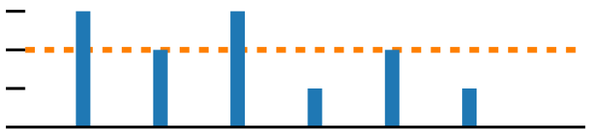
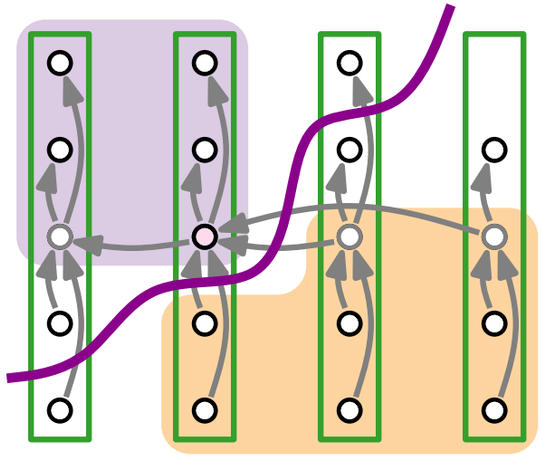
Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 10:
Das Auswahlproblem





Alexander Wolff

Wintersemester 2024

Analyse von Messreihen

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$
Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

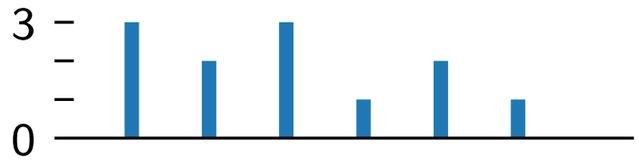
Beispiel.

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

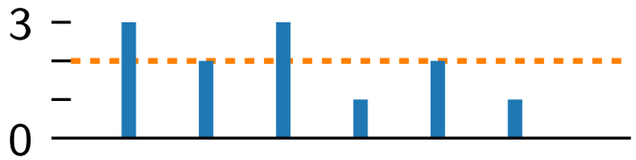


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

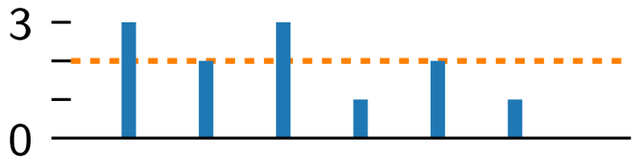


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.



arithmetisches Mittel

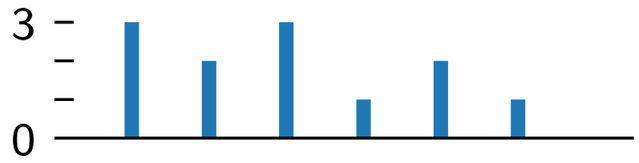
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A[i]$$

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.



arithmetisches Mittel

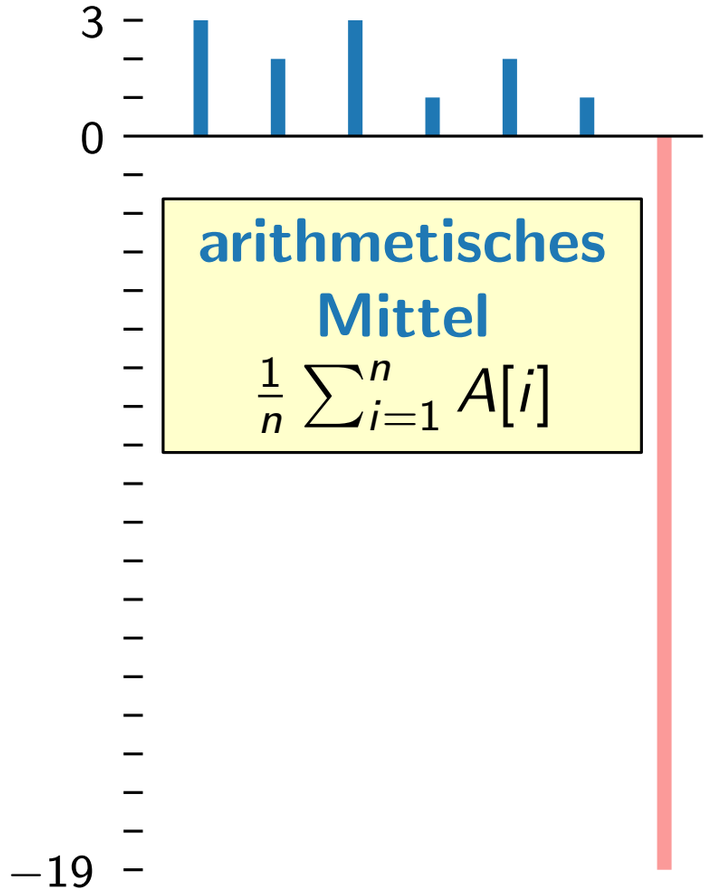
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A[i]$$

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

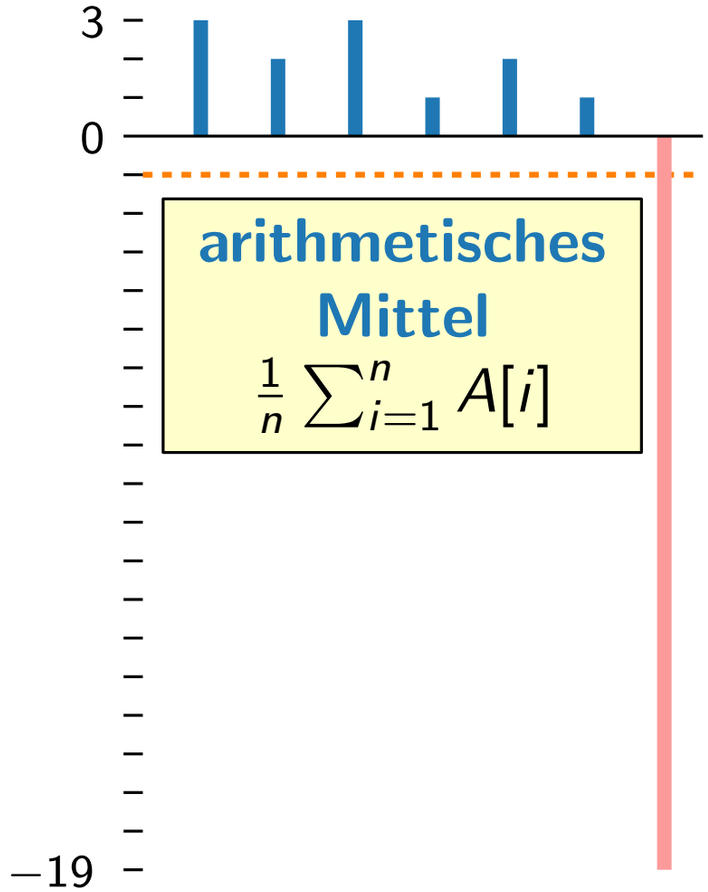


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

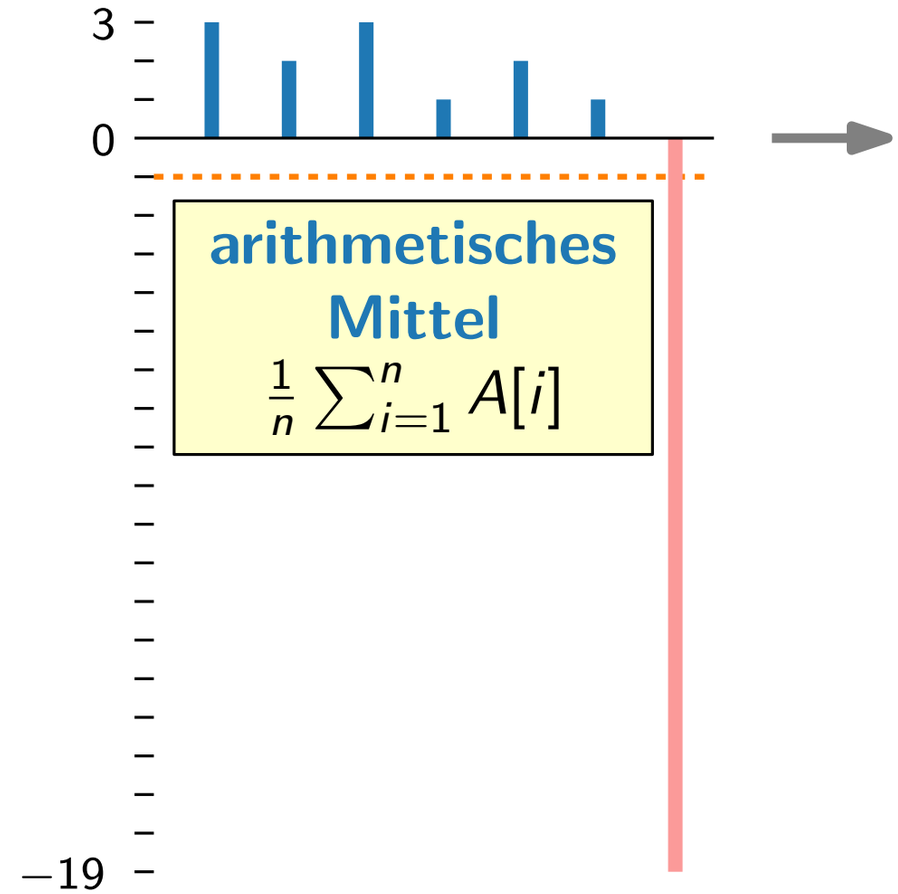


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

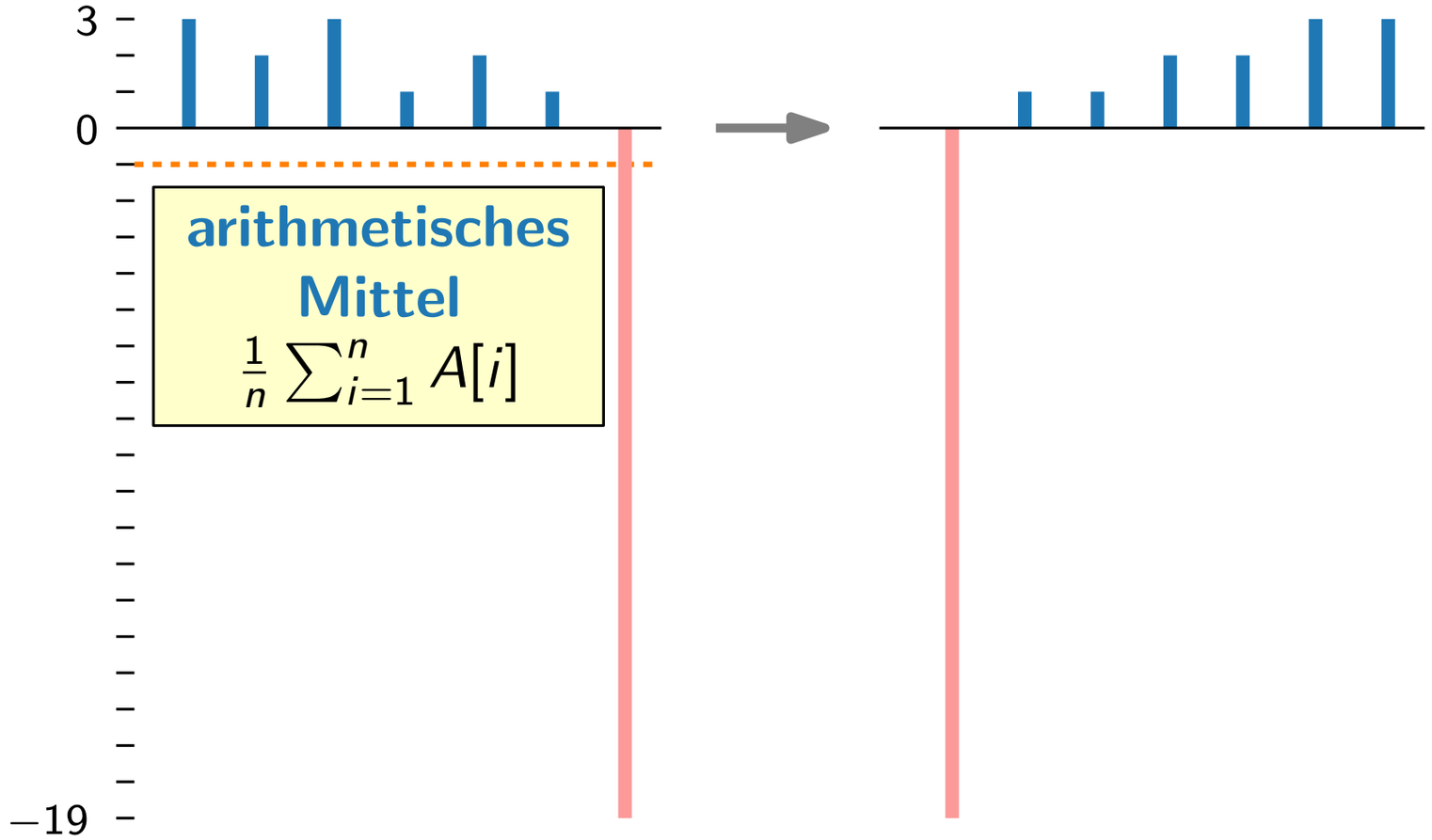


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

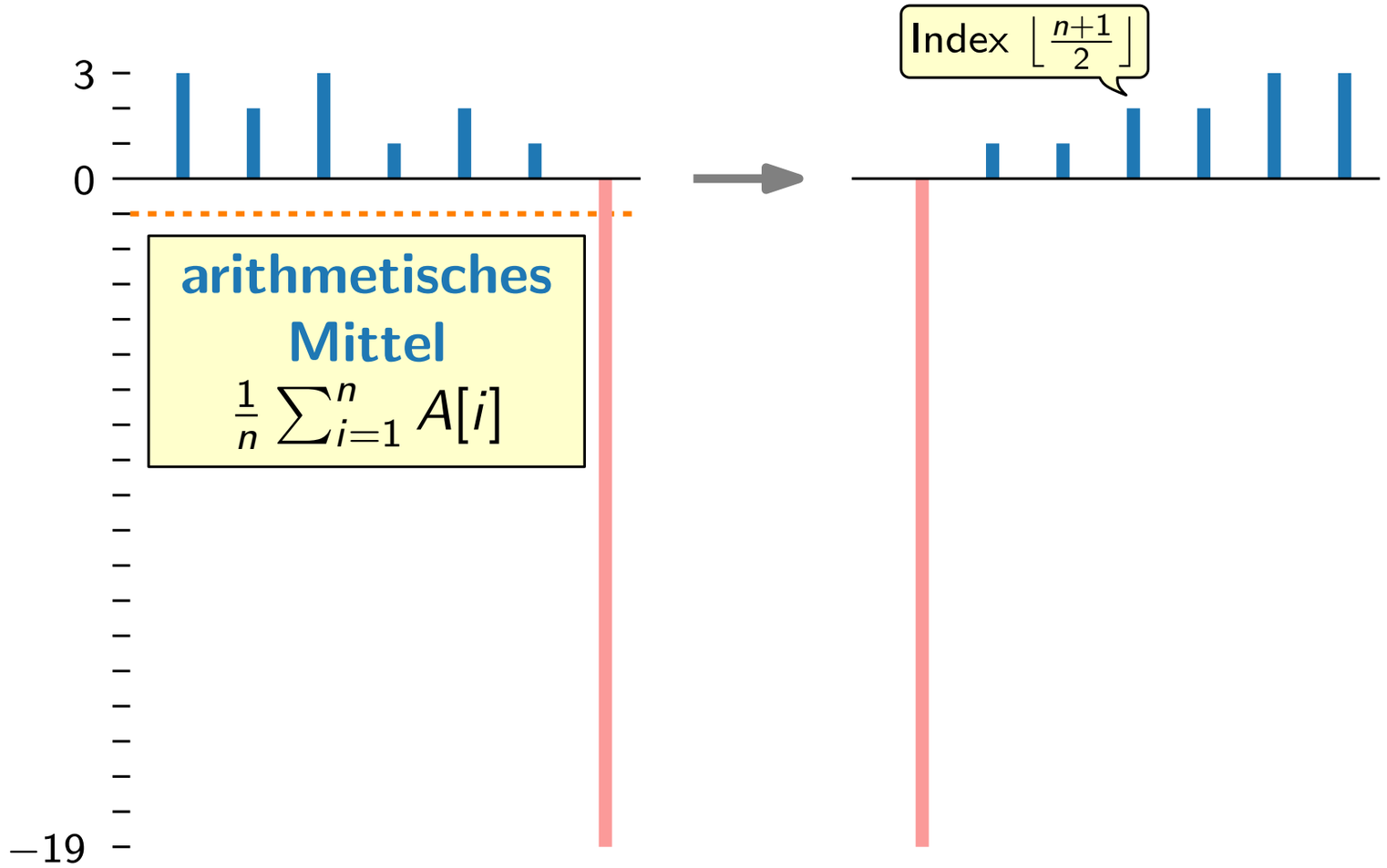


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

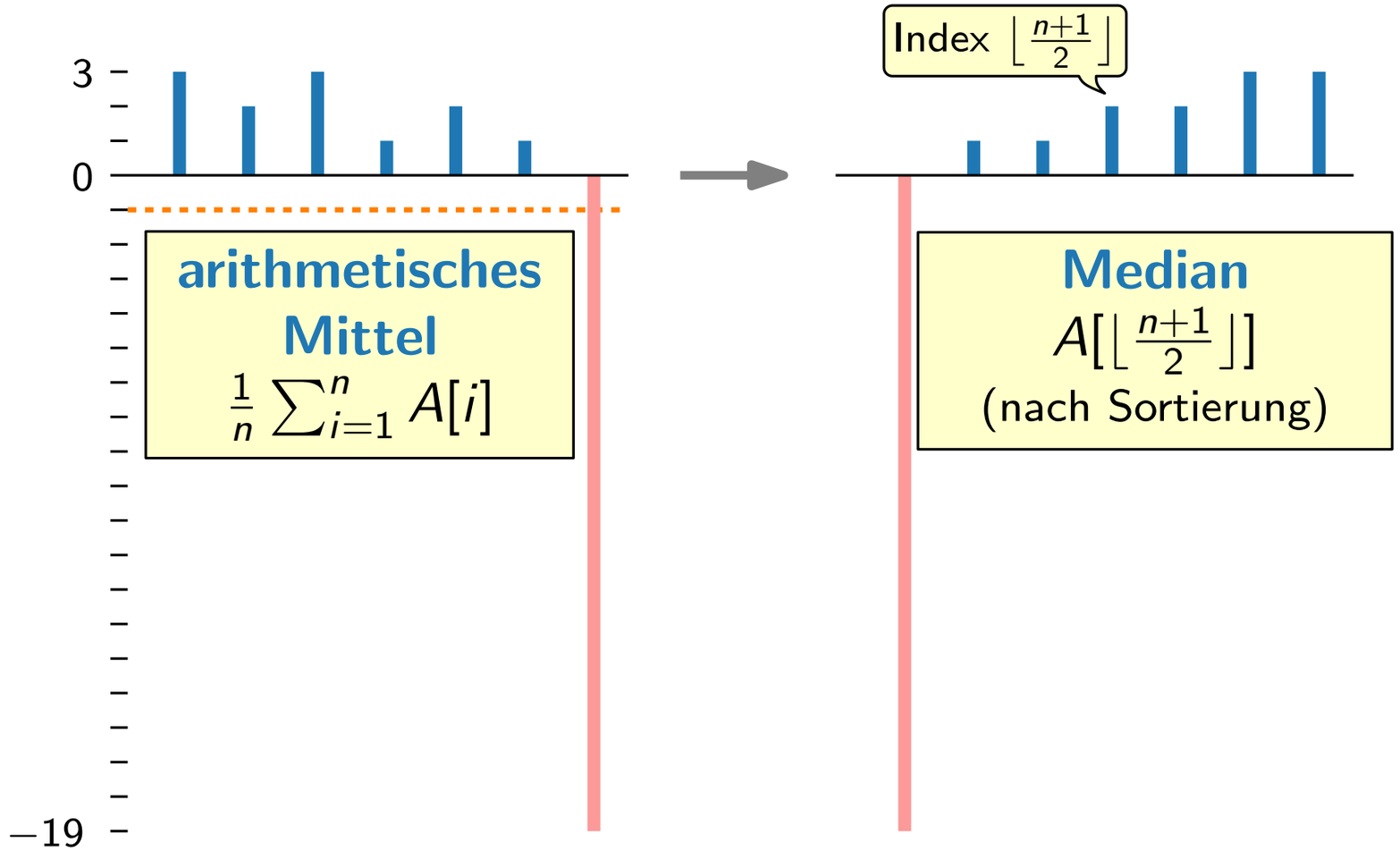


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

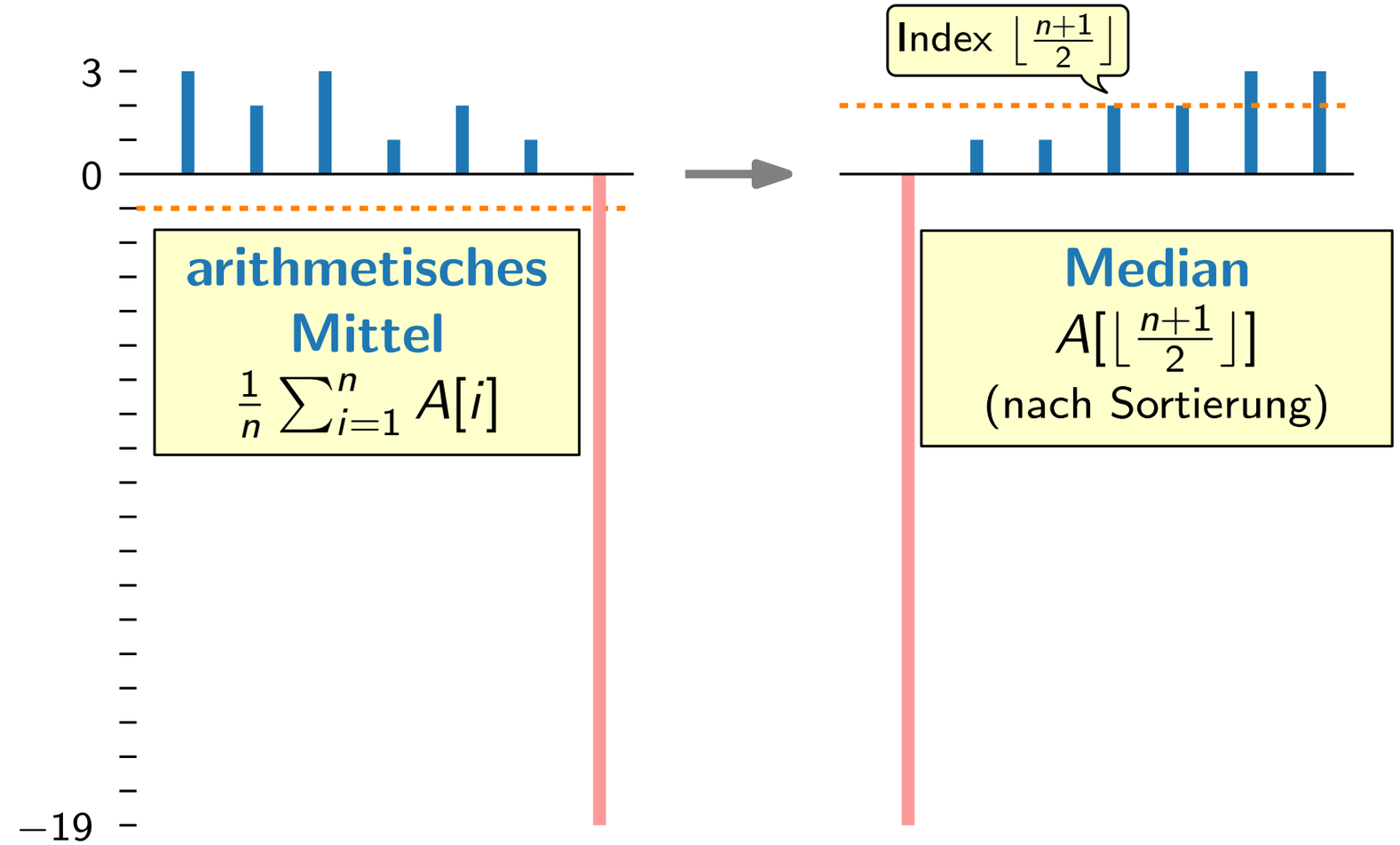


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.

