .

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y = \text{SUCCESSOR}(z)$ und $z.key = y.key$. Lösche y . (Fall 1 oder 2!)



Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume **balancieren** $\Rightarrow h \in \mathcal{O}(\log n)$