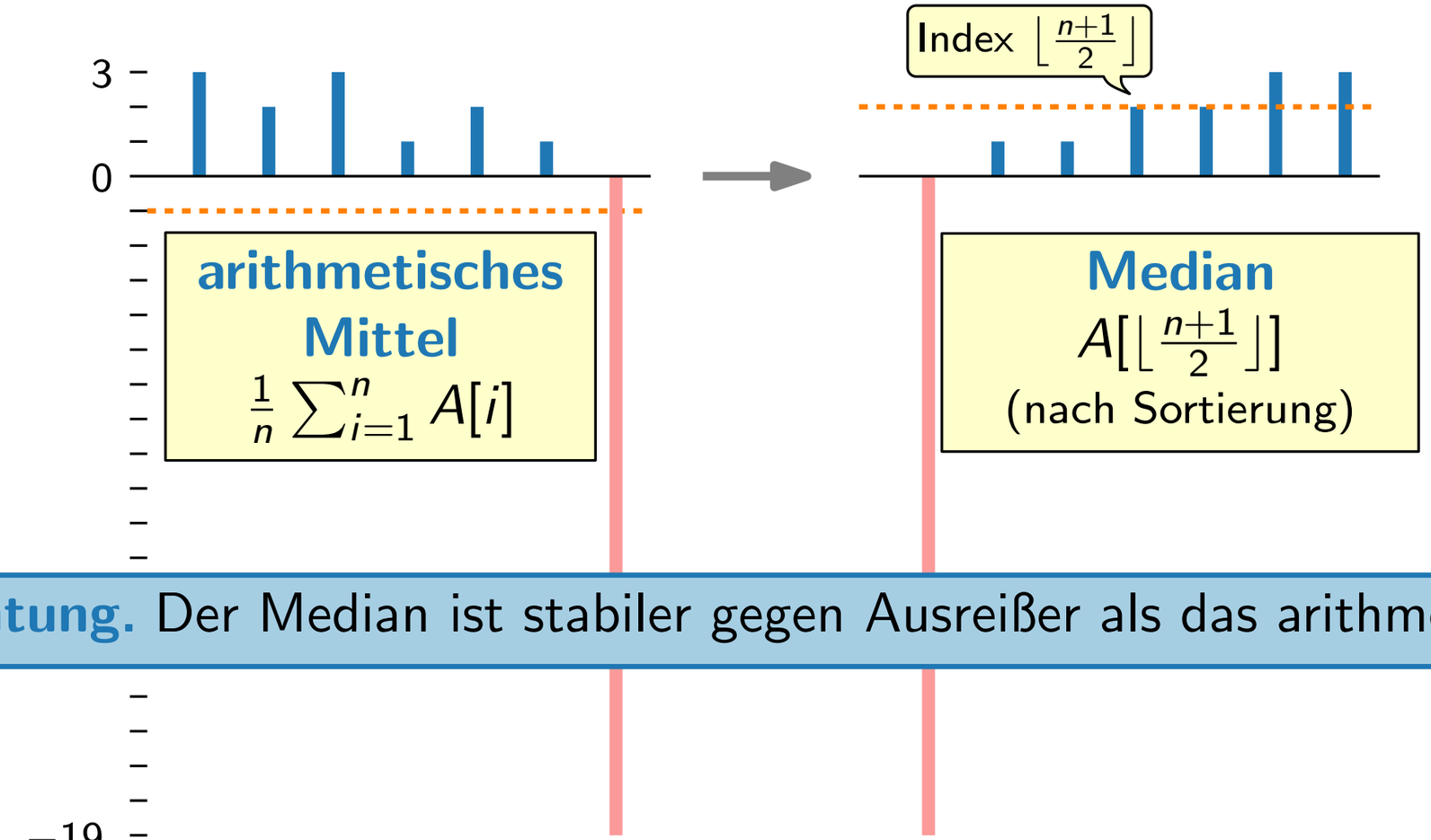


Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.



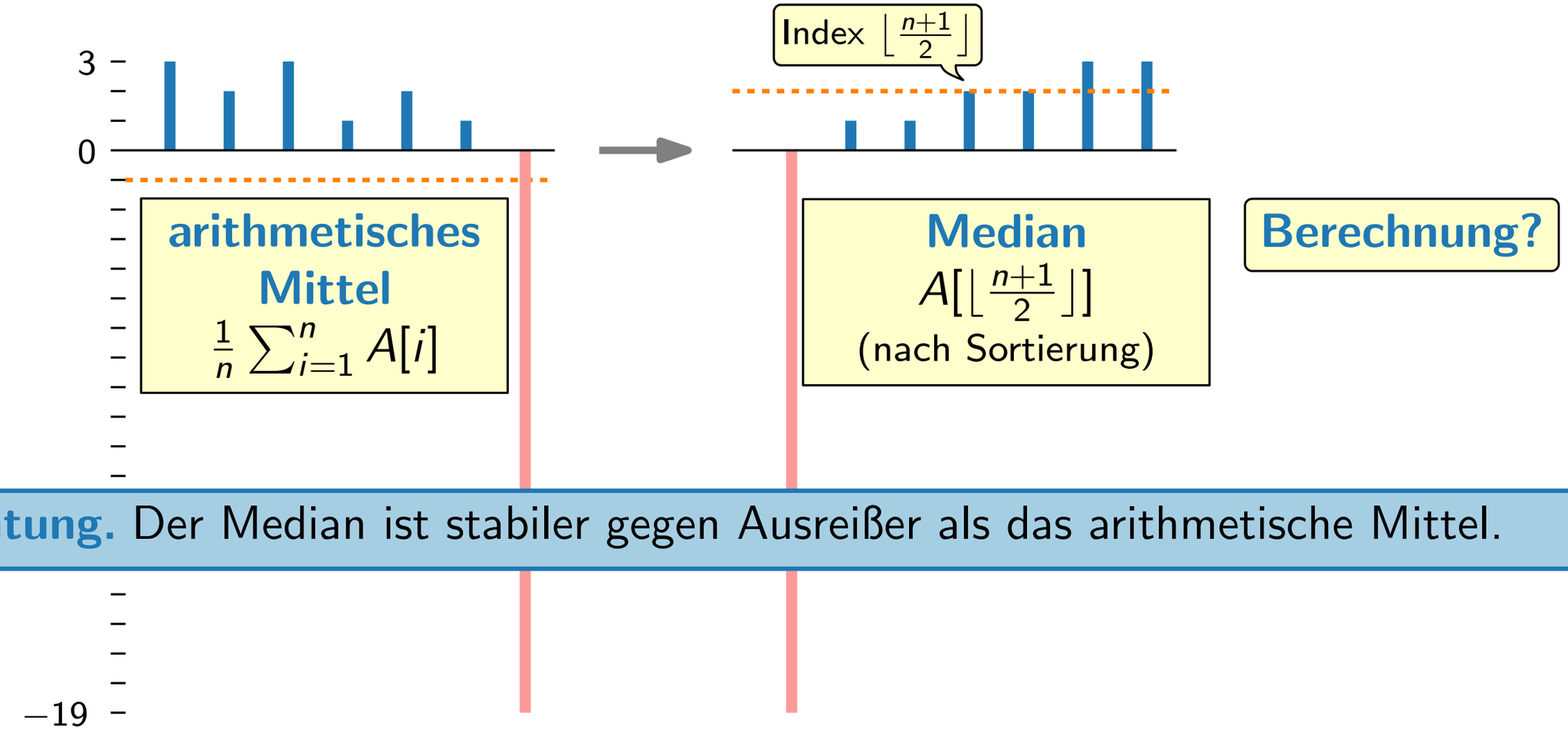
Beobachtung. Der Median ist stabiler gegen Ausreißer als das arithmetische Mittel.

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

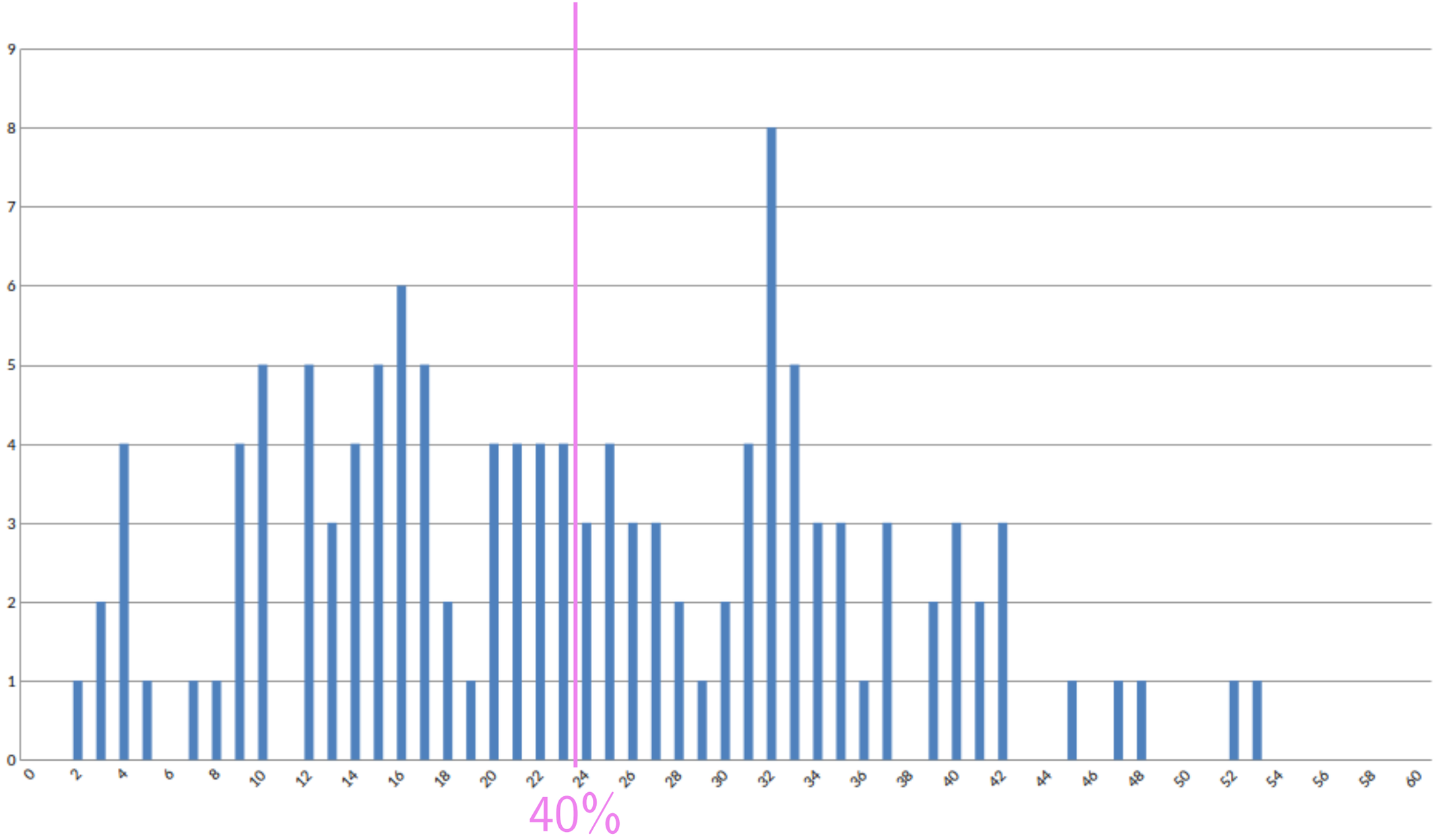
Beispiel.



Beobachtung. Der Median ist stabiler gegen Ausreißer als das arithmetische Mittel.

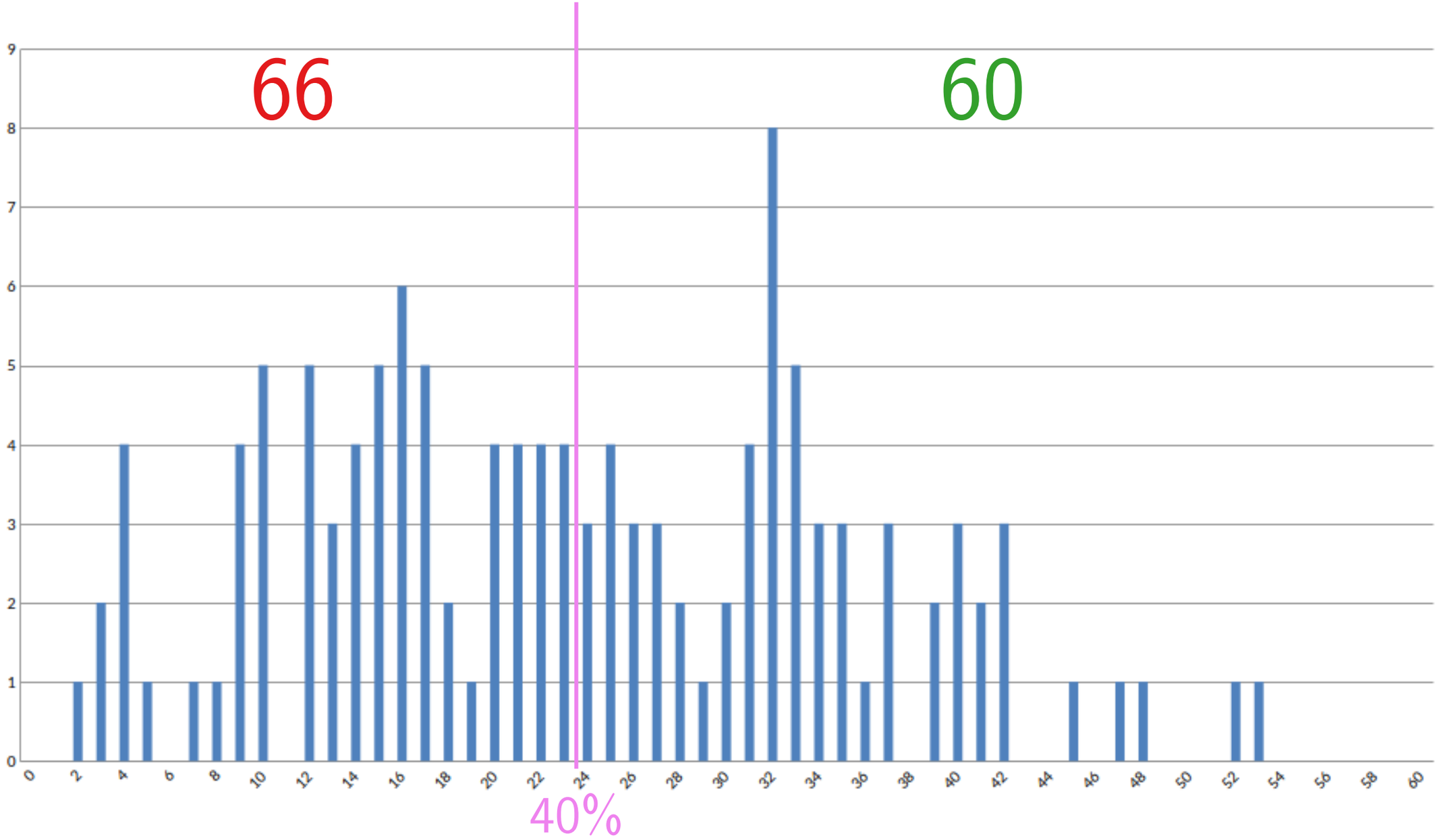
1. Zwischentest

$n = 126$; Durchschnitt $= 23{,}7$; Median $= 21{,}5$.

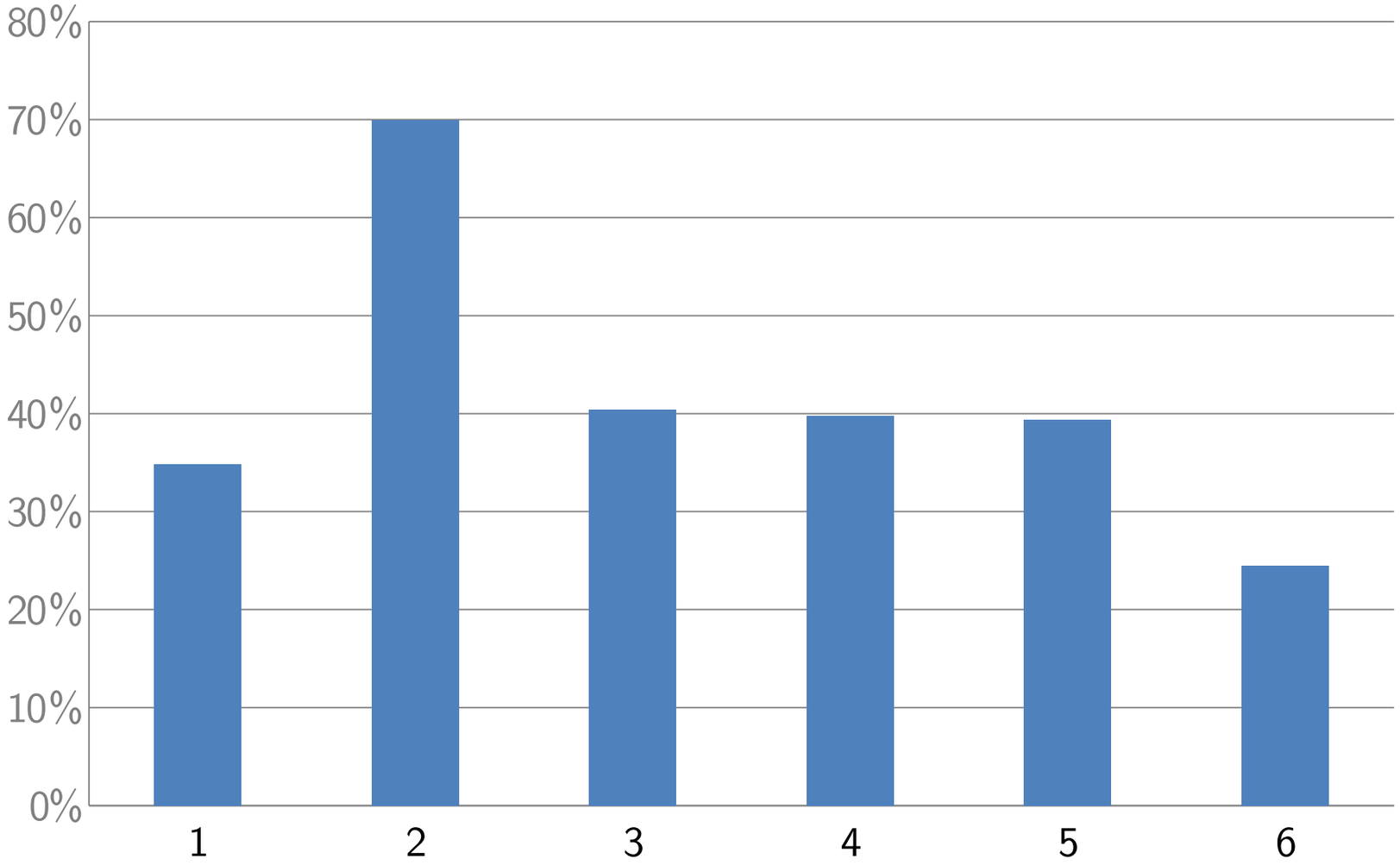


1. Zwischentest

$n = 126$; Durchschnitt $= 23{,}7$; Median $= 21{,}5$.



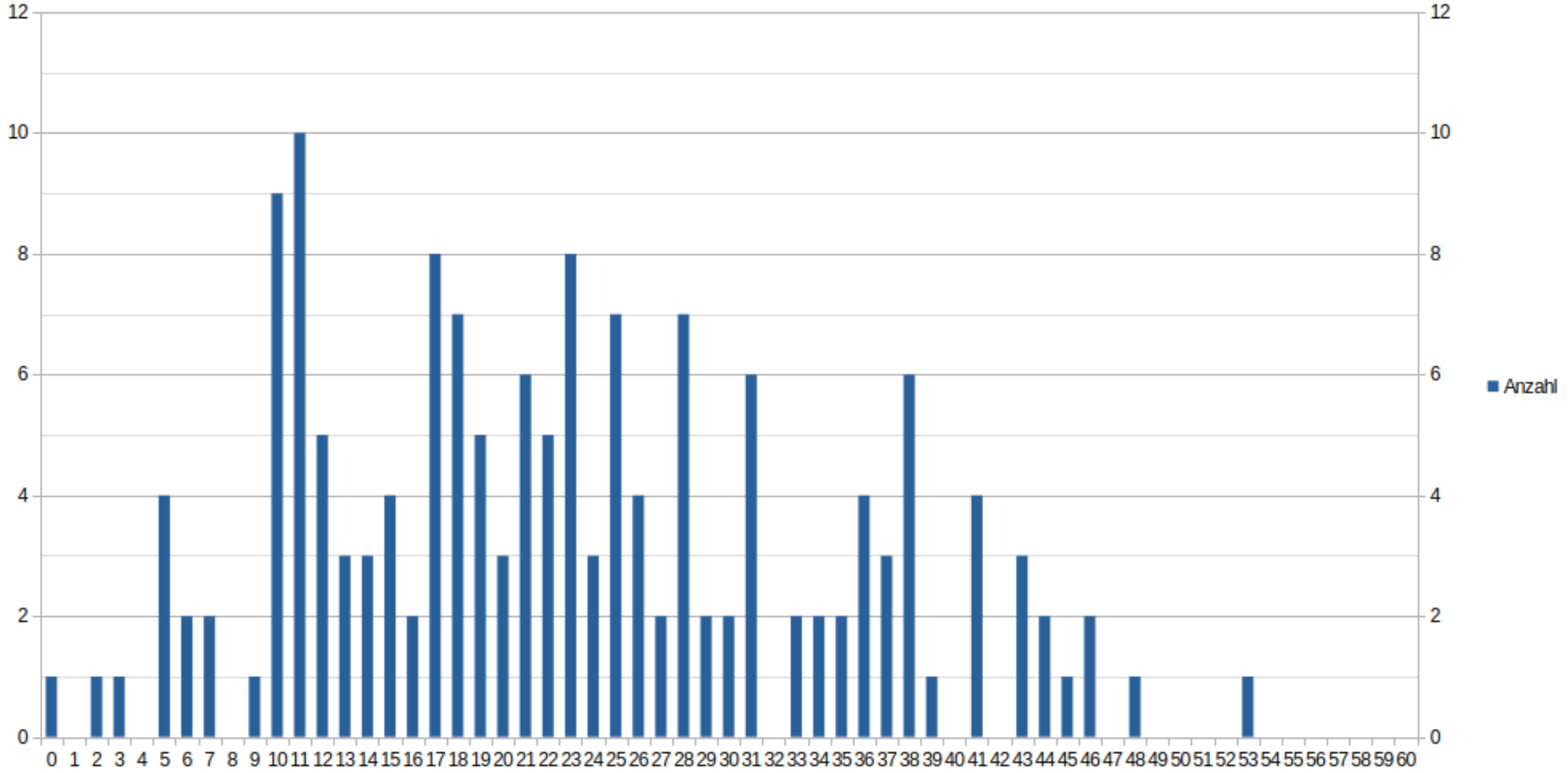
Ergebnisse nach Aufgabe



O-Notation Analyse Pseudocode

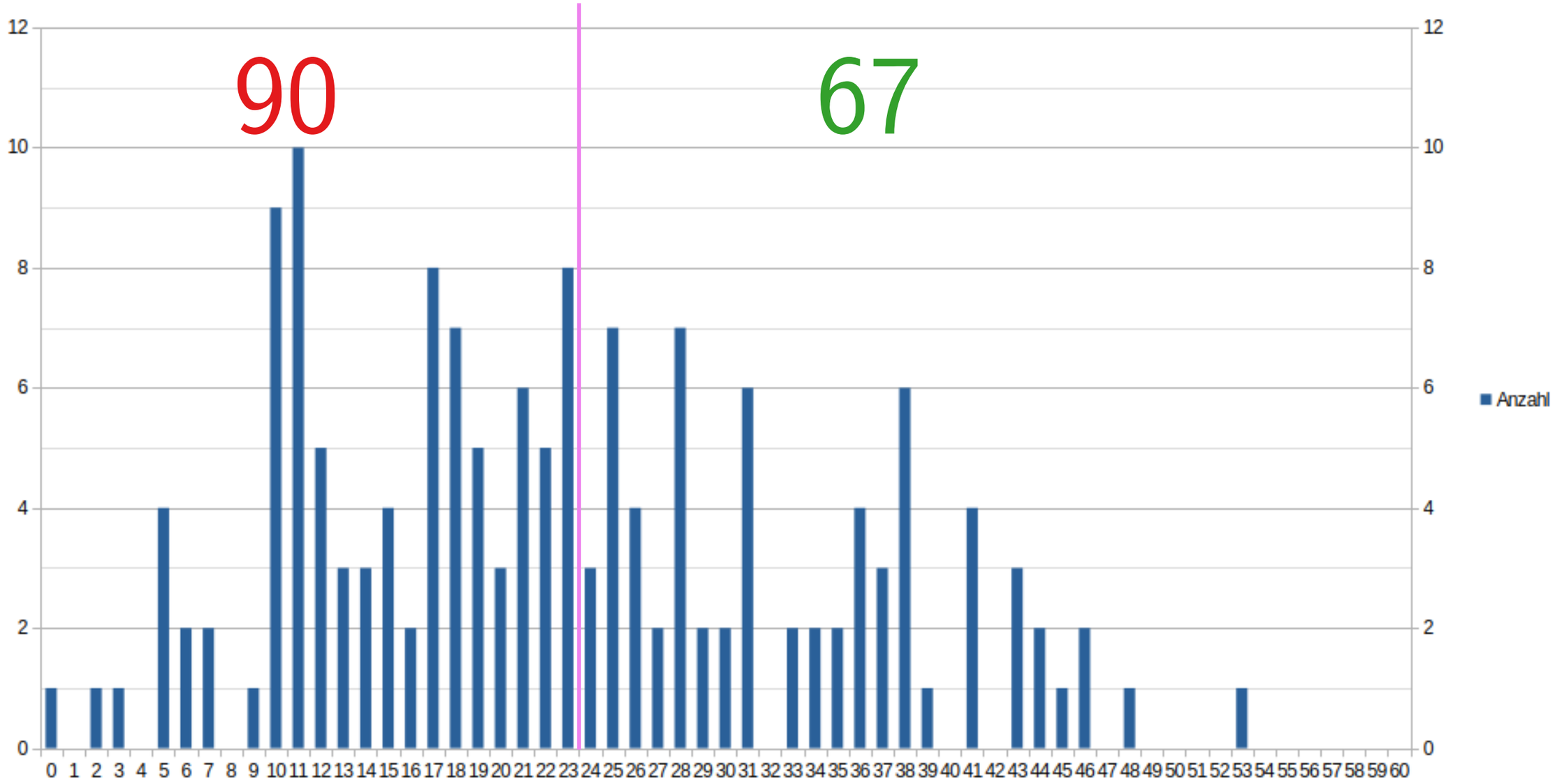
Heaps Invariante Rekursionsgleichungen

1. Zwischentest (letztes Jahr)



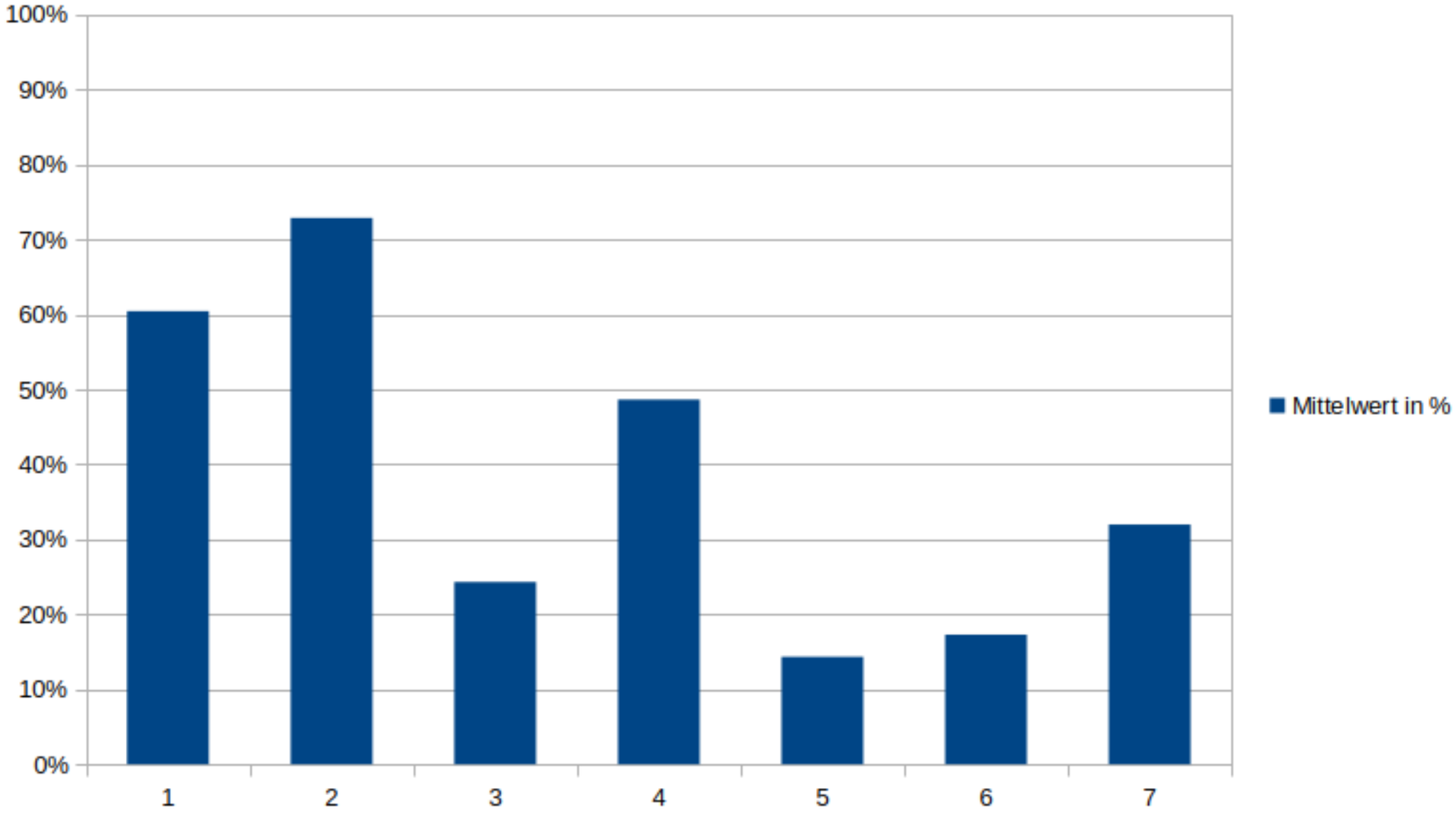
$n = 157$

1. Zwischentest (letztes Jahr)

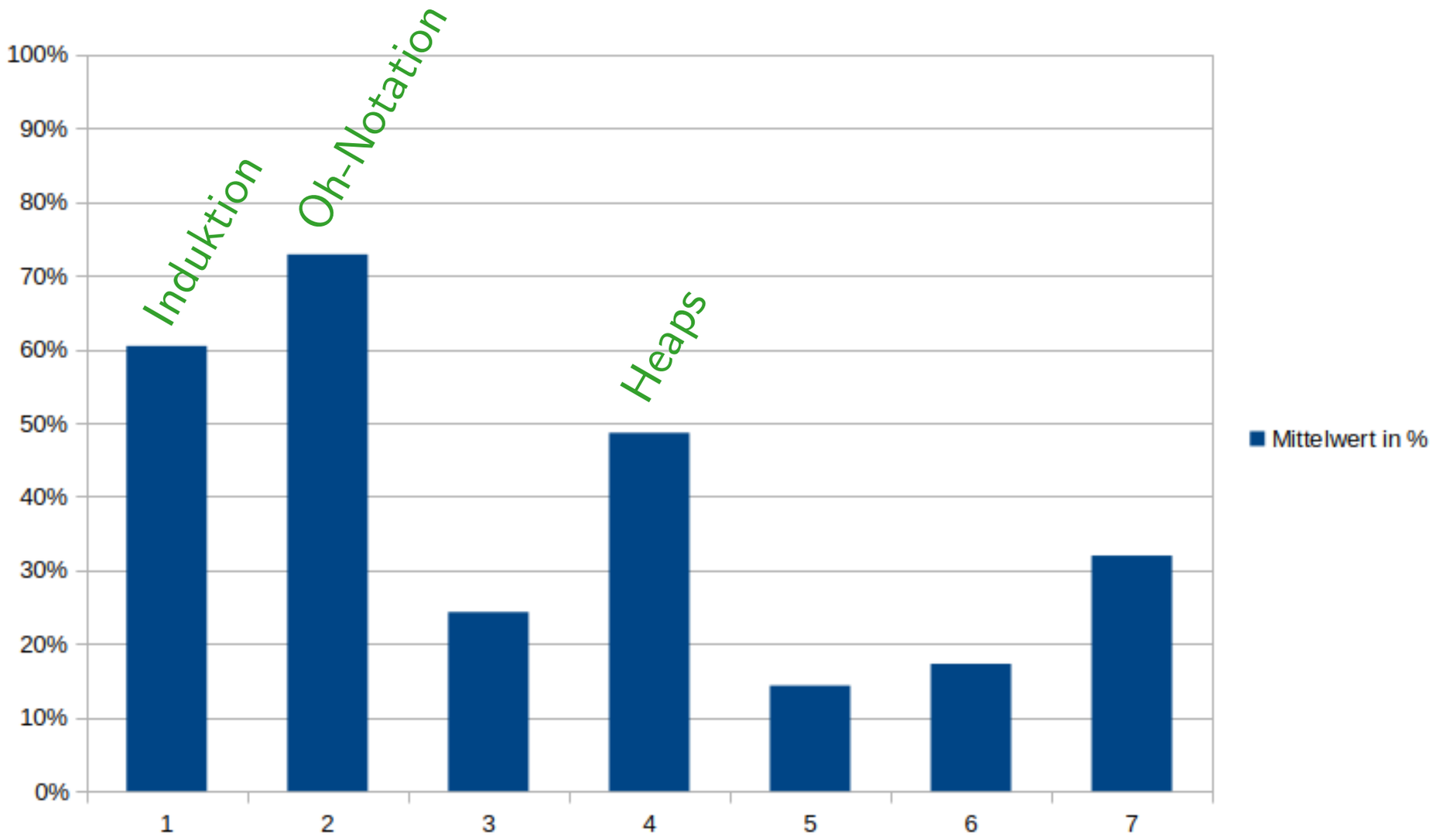


$n = 157$ arithmetisches Mittel $= 22{,}9$ Median $= 19{,}5$

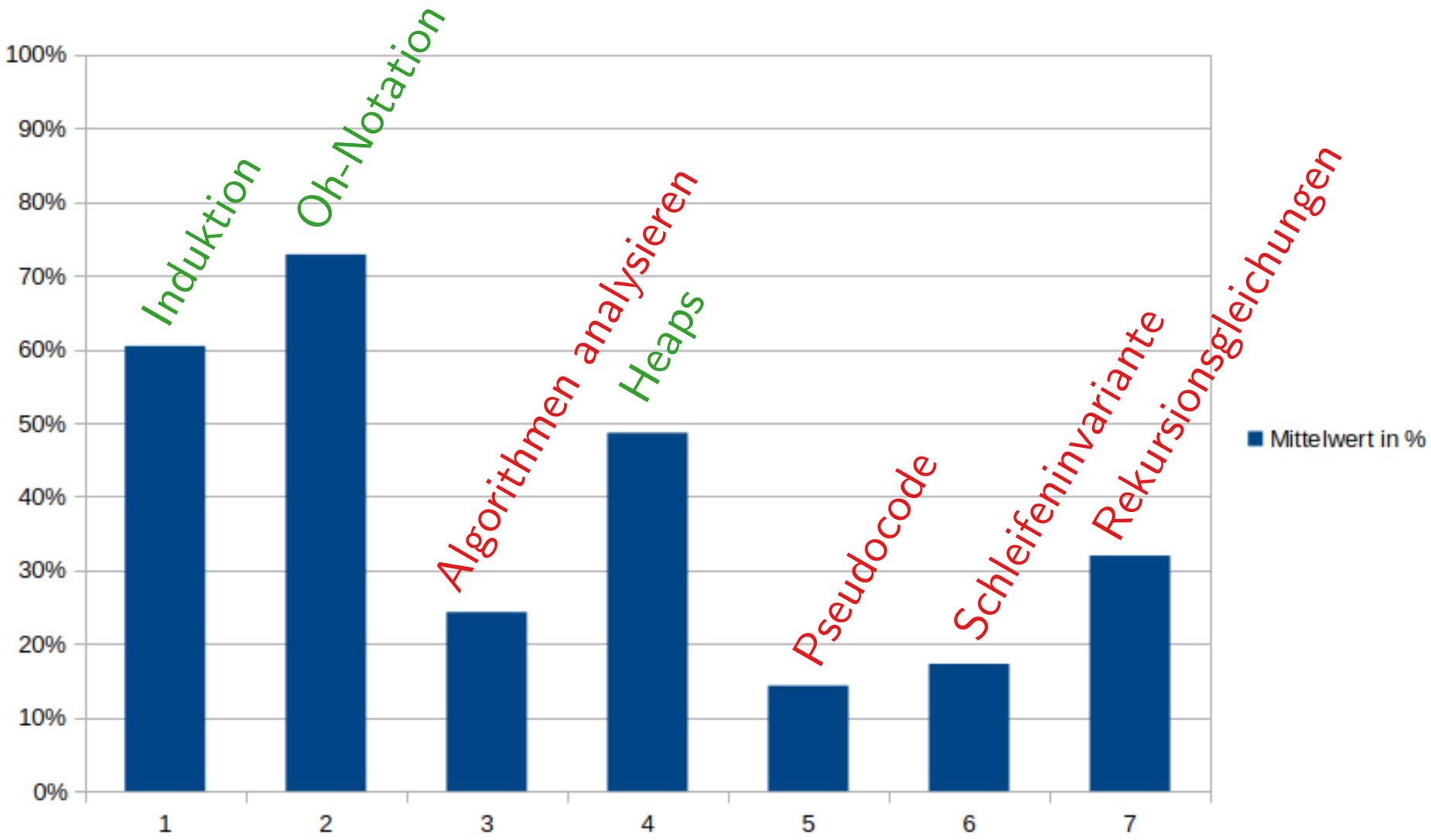
Ergebnisse nach Aufgabe



Ergebnisse nach Aufgabe



Ergebnisse nach Aufgabe



Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Das i-kleinste Element

Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$
Gesucht: Das i-kleinste Element

Lösung.

Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$
Gesucht: Das i-kleinste Element

Lösung. Sortiere und gib $A[i]$ zurück!

Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$
Gesucht: Das i-kleinste Element

Lösung. Sortiere und gib $A[i]$ zurück!

Worst-Case-Laufzeit:

Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$
Gesucht: Das i-kleinste Element

Lösung. Sortiere und gib $A[i]$ zurück!

Worst-Case-Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Das i-kleinste Element

Lösung. Sortiere und gib $A[i]$ zurück!

Worst-Case-Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

wenn man nichts über die Verteilung der Zahlen weiß

Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$
Gesucht: Das i-kleinste Element

Lösung. Sortiere und gib $A[i]$ zurück!

Worst-Case-Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

wenn man nichts über die Verteilung der Zahlen weiß

Geht das besser?

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$:

$i = 1$:

$i = n$:

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

int MINIMUM(int[] A)

Aufgabe.
Schreiben Sie die Funktion MINIMUM in Pseudocode.

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

```
int MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]



  return min
```

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

```
int MINIMUM(int[] A)
    min = A[1]
    for i = 2 to A.length do
        
    return min
```

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

```
int MINIMUM(int[] A)
    min = A[1]
    for i = 2 to A.length do
        if min > A[i] then min = A[i]
    return min
```

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

```
int MINIMUM(int[] A)
    min = A[1]
    for i = 2 to A.length do
        if min > A[i] then min = A[i]
    return min
```

Anzahl Vergleiche $=$

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

```
int MINIMUM(int[] A)
    min = A[1]
    for i = 2 to A.length do
        if min > A[i] then min = A[i]
    return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

} Laufzeit $\Theta(n)$

```
int MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

} Laufzeit $\Theta(n)$

```
int Minimum(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Ist das optimal?

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

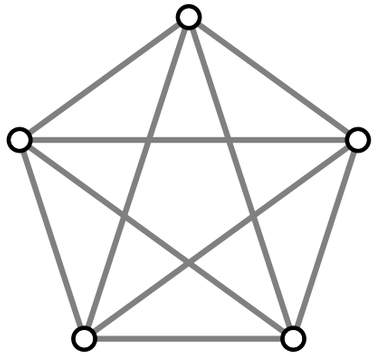
$i = n$: Maximum

} Laufzeit $\Theta(n)$

```
int MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Ist das optimal? Betrachte ein K.O.-Turnier.



Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

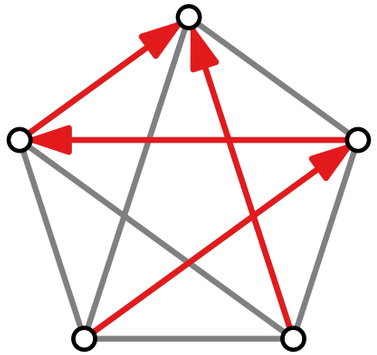
} Laufzeit $\Theta(n)$

```
int MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Ist das optimal?

Betrachte ein K.O.-Turnier.



Bis ein Gewinner feststeht, muss *jeder* – außer dem Gewinner – mindestens einmal verlieren.

Spezialfälle

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

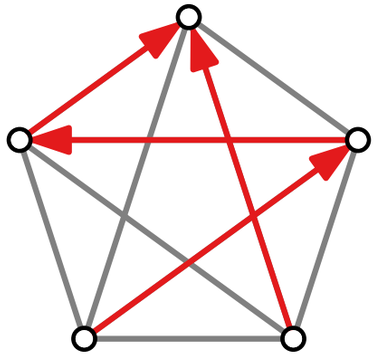
$i = n$: Maximum

} Laufzeit $\Theta(n)$

```
int MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Ist das optimal?



Betrachte ein K.O.-Turnier.

Bis ein Gewinner feststeht, muss *jeder* – außer dem Gewinner – mindestens einmal verlieren.

Also sind $n - 1$ Vergleiche optimal.

Spezialfälle

Geht das auch in linearer Zeit?

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

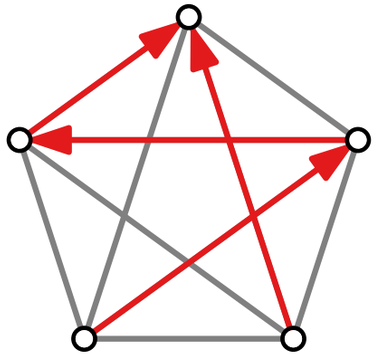
$i = n$: Maximum

} Laufzeit $\Theta(n)$

```
int MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Ist das optimal?



Betrachte ein K.O.-Turnier.

Bis ein Gewinner feststeht, muss *jeder* – außer dem Gewinner – mindestens einmal verlieren.

Also sind $n - 1$ Vergleiche optimal.

Spezialfälle

Geht das auch in linearer Zeit?

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

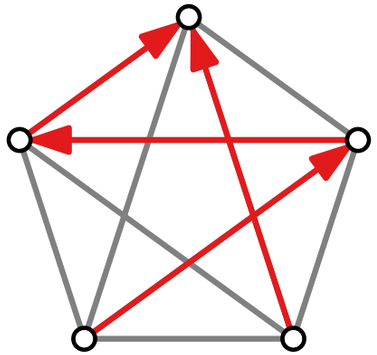
} Laufzeit $\Theta(n)$

```
int MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Geht beides zusammen mit weniger als $2(n-1)$ Vergleichen?

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Ist das optimal?



Betrachte ein K.O.-Turnier.

Bis ein Gewinner feststeht, muss *jeder* – außer dem Gewinner – mindestens einmal verlieren.

Also sind $n - 1$ Vergleiche optimal.

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\mathsf{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht,
um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq$

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) =$

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

min

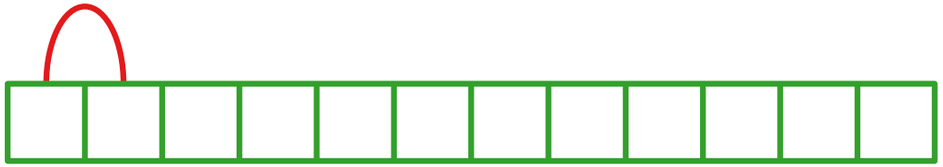
max

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



min

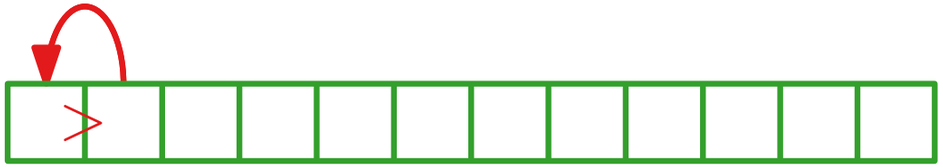
max

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



min

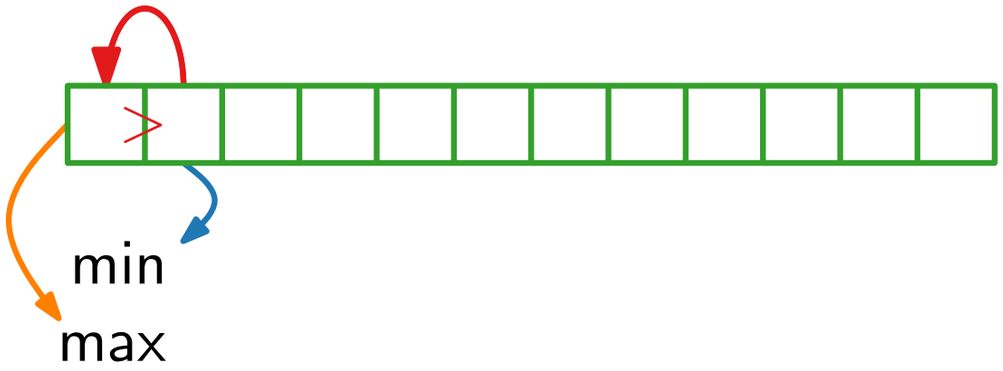
max

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

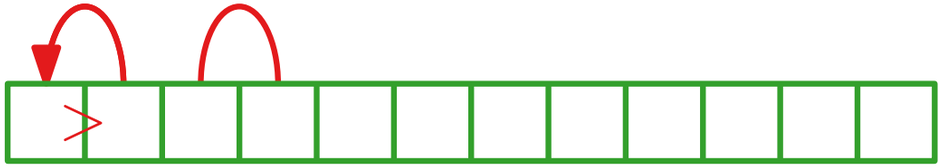


Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



min

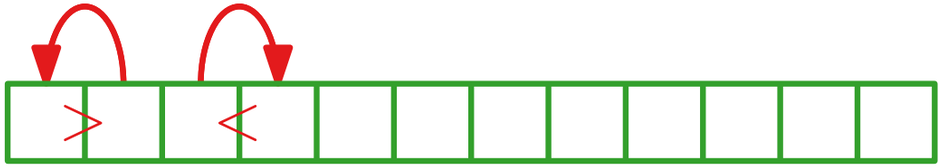
max

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



min

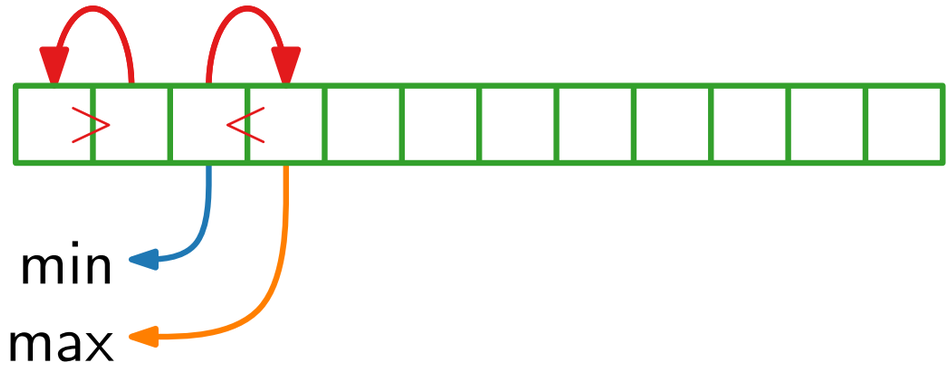
max

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

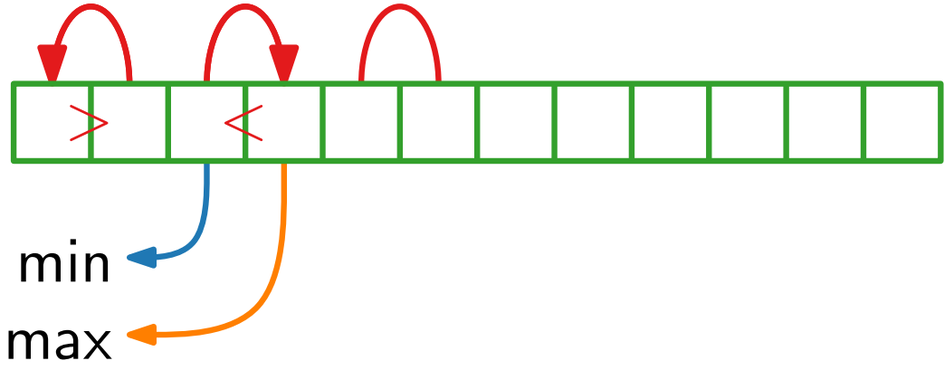


Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

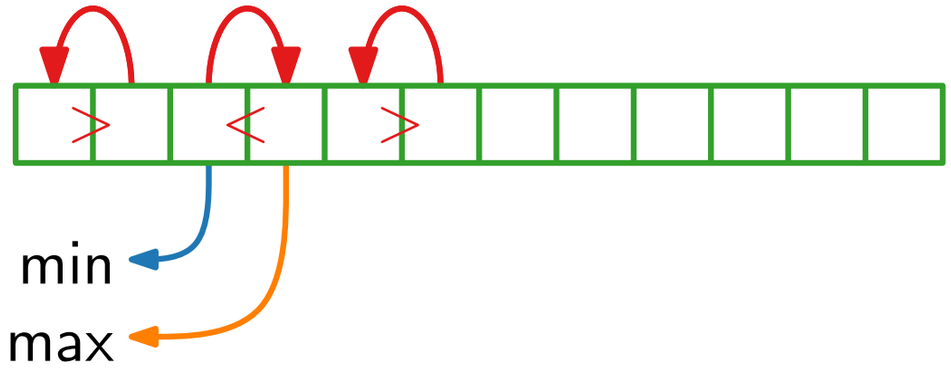


Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

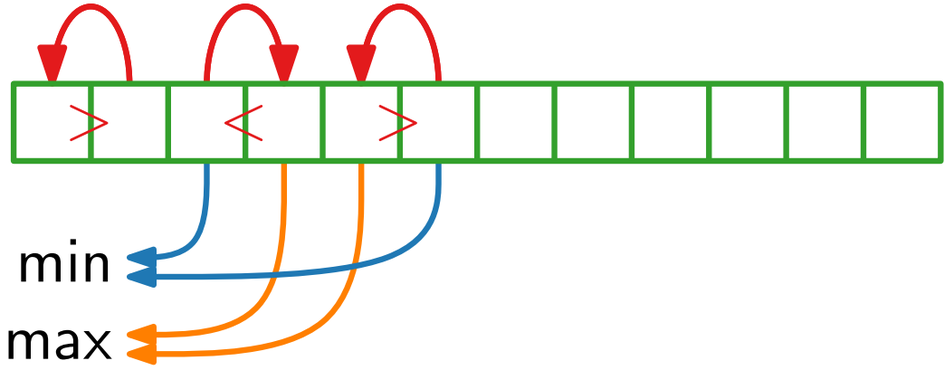


Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

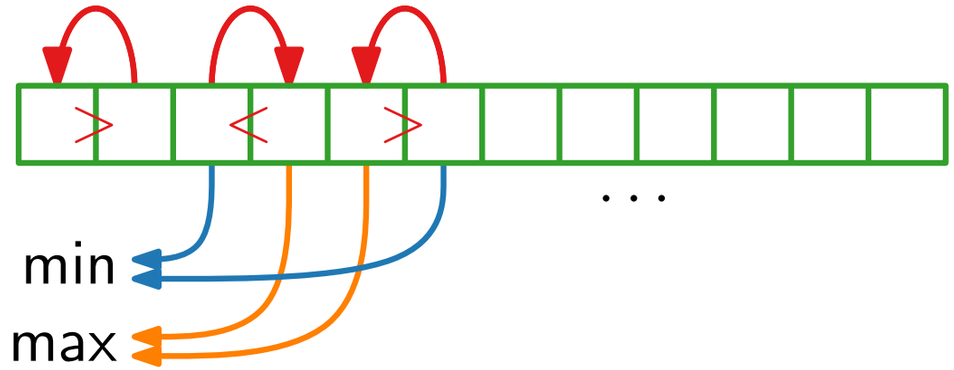


Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?

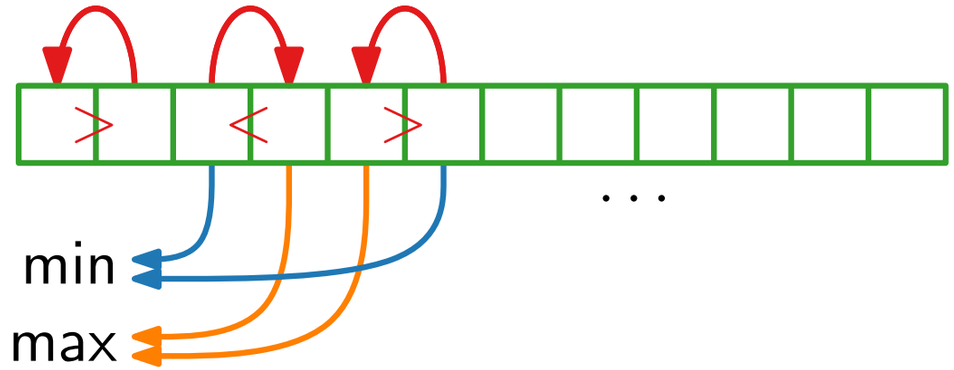


Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



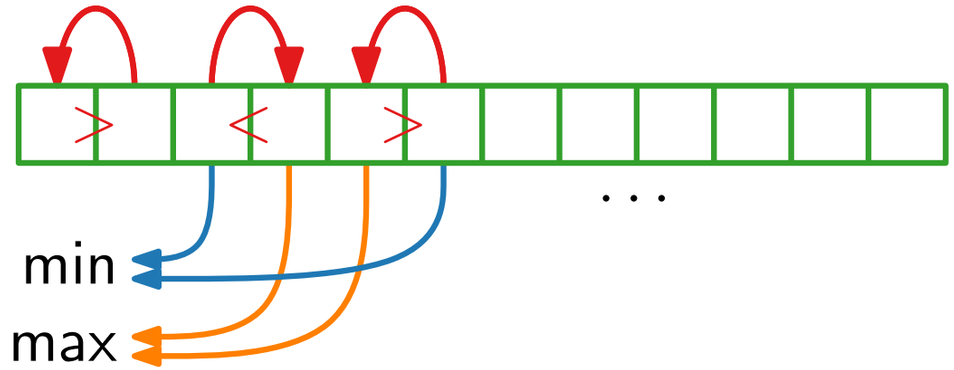
Anzahl der Vergleiche

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht,
um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



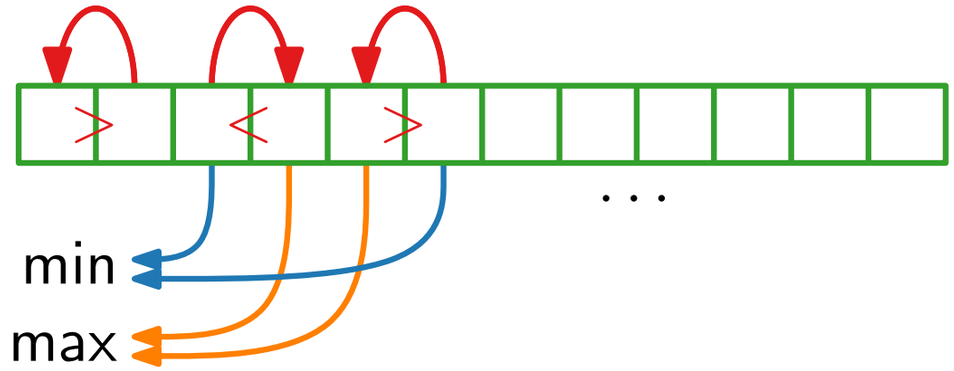
Anzahl der Vergleiche

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



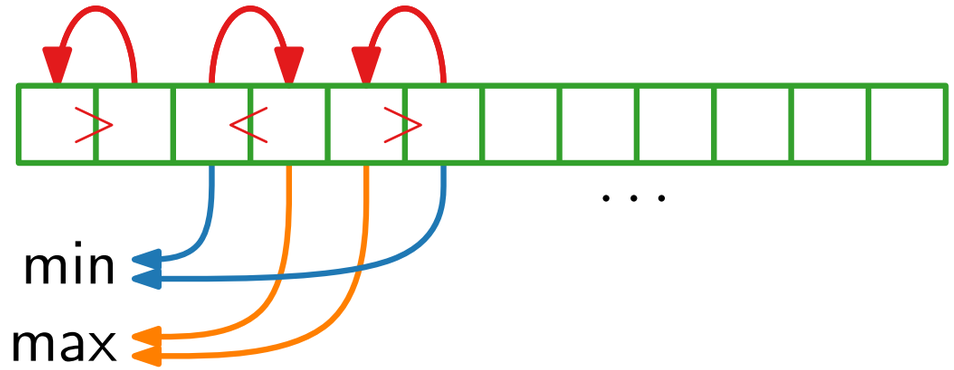
Anzahl der Vergleiche

Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht,
um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?



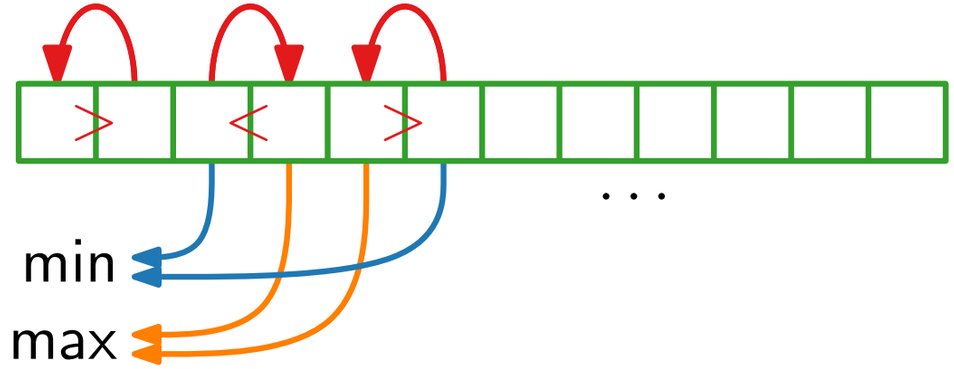
Anzahl der Vergleiche

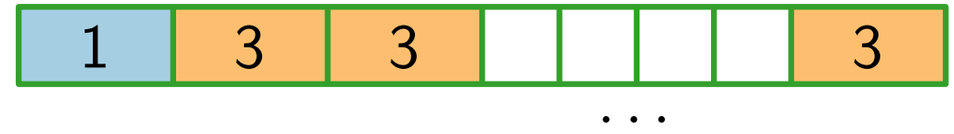
Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?





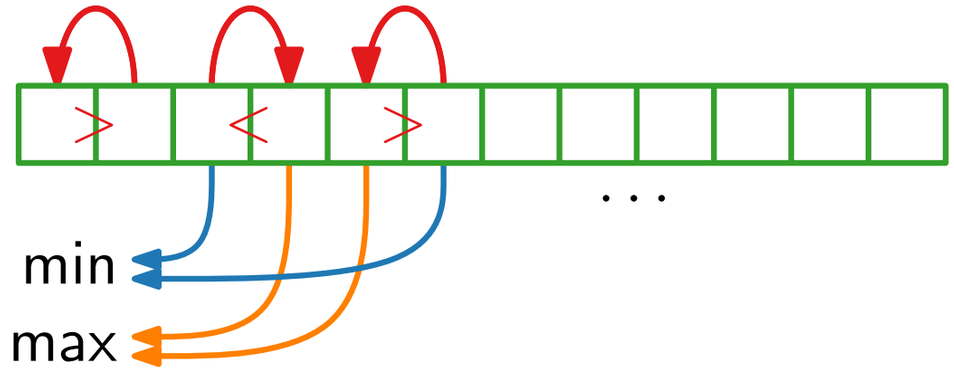
Anzahl der Vergleiche

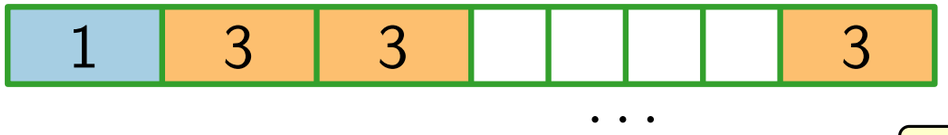
Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht,
um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?





Anzahl der Vergleiche

$=$

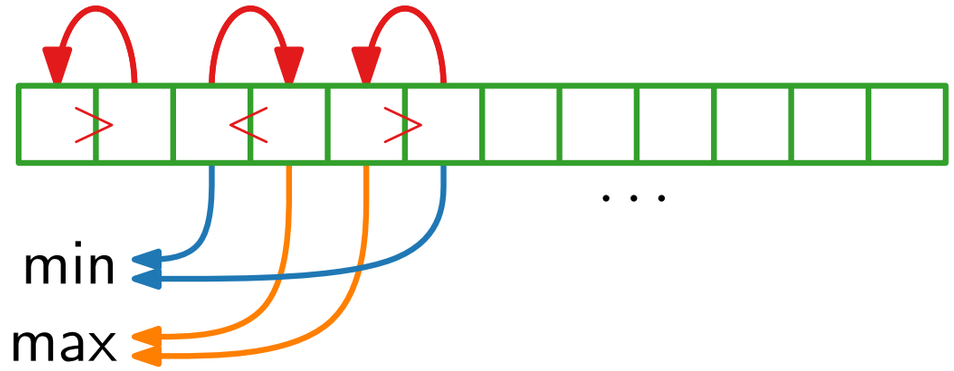
n gerade

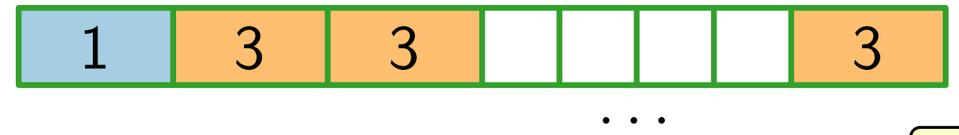
Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?





Anzahl der Vergleiche

$= 1 \cdot 1 + (n/2 - 1) \cdot 3$

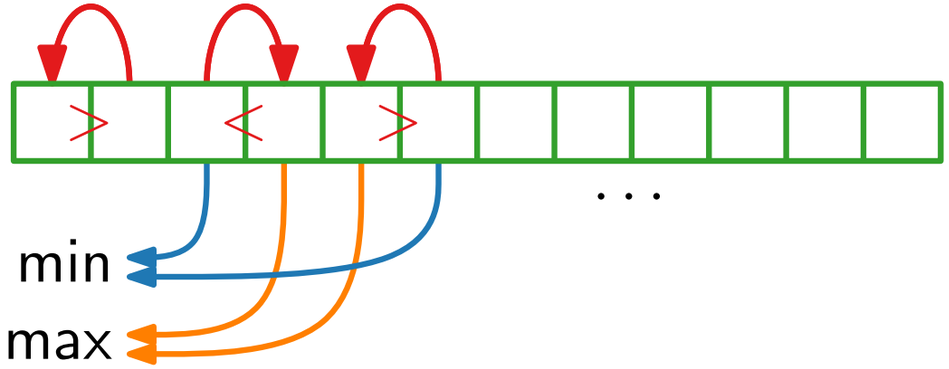
n gerade

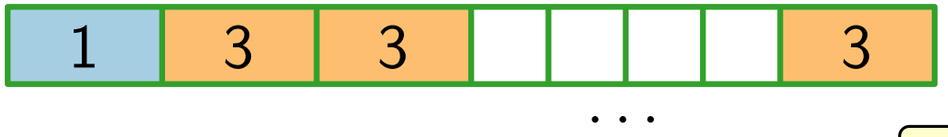
Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?





Anzahl der Vergleiche

$= 1 \cdot 1 + (n/2 - 1) \cdot 3 = 3n/2 - 2$

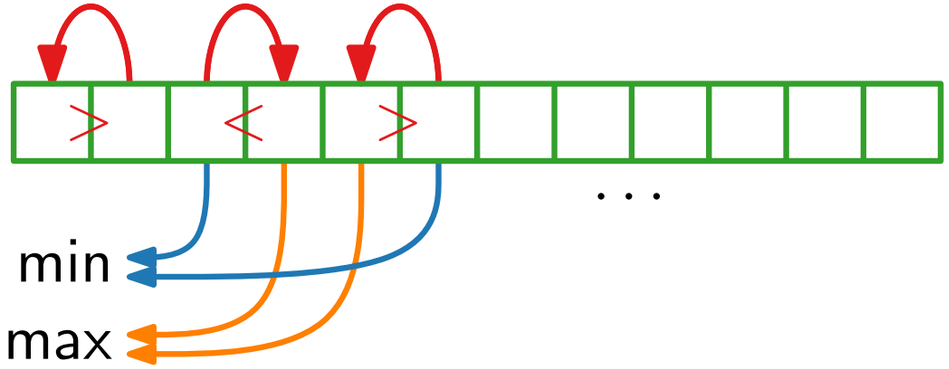
n gerade

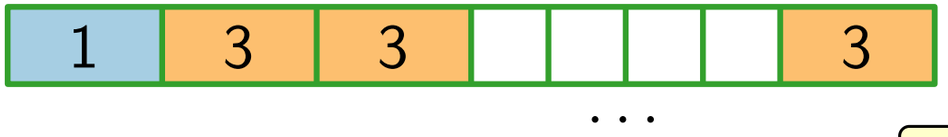
Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?





Anzahl der Vergleiche

$= 1 \cdot 1 + (n/2 - 1) \cdot 3 = 3n/2 - 2$

n gerade

Ist das optimal?

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

Auswahl per Teile & Herrsche

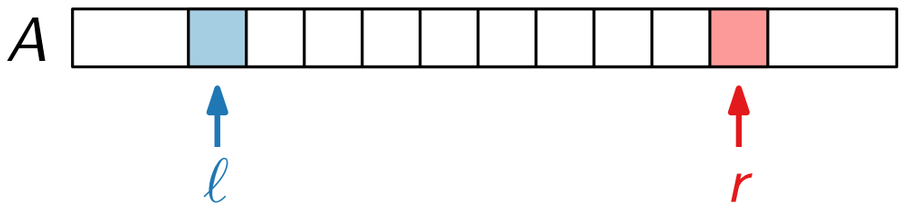
Zur Erinnerung...

```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

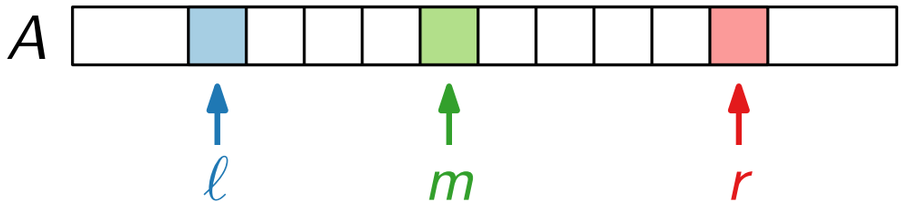
```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

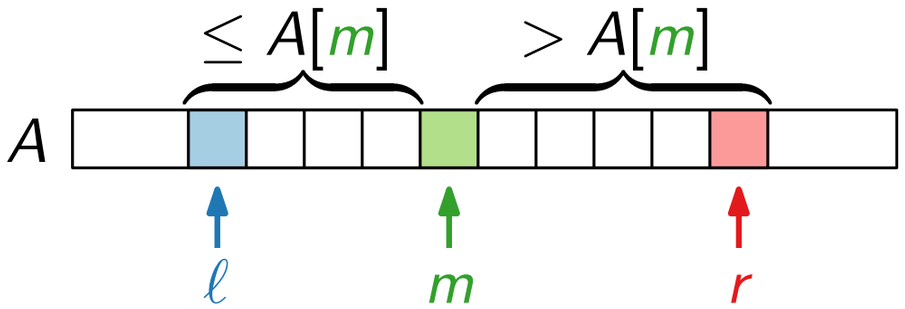
```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

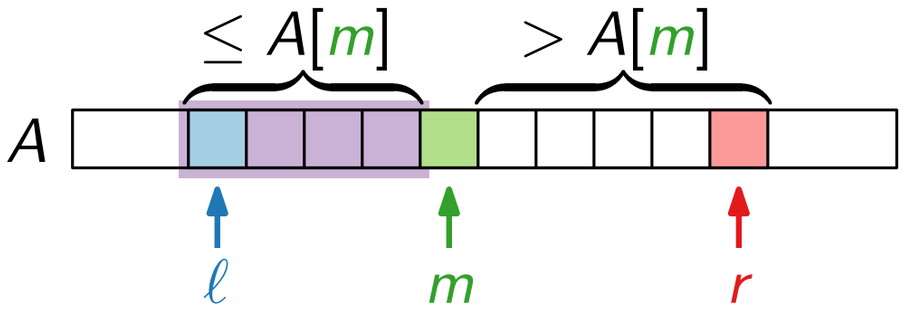
```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

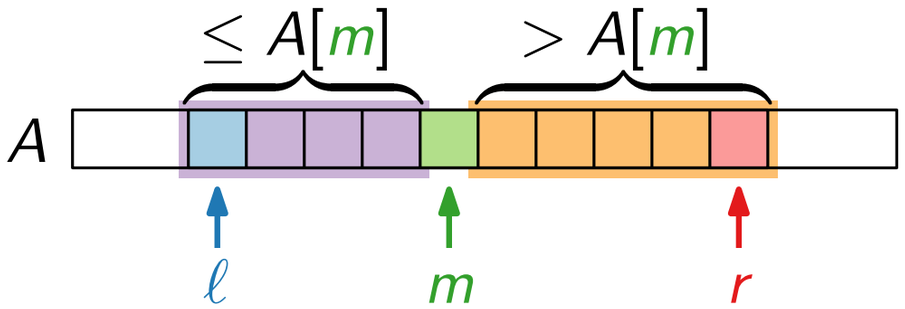
```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

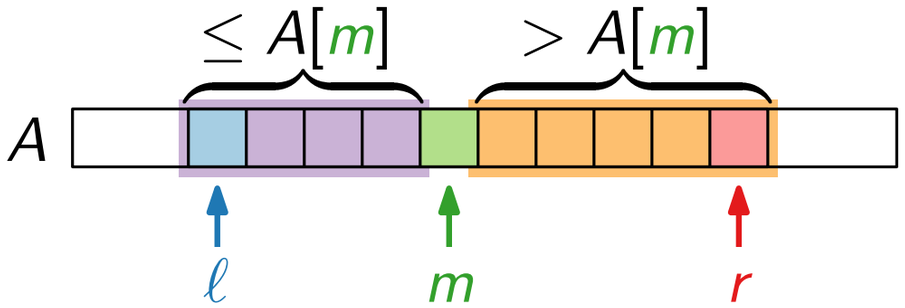
```
QuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = Partition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RANDOMIZED-QUICKSORT(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = RANDOMIZED-PARTITION(A, ℓ, r)
      QUICKSORT(A, ℓ, m − 1)
      QUICKSORT(A, m + 1, r)
```



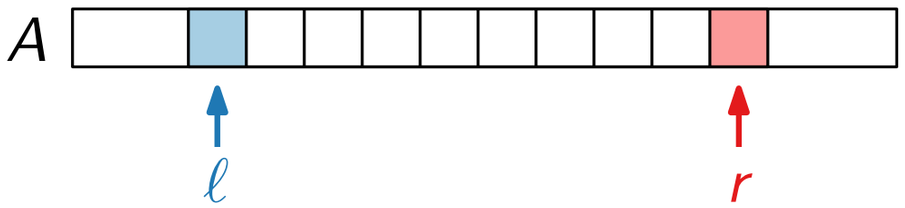
Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

RANDOMIZED-QUICKSORT$(A, \ell = 1, r = A.length)$

if $\ell < r$ **then**

- $m =$ RANDOMIZED-PARTITION(A, ℓ, r)
- QUICKSORT$(A, \ell, m-1)$
- QUICKSORT$(A, m+1, r)$

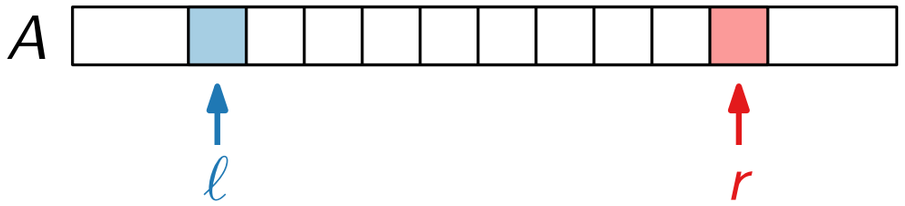


Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RANDOMIZED-QUICKSORT(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = RANDOMIZED-PARTITION(A, ℓ, r)
      QUICKSORT(A, ℓ, m − 1)
      QUICKSORT(A, m + 1, r)
```



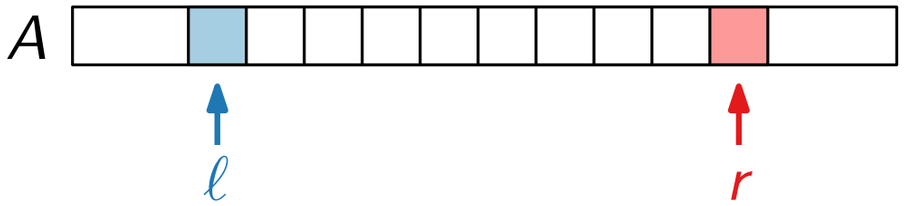
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RANDOMIZEDSELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
      QuickSort(A, ℓ, m − 1)
      QuickSort(A, m + 1, r)
```



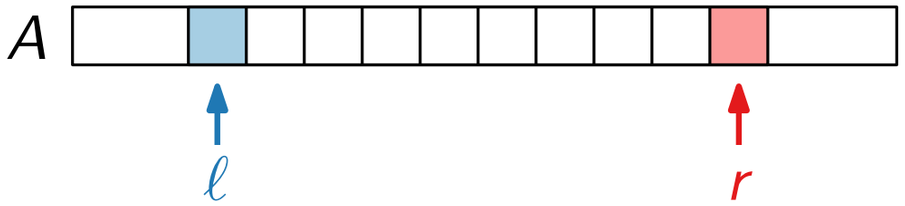
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
      QuickSort(A, ℓ, m − 1)
      QuickSort(A, m + 1, r)
```



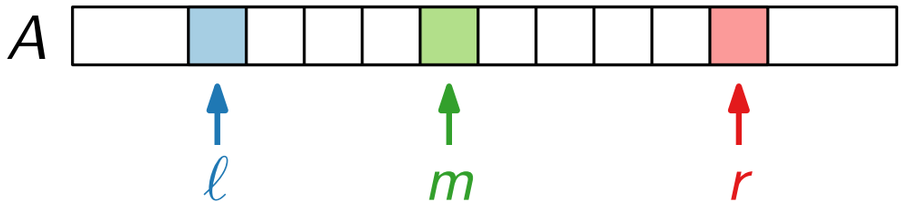
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
      QuickSort(A, ℓ, m − 1)
      QuickSort(A, m + 1, r)
```



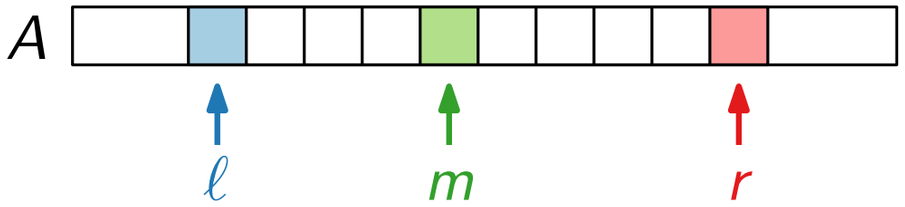
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
      QuickSort(A, ℓ, m − 1)
      QuickSort(A, m + 1, r)
```



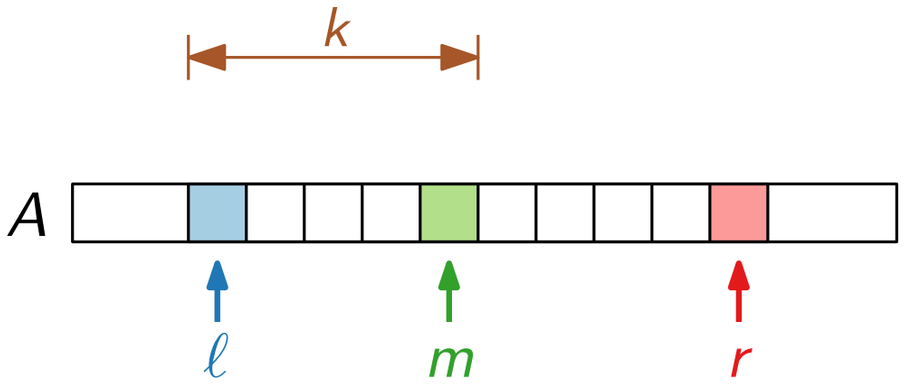
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RANDOMIZED-QUICKSORT(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RANDOMIZED-PARTITION(A, ℓ, r)
    QUICKSORT(A, ℓ, m − 1)
    QUICKSORT(A, m + 1, r)
```



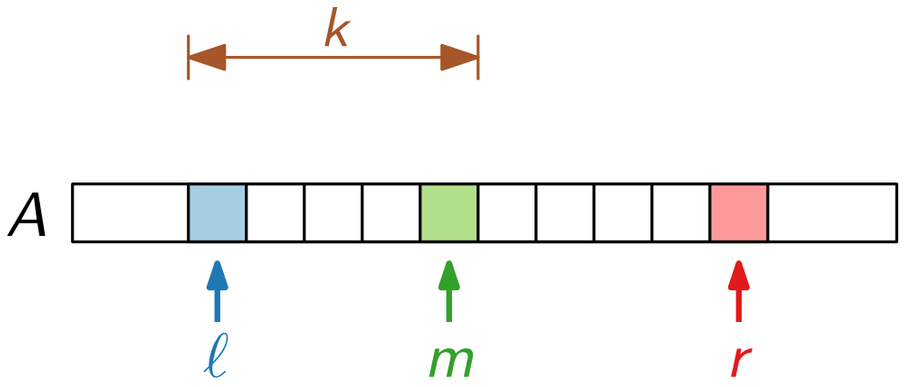
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RANDOMIZEDSELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RANDOMIZEDPARTITION(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



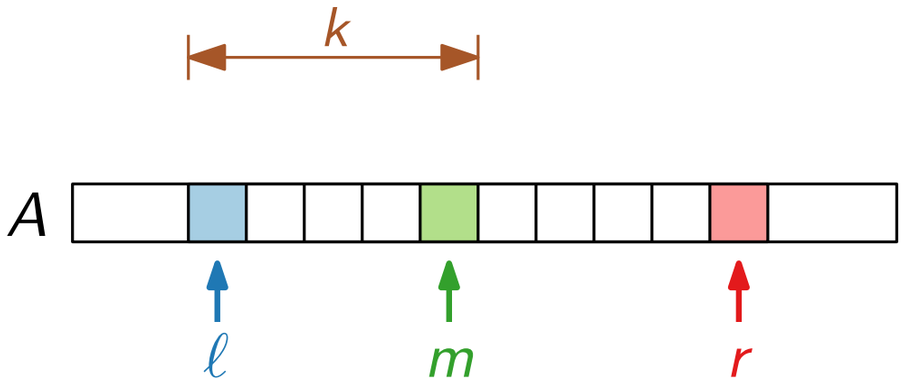
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



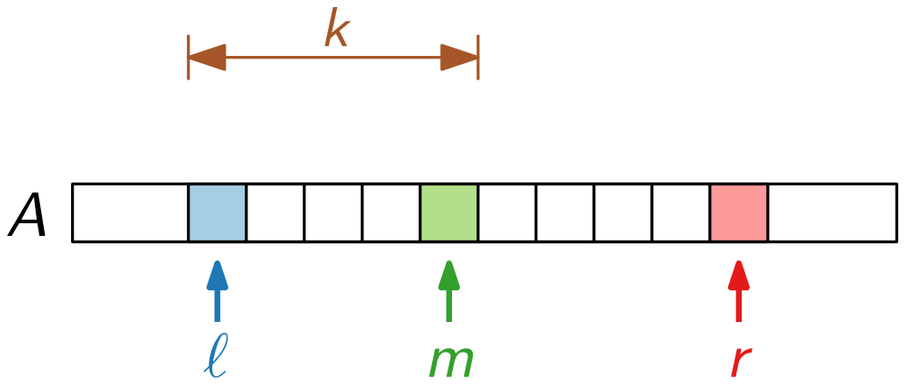
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
    
  else
    
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



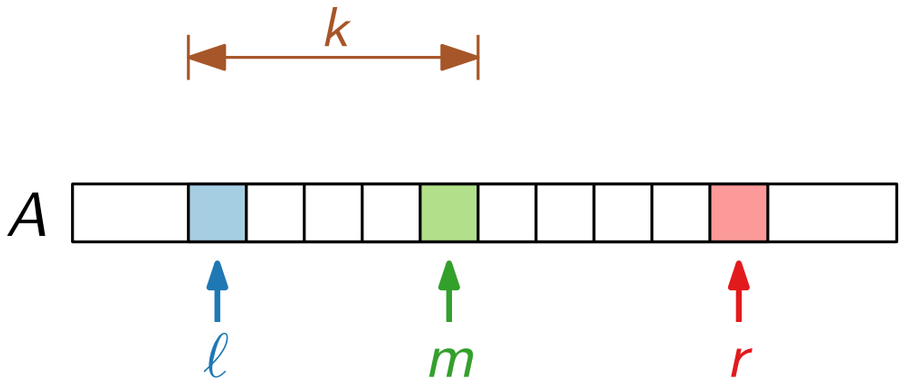
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
    return A[m]
  else
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



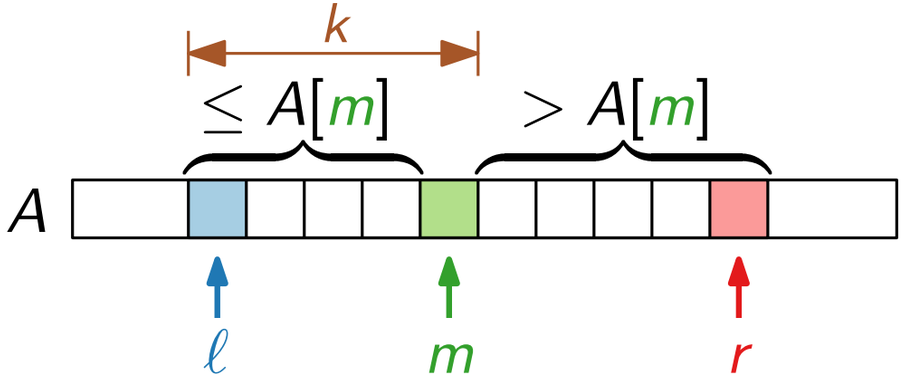
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
    return A[m]
  else
    if i < k then
      
    else
      
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
      m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
      QuickSort(A, ℓ, m − 1)
      QuickSort(A, m + 1, r)
```



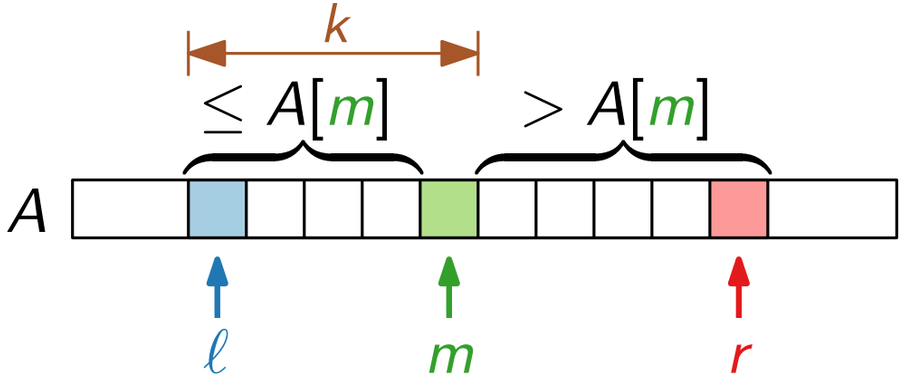
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
      return A[m]
  else
      if i < k then
          
      else
          
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



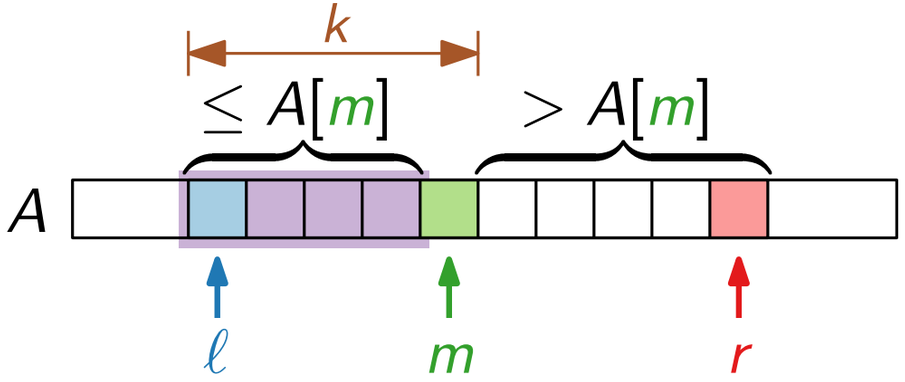
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
    return A[m]
  else
    if i < k then
      return RSelect(A, ℓ, m − 1, i)
    else
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



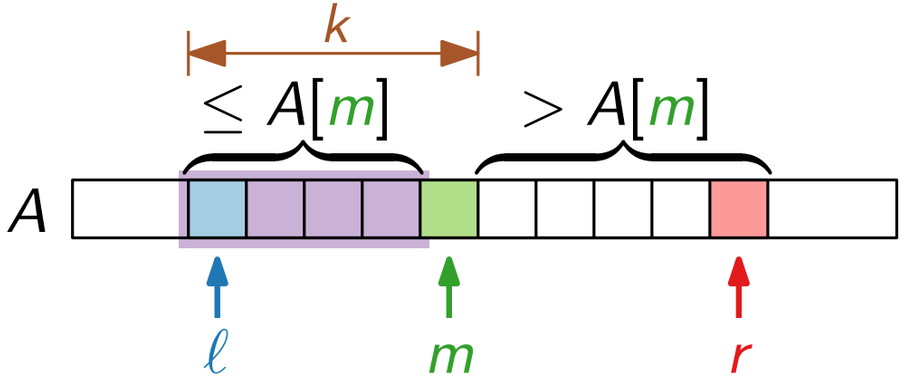
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
    return A[m]
  else
    if i < k then
      return RSelect(A, ℓ, m − 1, i)
    else
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



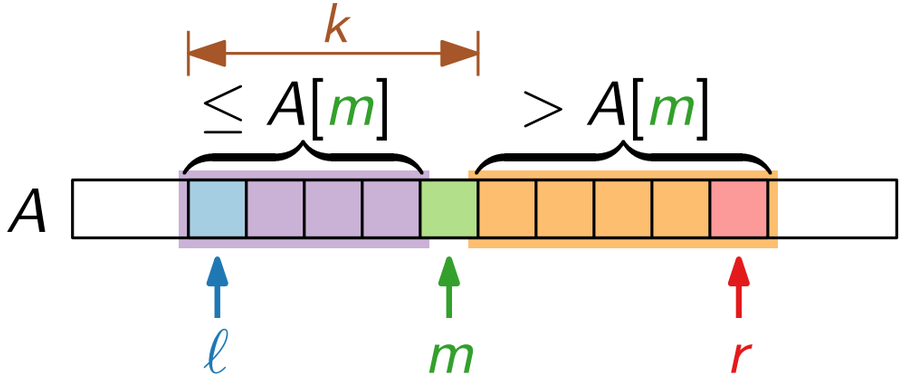
Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
    return A[m]
  else
    if i < k then
      return RSelect(A, ℓ, m − 1, i)
    else
      return RSelect(A, m + 1, r, i − k)
```

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

```
RandomizedQuickSort(A, ℓ = 1, r = A.length)
  if ℓ < r then
    m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
    QuickSort(A, ℓ, m − 1)
    QuickSort(A, m + 1, r)
```



Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \ldots r]$!

```
RandomizedSelect(int[] A, int ℓ, int r, int i)
  if ℓ == r then return A[ℓ]
  m = RandomizedPartition(A, ℓ, r)
  k = m − ℓ + 1        // Rang von A[m] in A[ℓ ... r]
  if i == k then
    return A[m]
  else
    if i < k then
      return RSelect(A, ℓ, m − 1, i)
    else
      return RSelect(A, m + 1, r, i − k)
```

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$V(n) =$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$V(n) = V_{\text{Part}}(n) +$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = V_{\text{Part}}(n) + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = V_{\text{Part}}(n) + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = V_{\text{Part}}(n) + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = V_{\text{Part}}(n) + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \cdots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \cdots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = V_{\text{Part}}(n) + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \cdots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \cdots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{} + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \cdots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \cdots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \cdots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \cdots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

$\Rightarrow$ $E[V(n)] \leq$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

$\Rightarrow$ $E[V(n)] \leq n - 1 +$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

$\Rightarrow$ $E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n}$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

$\Rightarrow$ $E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1}$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

$$\Rightarrow \quad E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \left\{ \begin{array}{ll} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{array} \right\} \text{Alle Fälle gleich wahrscheinlich!}$$

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

$$\Rightarrow \boxed{E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]} \leq \overset{?}{c \cdot n} \quad \begin{pmatrix} \text{für ein} \\ c > 0 \end{pmatrix}$$

Substitutionsmethode

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$. Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$. Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$= n + \frac{2c}{n} ($ $)$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$. Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \qquad \right)$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$. Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$

laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$

laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$

laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$

laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$

laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

$1)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+}{4}$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+}{4}$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right)$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn$$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn$$

≤ 0?!

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn \quad \text{falls } c \geq \frac{4n}{n-2} =$$

$\leq 0?!$

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn \quad \text{falls } c \geq \frac{4n}{n-2} = \frac{4}{1-2/n} \xrightarrow[n \to \infty]{}$$

≤ 0?!

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn \quad \text{falls } c \geq \frac{4n}{n-2} = \frac{4}{1-2/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4^{+}$$

≤ 0?!

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$.

Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn \quad \text{falls } c \geq \frac{4n}{n-2} = \frac{4}{1-2/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4^{+}$$

≤ 0?!

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)] \leq \overbrace{(4+\varepsilon)n}^{c :=}$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$. Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn \quad \text{falls } c \geq \frac{4n}{n-2} = \frac{4}{1-2/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4^{+}$$

≤ 0?!

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)] \leq \overbrace{(4+\varepsilon)}^{c :=} n$$

falls $n \geq$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$. Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn \quad \text{falls } c \geq \frac{4n}{n-2} = \frac{4}{1-2/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4^{+}$$

≤ 0?!

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)] \leq \overbrace{(4+\varepsilon)n}^{c :=} \quad \text{falls } n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

Dann gilt $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \leq cn$. Beweis per Induktion.

Also: $f(n) \leq n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k$ laut Induktionsannahme

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \right)$$

$$= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right)$$

$$\leq n + \frac{c}{n} \left(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \right)$$

$$= n + c\left(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n \right) \leq n + c \cdot \frac{3n+2}{4}$$

$$= cn + \left(n - c \cdot \frac{n-2}{4} \right) \leq cn \quad \text{falls } c \geq \frac{4n}{n-2} = \frac{4}{1-2/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4^{+}$$

≤ 0?!

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$E[V(n)] \leq n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)] \leq \overbrace{(4+\varepsilon)}^{c :=} n$$

falls $n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Genauer:

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$ Zahlen die i.-kleinste Zahl ($1 \leq i \leq n$) mit erwartet $(4 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$ Zahlen die i.-kleinste Zahl ($1 \leq i \leq n$) mit erwartet $(4 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$ Zahlen die i.-kleinste Zahl ($1 \leq i \leq n$) mit erwartet $(4 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

Frage:

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$ Zahlen die i.-kleinste Zahl ($1 \leq i \leq n$) mit erwartet $(4 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

Frage: Geht das auch **deterministisch**, d.h. ohne Zufall?

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$ Zahlen die i.-kleinste Zahl ($1 \leq i \leq n$) mit erwartet $(4 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

Frage: Geht das auch **deterministisch**, d.h. ohne Zufall?

M.a.W. Kann man das Auswahlproblem auch im **schlechtesten Fall** in linearer Zeit lösen?

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –
aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION (int[] A, int ℓ, int r)
  pivot = A[r]
  i = ℓ
  for j = ℓ to r − 1 do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  A[i] ↔ A[r]
  return i
```

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION'(int[] A, int ℓ, int r)
  pivot = A[r]
  i = ℓ
  for j = ℓ to r − 1 do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  A[i] ↔ A[r]
  return i
```

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION'(int[] A, int ℓ, int r, int pivot)
  pivot = A[r]
  i = ℓ
  for j = ℓ to r − 1 do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  A[i] ↔ A[r]
  return i
```

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION'(int[] A, int ℓ, int r, int pivot)
  ~~pivot = A[r]~~
  i = ℓ
  for j = ℓ to ~~r-1~~ r do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  ~~A[i] ↔ A[r]~~
  return i
```

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION'(int[] A, int ℓ, int r, int pivot)
  ~~pivot = A[r]~~
  i = ℓ
  for j = ℓ to ~~r-1~~ r do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  ~~A[i] ↔ A[r]~~
  return i
```

Wir gehen für die Analyse wieder davon aus, dass alle Elemente verschieden sind.

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION'(int[] A, int ℓ, int r, int pivot)
  ~~pivot = A[r]~~
  i = ℓ
  for j = ℓ to ~~r-1~~ r do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  ~~A[i] ↔ A[r]~~
  return i
```

Wir gehen für die Analyse wieder davon aus, dass alle Elemente verschieden sind.

Anzahl der Vergleiche, die PARTITION′ macht:

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION'(int[] A, int ℓ, int r, int pivot)
  ~~pivot = A[r]~~
  i = ℓ
  for j = ℓ to ~~r-1~~ r do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  ~~A[i] ↔ A[r]~~
  return i
```

Wir gehen für die Analyse wieder davon aus, dass alle Elemente verschieden sind.

Anzahl der Vergleiche, die PARTITION′ macht: $r - \ell + 1 =$

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

```
PARTITION'(int[] A, int ℓ, int r, int pivot)
  ~~pivot = A[r]~~
  i = ℓ
  for j = ℓ to ~~r-1~~ r do
      if A[j] ≤ pivot then
          A[i] ↔ A[j]
          i = i + 1
  ~~A[i] ↔ A[r]~~
  return i
```

Wir gehen für die Analyse wieder davon aus, dass alle Elemente verschieden sind.

Anzahl der Vergleiche, die PARTITION′ macht: $r - \ell + 1 = n$

Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

SELECT: deterministisch

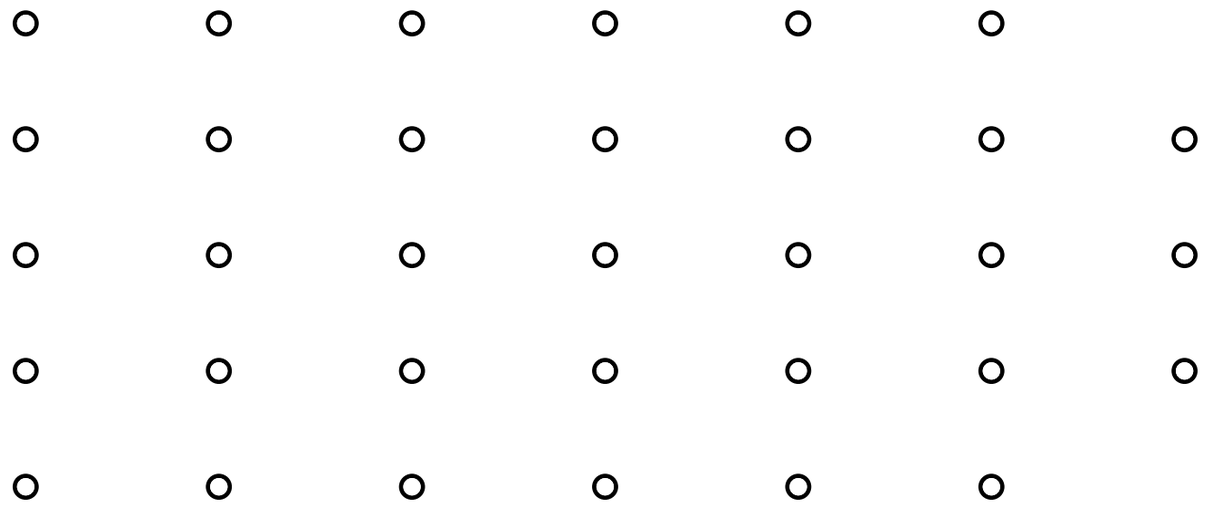
SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.

Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

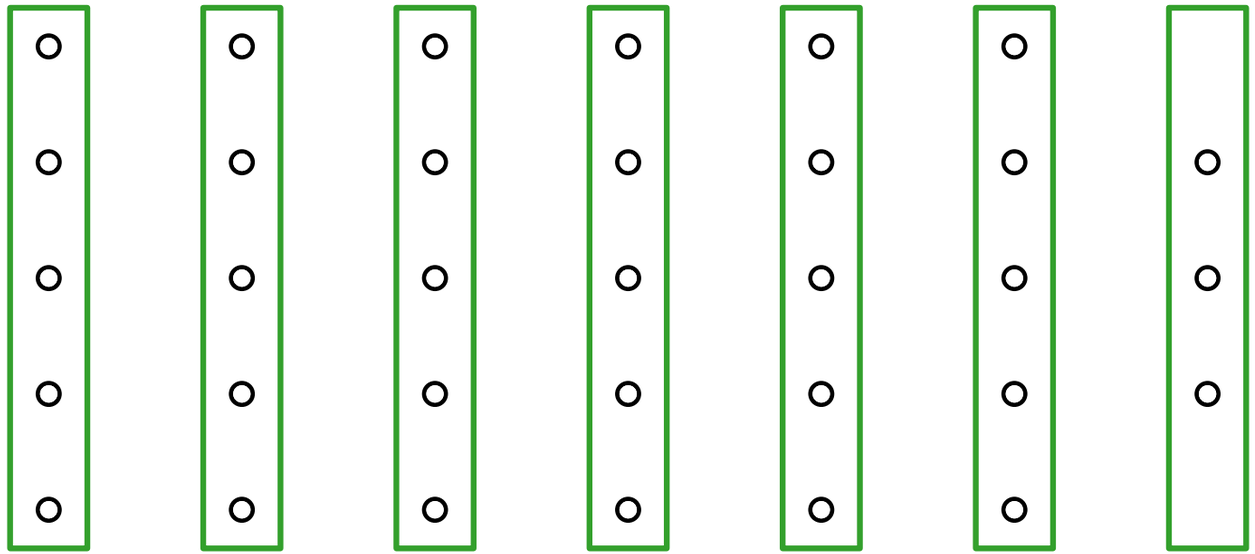
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.

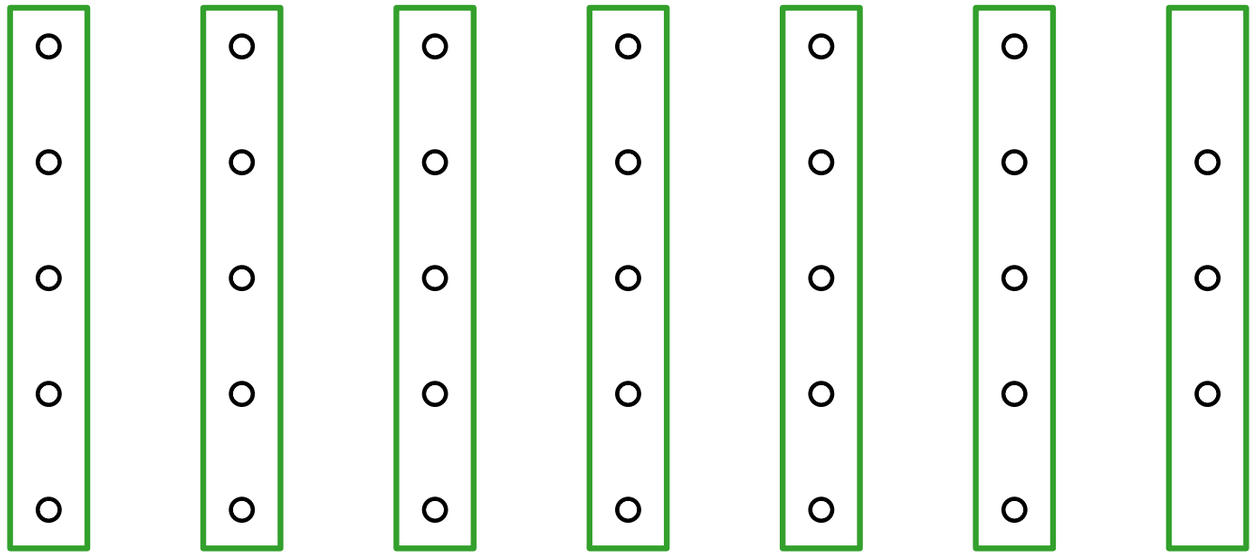


Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.

2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.

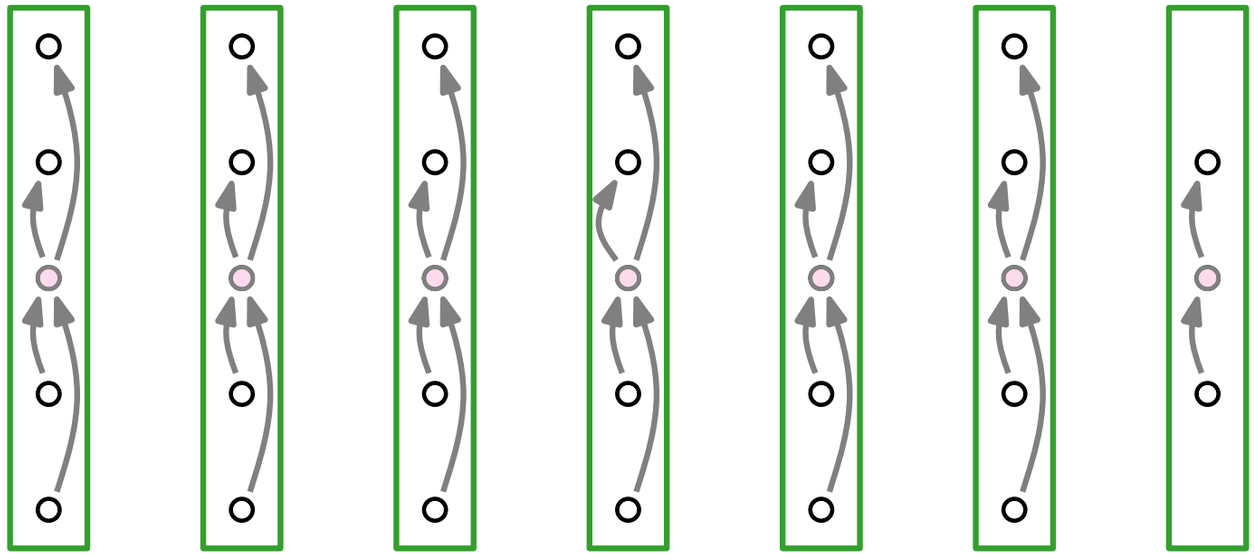


SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.

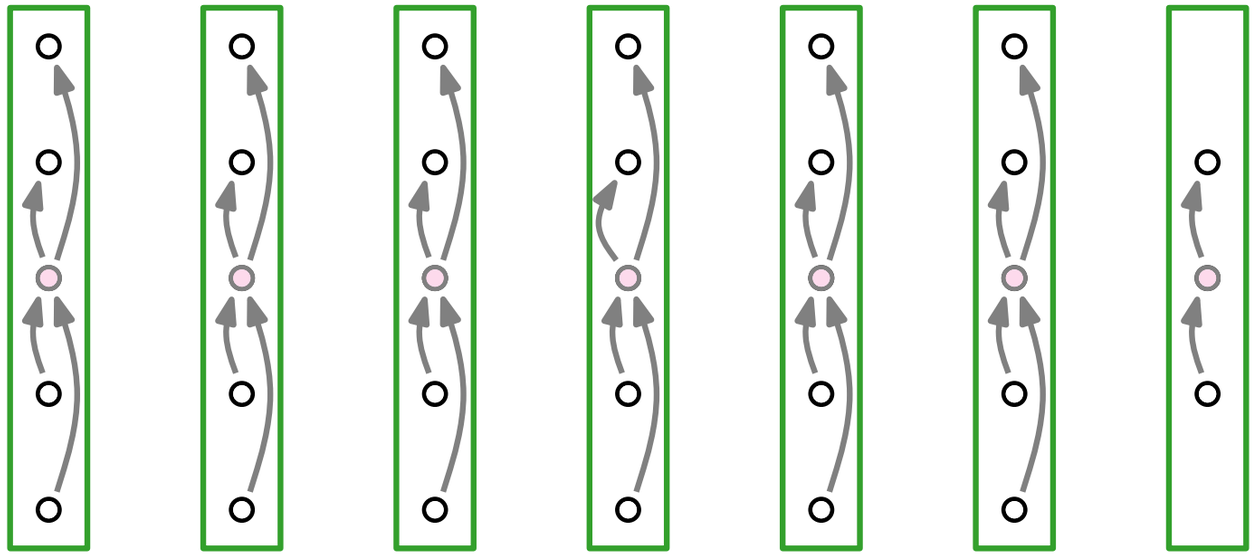
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

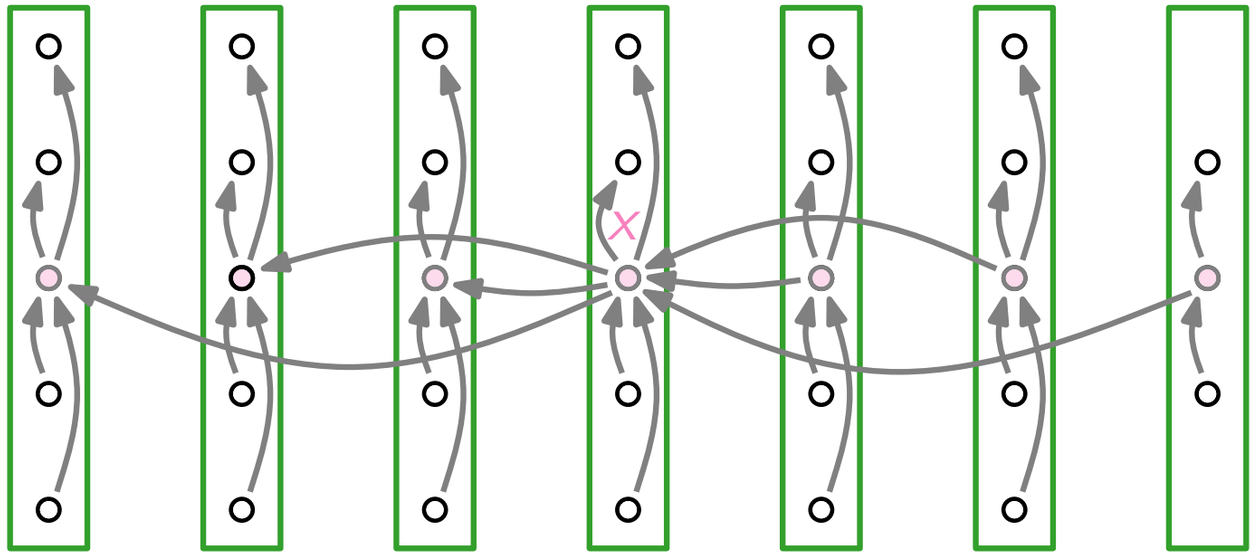
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.



SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

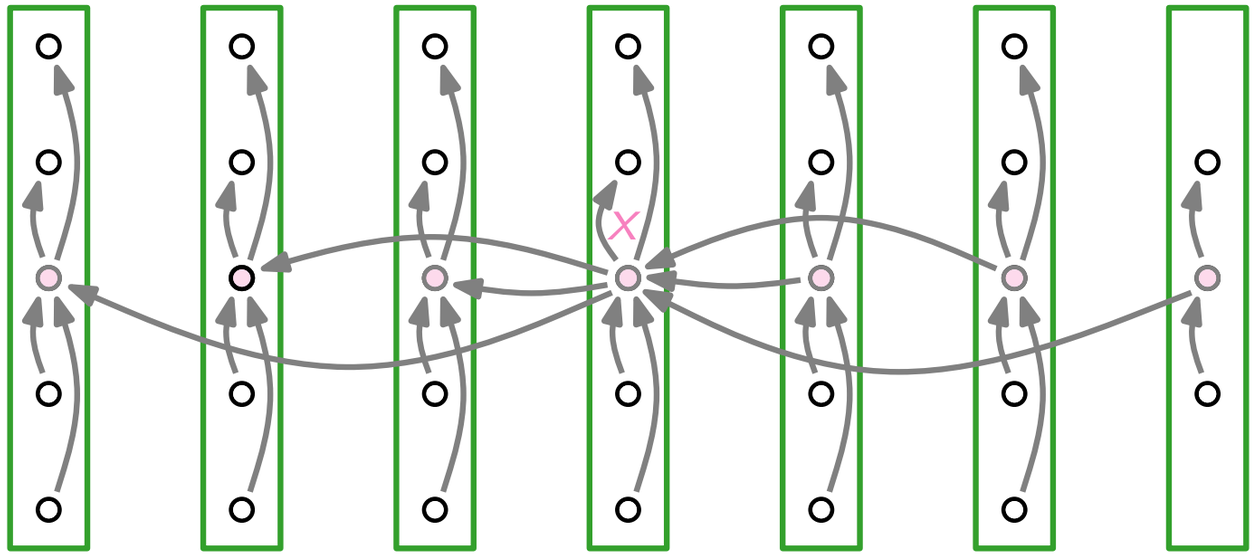
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

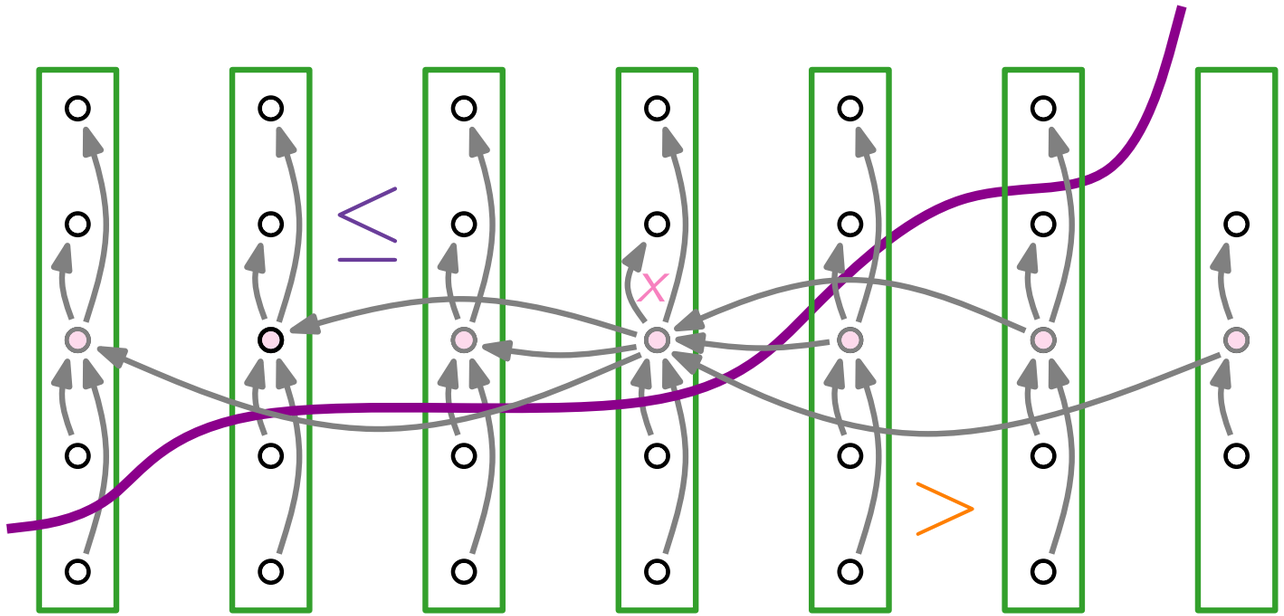
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

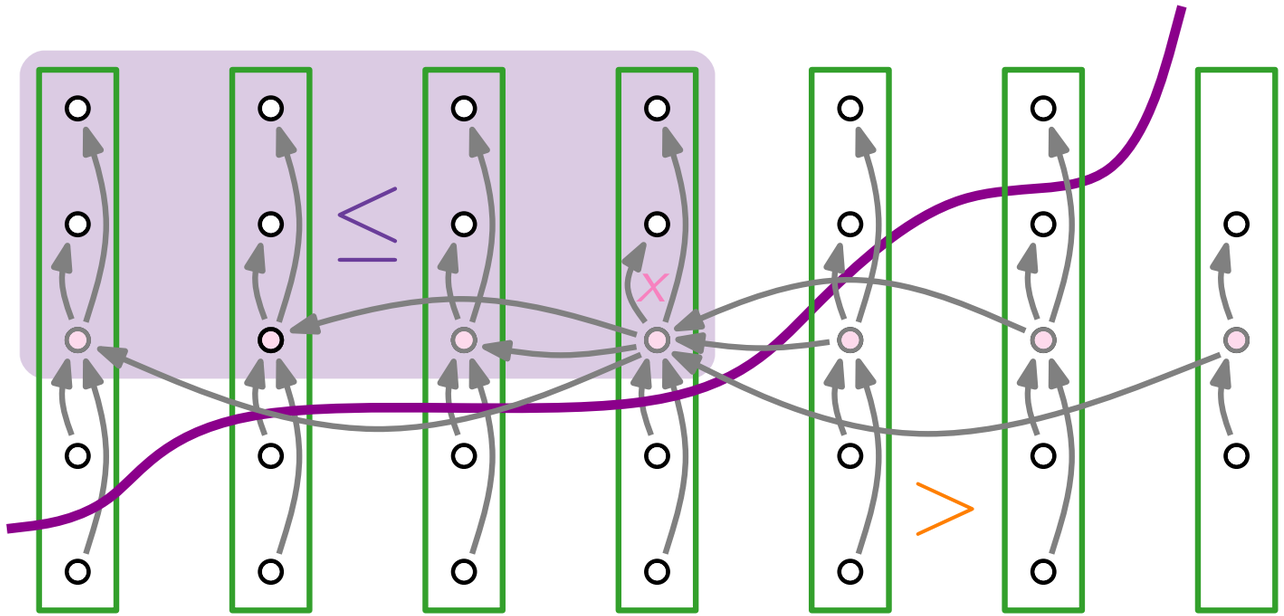
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

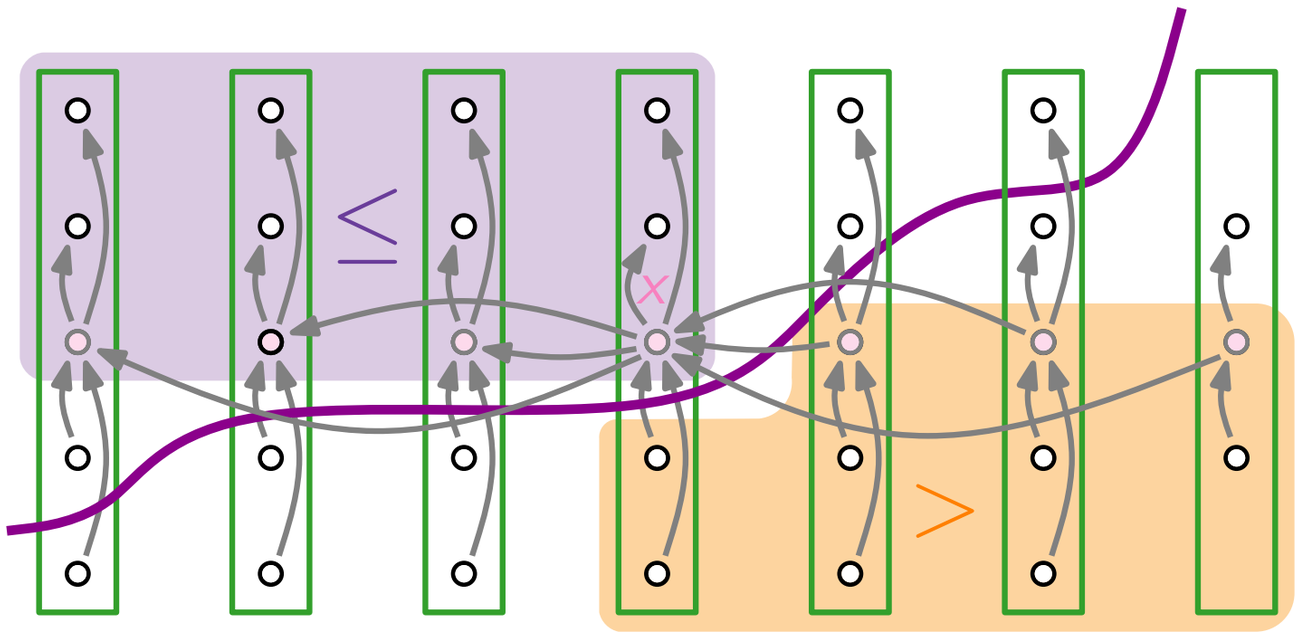
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

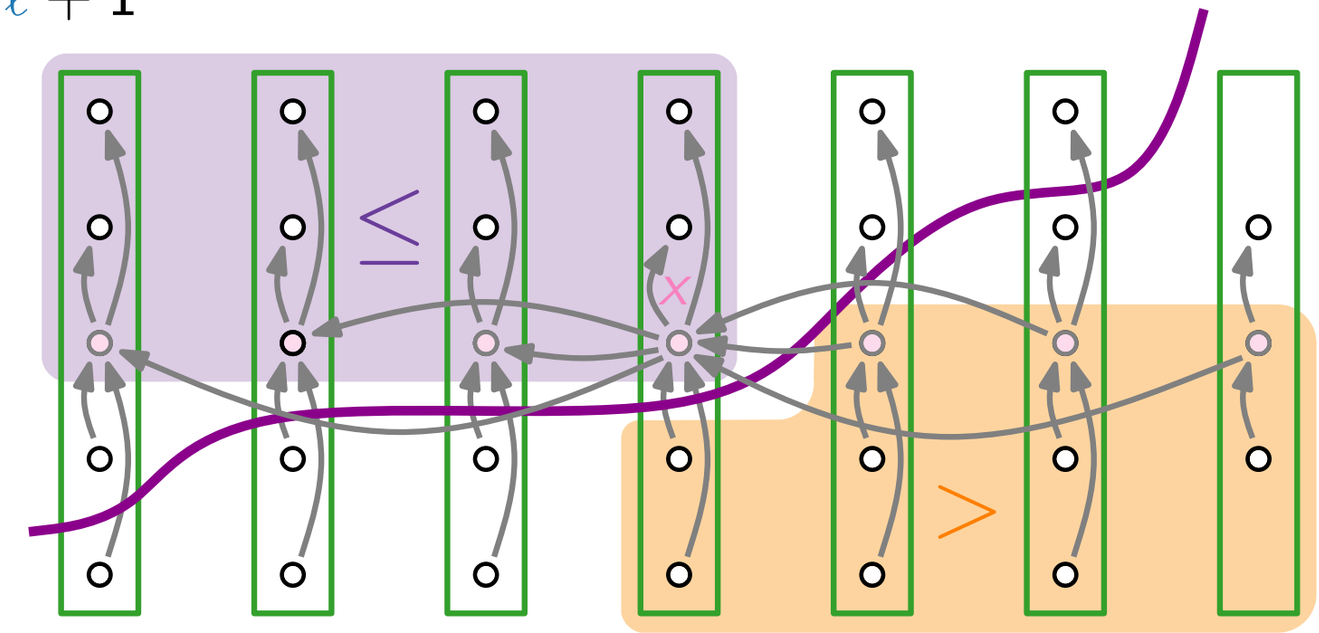
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

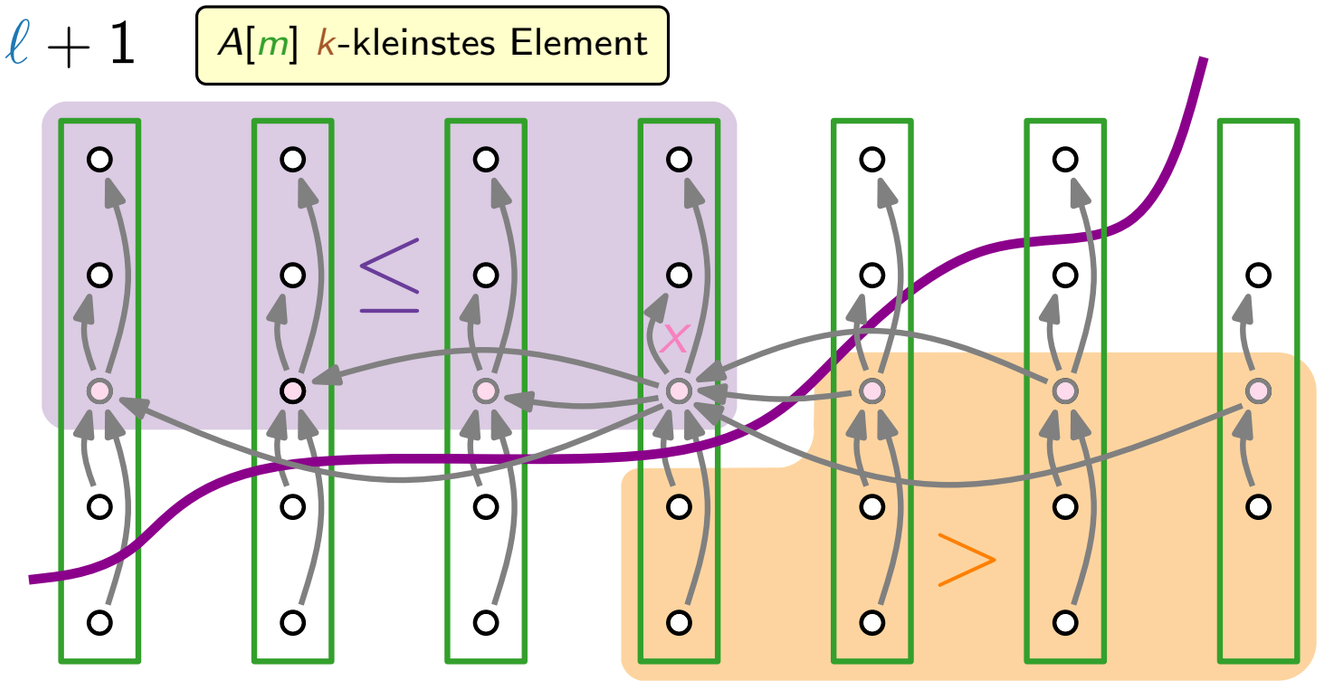
1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$



Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$



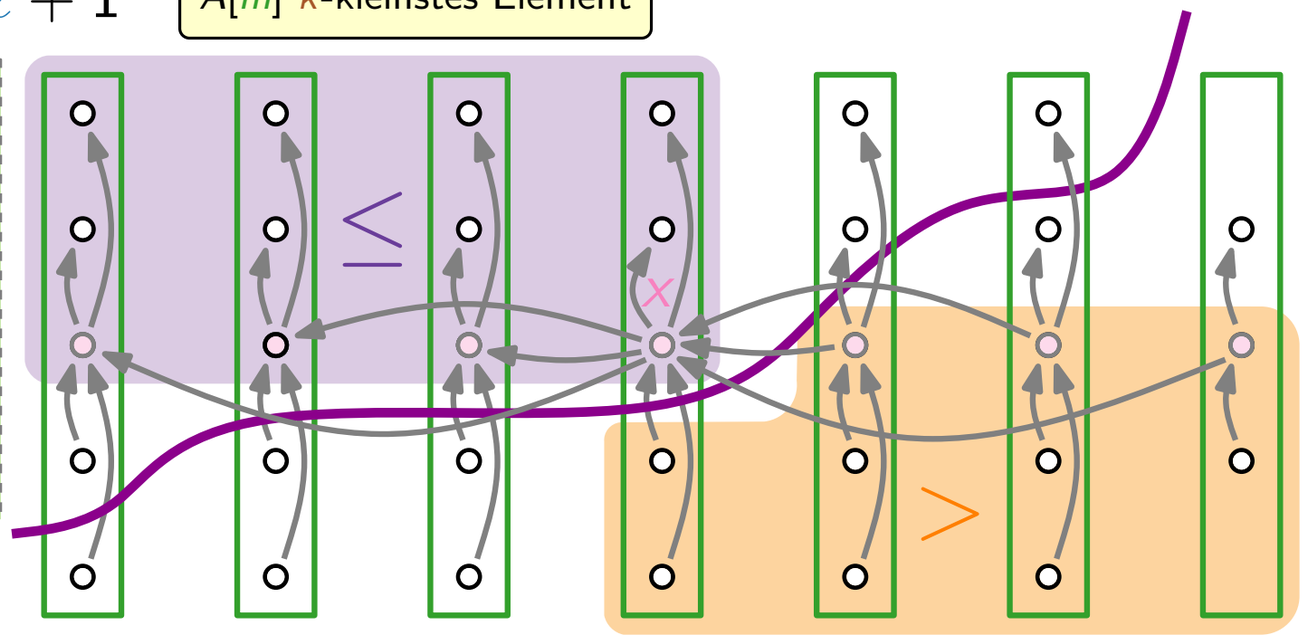
Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$

$A[m]$ k-kleinstes Element

5.
```
if i == k then return A[m]
else
    if i < k then
        return Select(A, ℓ, m − 1, i)
    else
        return Select(A, m + 1, r, i − k)
```

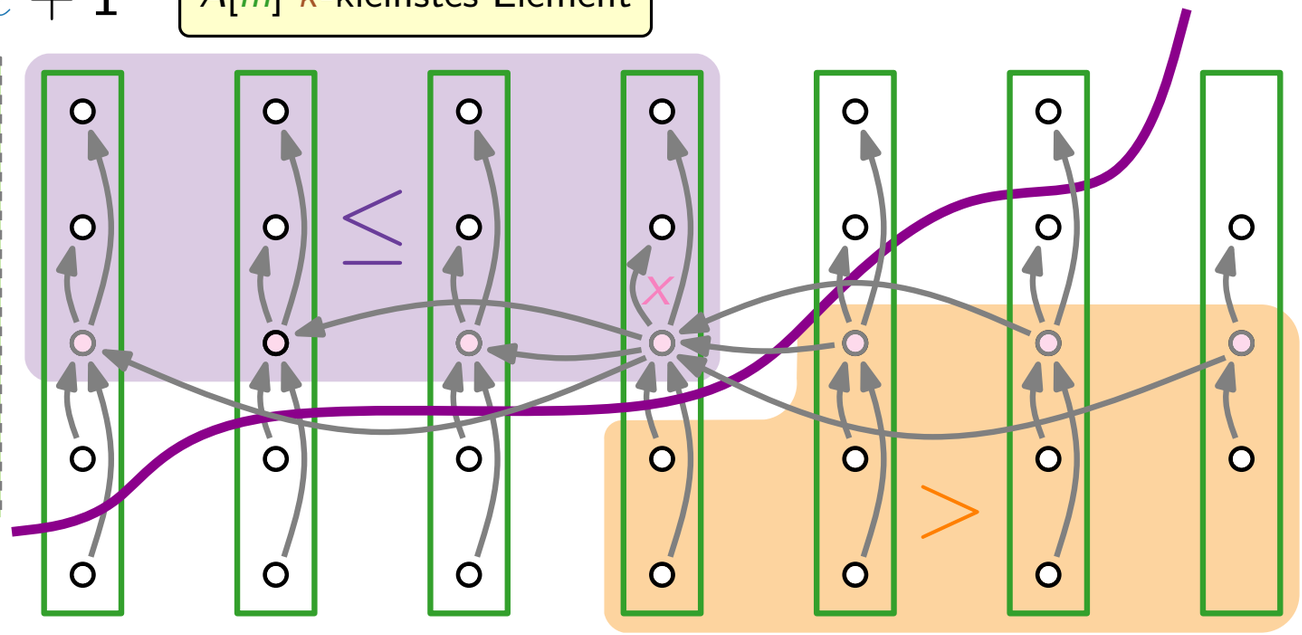


SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$
5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$
   else
   if $i < k$ **then**
   return SELECT$(A, \ell, m-1, i)$
   else
   return SELECT$(A, m+1, r, i-k)$

$A[m]$ k-kleinstes Element

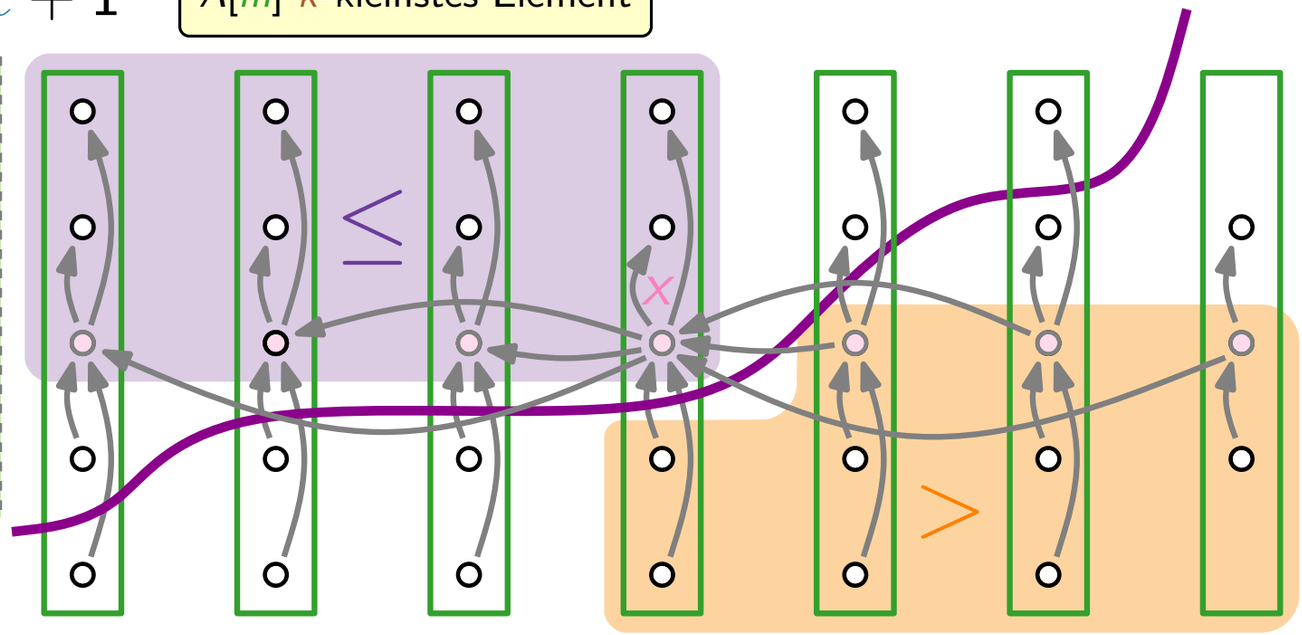


SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$
5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$
   else
   - **if** $i < k$ **then**
     - **return** SELECT$(A, \ell, m-1, i)$
   - **else**
     - **return** SELECT$(A, m+1, r, i-k)$

$A[m]$ k-kleinstes Element



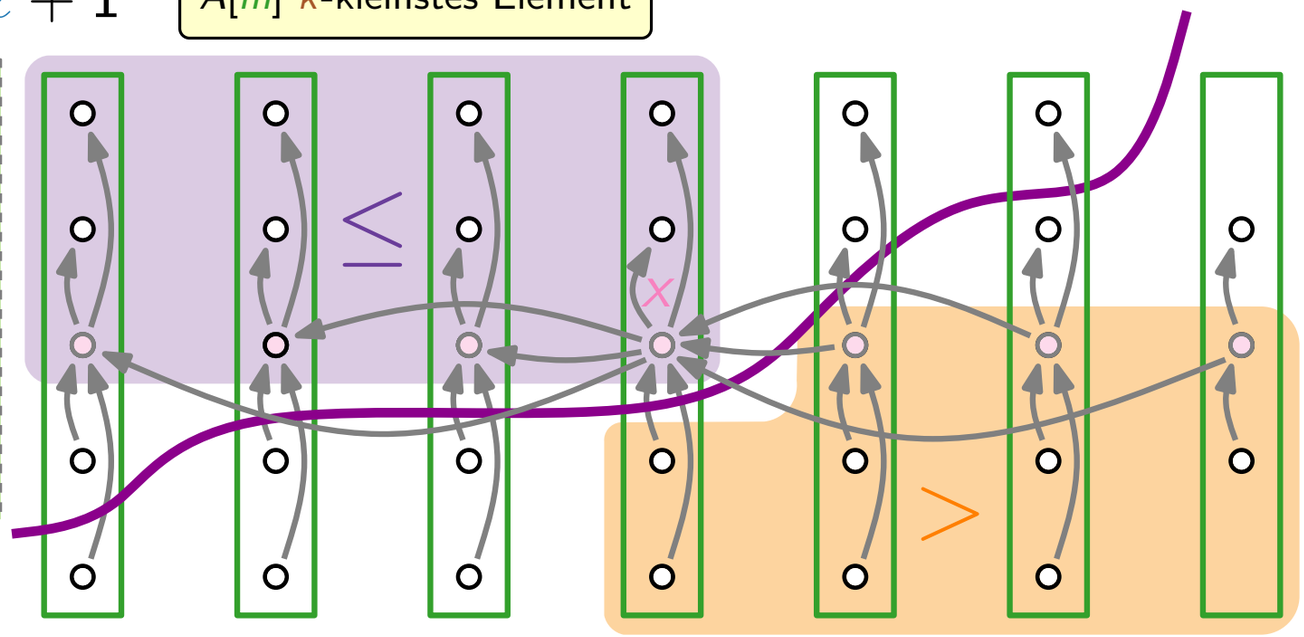
Anzahl(●) ≥

SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$
5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$
   else
   if $i < k$ **then**
   return SELECT$(A, \ell, m-1, i)$
   else
   return SELECT$(A, m+1, r, i-k)$

$A[m]$ k-kleinstes Element



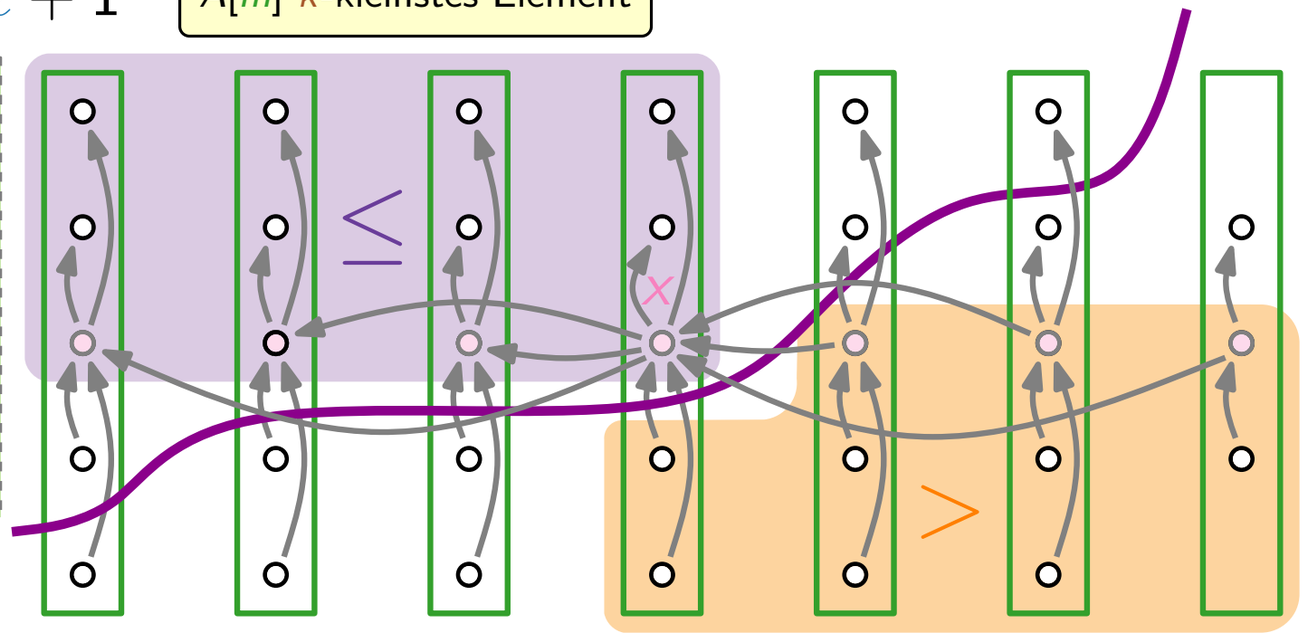
Anzahl(●) $\geq 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 1\right)$

SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$
5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$
   else
   if $i < k$ **then**
   return SELECT$(A, \ell, m-1, i)$
   else
   return SELECT$(A, m+1, r, i-k)$

$A[m]$ k-kleinstes Element



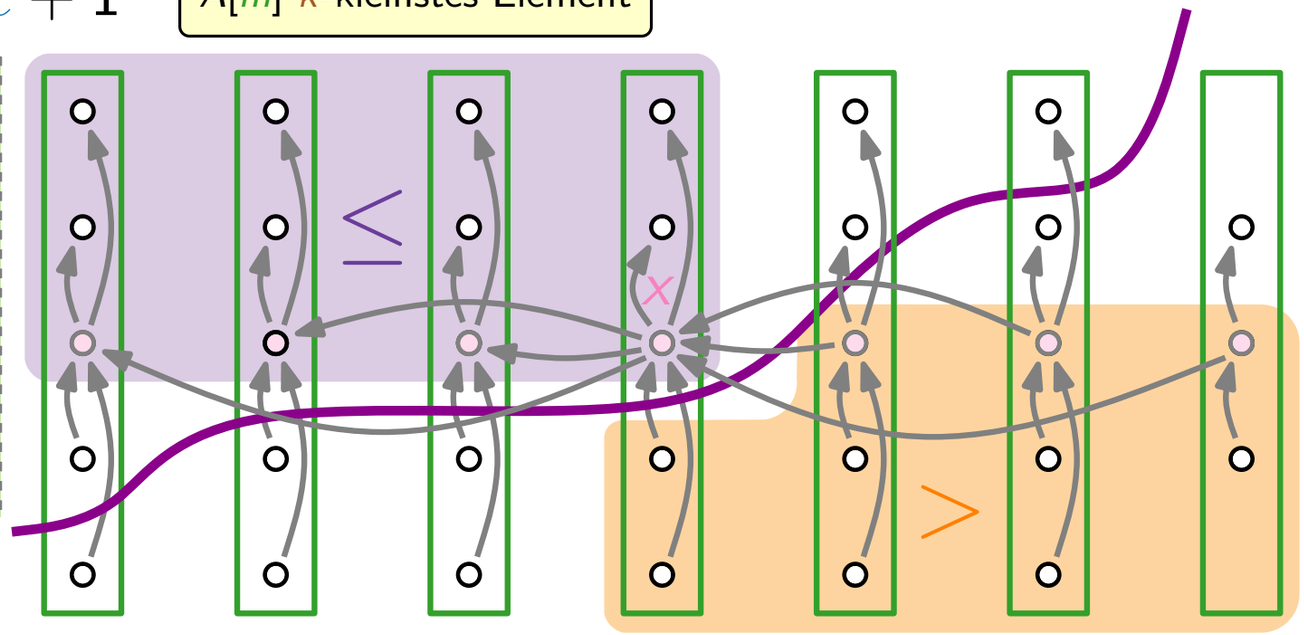
Anzahl(●) $\geq 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 1\right) \geq \frac{3n}{10} - 3$

SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$
5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$
   else
   if $i < k$ **then**
   return SELECT$(A, \ell, m-1, i)$
   else
   return SELECT$(A, m+1, r, i-k)$

$A[m]$ k-kleinstes Element



Anzahl(●) $\geq 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 1\right) \geq \frac{3n}{10} - 3$

SELECT: deterministisch

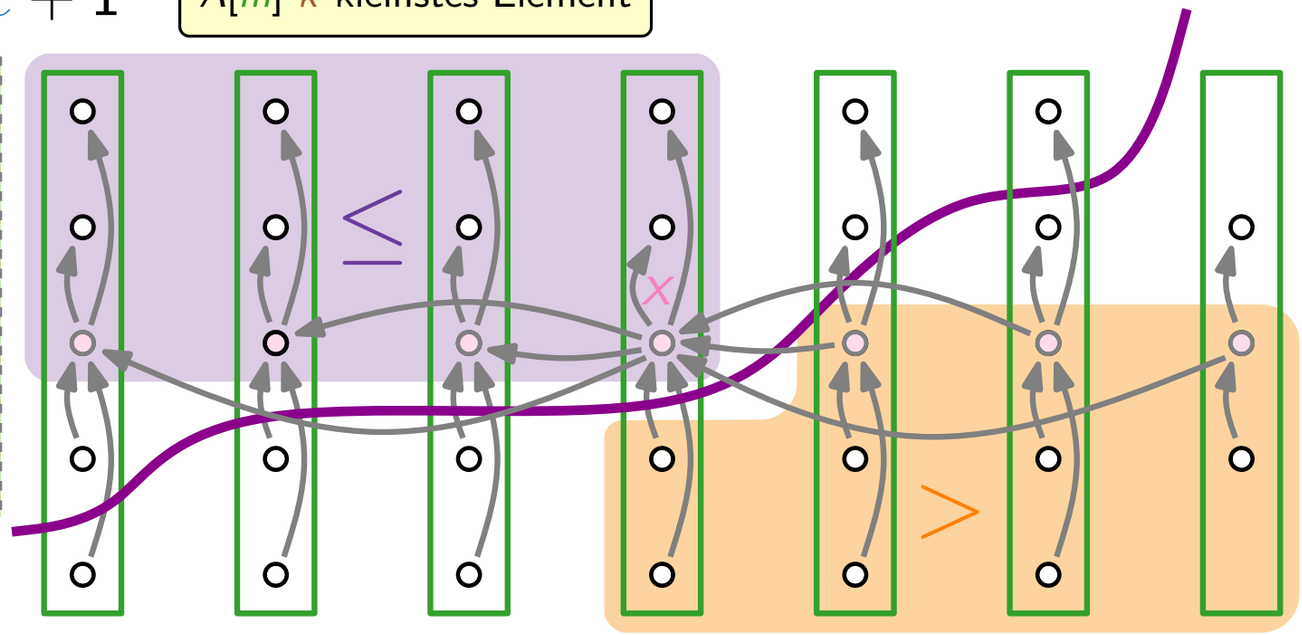
SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$

$A[m]$ k-kleinstes Element

5.
```
if i == k then return A[m]
else
    if i < k then
        return SELECT(A, ℓ, m − 1, i)
    else
        return SELECT(A, m + 1, r, i − k)
```

x

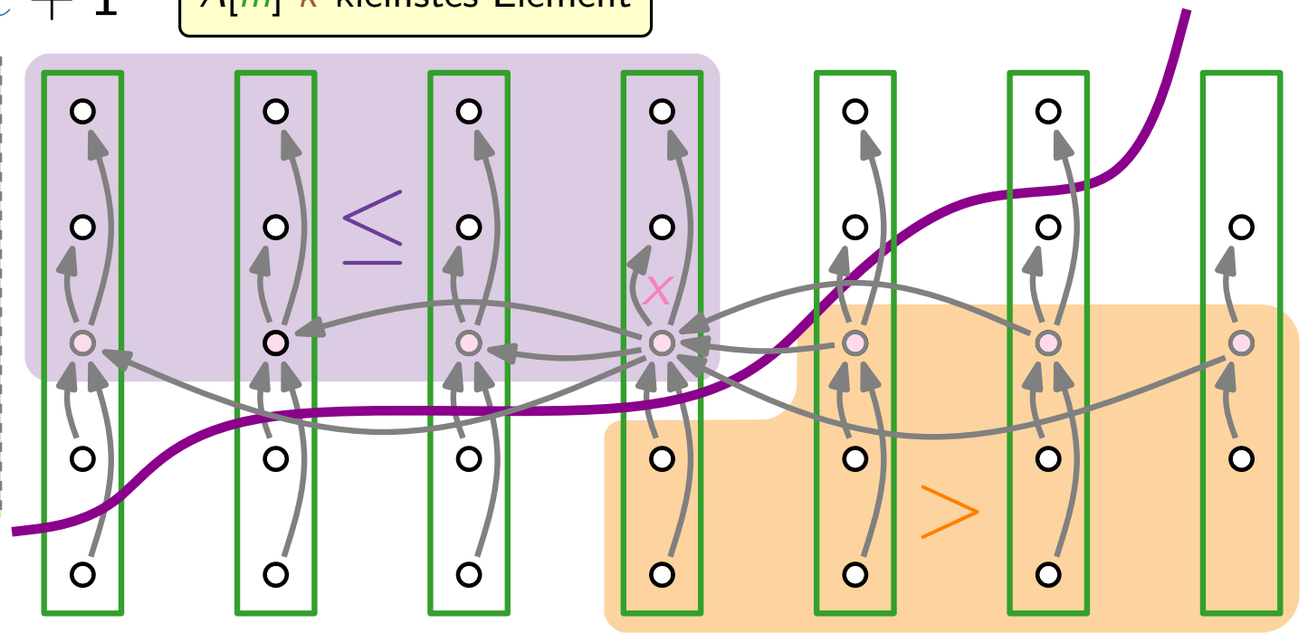


Anzahl(●) $\geq 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 1\right) \geq \frac{3n}{10} - 3$

SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$ — $A[m]$ k-kleinstes Element
5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$ (x)
   else
   if $i < k$ **then**
   return SELECT$(A, \ell, m-1, i)$ ($\leq 7n/10 + 3$ Elemente)
   else
   return SELECT$(A, m+1, r, i-k)$



Anzahl(●) $\geq 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 1\right) \geq \frac{3n}{10} - 3$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

Partition′:

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren:

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) =$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$V(n) \leq$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} & \text{falls } n \geq n_0, \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} & \text{falls } n \geq n_0, \\ \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} & \text{falls } n \geq n_0, \\ \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} & \text{falls } n \geq n_0, \\ \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 \quad)$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 \quad)$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad V(n) &\leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n \\ &= c \cdot (9n/10 + 4) \end{aligned}$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4)$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \; = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \;\; = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

≤ 0?!

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \; = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

≤ 0?!

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} =$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \; V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \; = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

≤ 0?!

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n \to \infty]{}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

≤ 0?!

$$\text{falls } c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 30^+$$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

≤ 0?!

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

≤ 0?!

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow \quad V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \quad = cn + \underbrace{(3n - c \cdot (n/10 - 4))}_{\leq 0?!}$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \underbrace{(3n - c \cdot (n/10 - 4))}_{\leq 0?!}$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \underbrace{(3n - c \cdot (n/10 - 4))}_{\leq 0?!}$$

$$\text{falls } c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10-3) \geq 4c$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \underbrace{(3n - c \cdot (n/10 - 4))}_{\leq 0?!}$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10-3) \geq 4c$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{4c}{c/10-3}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

$\textsc{Partition}'$: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n = cn + \underbrace{(3n - c \cdot (n/10 - 4))}_{\leq 0?!}$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10-3) \geq 4c$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{4c}{c/10-3}$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{40c}{c-30}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \ = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$ bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$\Rightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $V(n) \leq \underbrace{(30+\varepsilon)}_{c} \cdot n$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10-3) \geq 4c$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{4c}{c/10-3}$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{40c}{c-30}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \ = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$ bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$\Rightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ und $n \geq \frac{1200}{\varepsilon} + 40$ gilt: $V(n) \leq \underbrace{(30+\varepsilon)}_{c} \cdot n$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10-3) \geq 4c$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{4c}{c/10-3}$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{40c}{c-30}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \ = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$$\Rightarrow \text{ für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und } n \geq \frac{1200}{\varepsilon} + 40 \text{ gilt: } V(n) \leq (30 + \varepsilon) \cdot n$$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10-4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10-3) \geq 4c$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{4c}{c/10-3}$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{40c}{c-30}$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathsf{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \ = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$

bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$\Rightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ und $n \geq \frac{1200}{\varepsilon} + 40$ gilt: $V(n) \leq (30 + \varepsilon) \cdot n$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10 - 4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10 - 3) \geq 4c$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{4c}{c/10-3}$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{40c}{c-30}$

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

- Der Algorithmus LazySelect [Floyd & Rivest, 1975] löst das Auswahlproblem mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathcal{O}(1/\sqrt[4]{n})$ mit $\frac{3}{2}n + o(n)$ Vergleichen

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

- Der Algorithmus LazySelect [Floyd & Rivest, 1975] löst das Auswahlproblem mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathcal{O}(1/\sqrt[4]{n})$ mit $\frac{3}{2}n + o(n)$ Vergleichen
- Die besten deterministischen Auswahl-Algorithmen (*sehr kompliziert!*) benötigen $3n$ Vergleiche im schlechtesten Fall.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

- Der Algorithmus LazySelect [Floyd & Rivest, 1975] löst das Auswahlproblem mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathcal{O}(1/\sqrt[4]{n})$ mit $\frac{3}{2}n + o(n)$ Vergleichen
- Die besten deterministischen Auswahl-Algorithmen (*sehr kompliziert!*) benötigen $3n$ Vergleiche im schlechtesten Fall.
- **Jeder** deterministische Auswahl-Algorithmus benötigt im schlechtesten Fall mindestens $2n$ Vergleiche.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

- Der Algorithmus LazySelect [Floyd & Rivest, 1975] löst das Auswahlproblem mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathcal{O}(1/\sqrt[4]{n})$ mit $\frac{3}{2}n + o(n)$ Vergleichen

- Die besten deterministischen Auswahl-Algorithmen (*sehr kompliziert!*) benötigen $3n$ Vergleiche im schlechtesten Fall.
- **Jeder** deterministische Auswahl-Algorithmus benötigt im schlechtesten Fall mindestens $2n$ Vergleiche.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

- Der Algorithmus LazySelect [Floyd & Rivest, 1975] löst das Auswahlproblem mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathcal{O}(1/\sqrt[4]{n})$ mit $\frac{3}{2}n + o(n)$ Vergleichen

- Die besten deterministischen Auswahl-Algorithmen (*sehr kompliziert!*) benötigen $3n$ Vergleiche im schlechtesten Fall.
- **Jeder** deterministische Auswahl-Algorithmus benötigt im schlechtesten Fall mindestens $2n$ Vergleiche.

Satz. Durch Suche des Medians in $\mathcal{O}(n)$ Zeit kann QuickSort* im *Worst-Case* in Zeit sortieren.

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

- Der Algorithmus LazySelect [Floyd & Rivest, 1975] löst das Auswahlproblem mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathcal{O}(1/\sqrt[4]{n})$ mit $\frac{3}{2}n + o(n)$ Vergleichen

- Die besten deterministischen Auswahl-Algorithmen (*sehr kompliziert!*) benötigen $3n$ Vergleiche im schlechtesten Fall.
- **Jeder** deterministische Auswahl-Algorithmus benötigt im schlechtesten Fall mindestens $2n$ Vergleiche.

Satz. Durch Suche des Medians in $\mathcal{O}(n)$ Zeit kann QuickSort* im *Worst-Case* in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit sortieren.

Vergleich Sortieralgorithmen

	Bester Fall	Erw. Fall	Schl. Fall	in-situ	stabil
InsertionSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
SelectionSort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✗
BubbleSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
MergeSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✗	✓
HeapSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
QuickSort*	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	✓	✗
CountingSort	$\mathcal{O}(n+k)$	$\mathcal{O}(n+k)$	$\mathcal{O}(n+k)$	✗	✓
RadixSort	$\mathcal{O}(s \cdot (n+b))$	$\mathcal{O}(s \cdot (n+b))$	$\mathcal{O}(s \cdot (n+b))$	✗	✓
BucketSort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$ wenn Eingabe zufällig gleichverteilt	$\mathcal{O}(n^2)$	✗	✓

Vergleich Sortieralgorithmen

	Bester Fall	Erw. Fall	Schl. Fall	in-situ	stabil
InsertionSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
SelectionSort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✗
BubbleSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
MergeSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✗	✓
HeapSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
QuickSort*	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
CountingSort	$\mathcal{O}(n + k)$	$\mathcal{O}(n + k)$	$\mathcal{O}(n + k)$	✗	✓
RadixSort	$\mathcal{O}(s \cdot (n + b))$	$\mathcal{O}(s \cdot (n + b))$	$\mathcal{O}(s \cdot (n + b))$	✗	✓
BucketSort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$ wenn Eingabe zufällig gleichverteilt	$\mathcal{O}(n^2)$	✗	✓