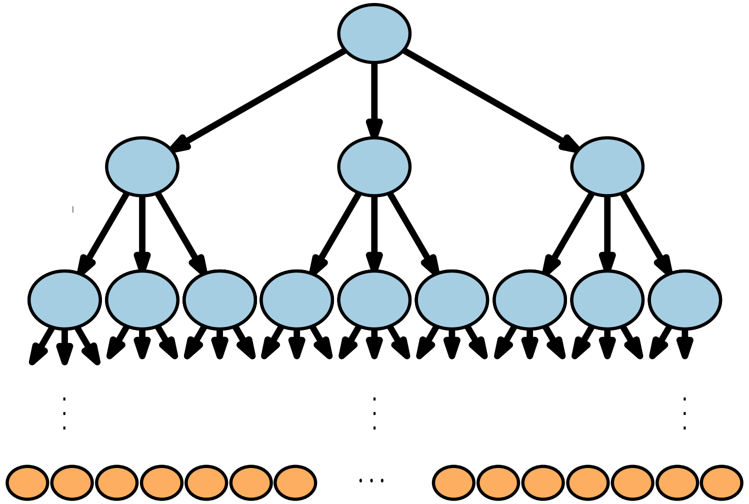
Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen



Vorlesung 5:
Rekursionsgleichungen

$$\boxed{T(n) = aT(n/b) + f(n)}$$

Alexander Wolff

Wintersemester 2025

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + dn \quad \text{(wegen } \textbf{IA} \text{ für } k = \tfrac{n}{2}\text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + dn$$

$$= c \cdot n \log_2 n - cn + dn$$

$$= c \cdot n \log_2 n + (d - c)n$$

$$\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq d$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für n = Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \quad (\text{mit } T(1) = 0)$

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \le c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \le c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \le c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\le c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \qquad (\text{wegen } \mathbf{IA}) \\ &\le c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\le c \cdot n + 1 \quad ⚡ \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\ &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \\ &= c \cdot n + 3 \quad ↯ \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$ ✓

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für eine Konstante $c > 0$. ✓

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

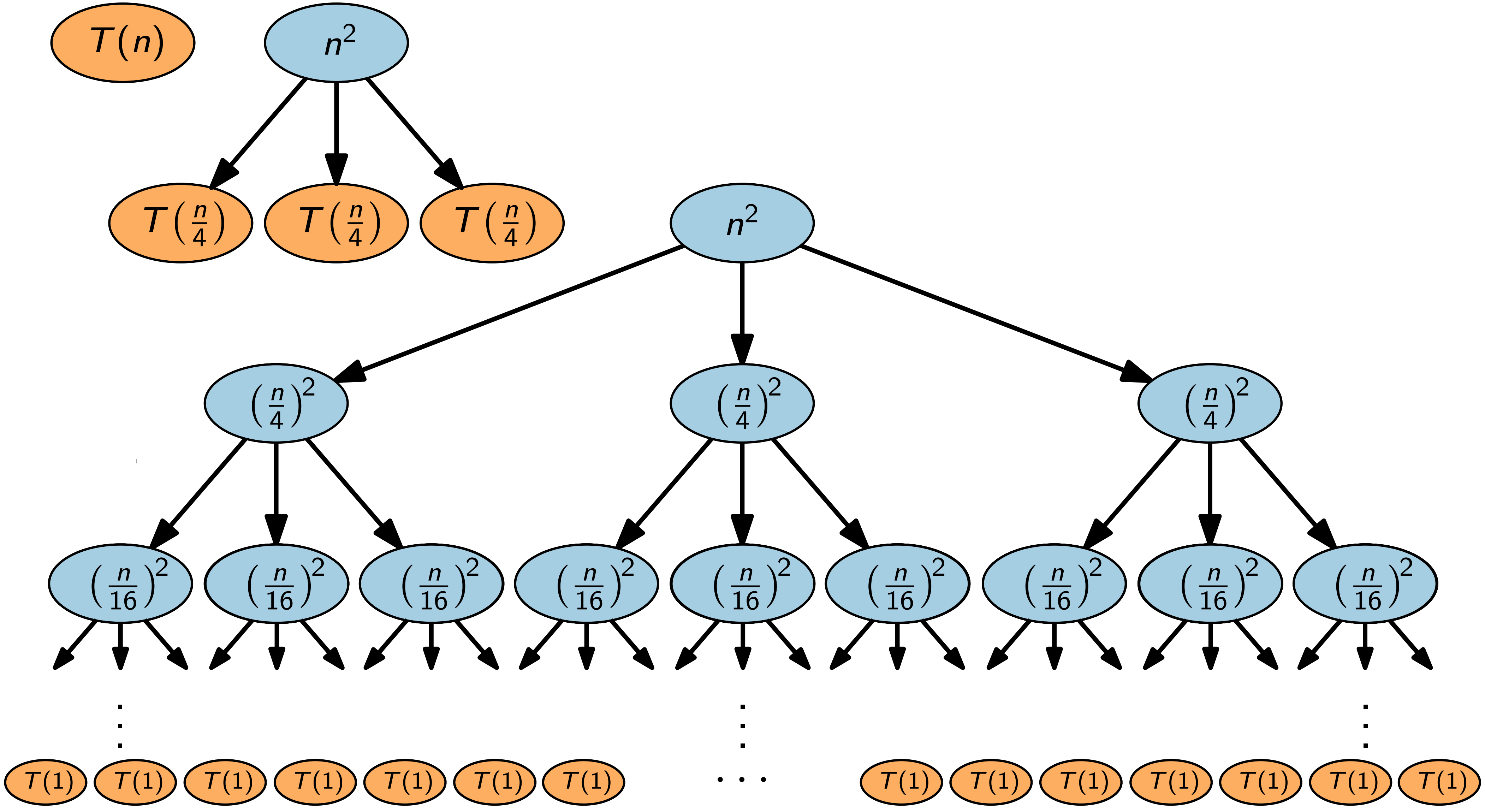
Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$
$$\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1$$
$$\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - 2d + 1$$
$$\leq c \cdot n - d \quad \text{falls } d \geq 1.$$
✓

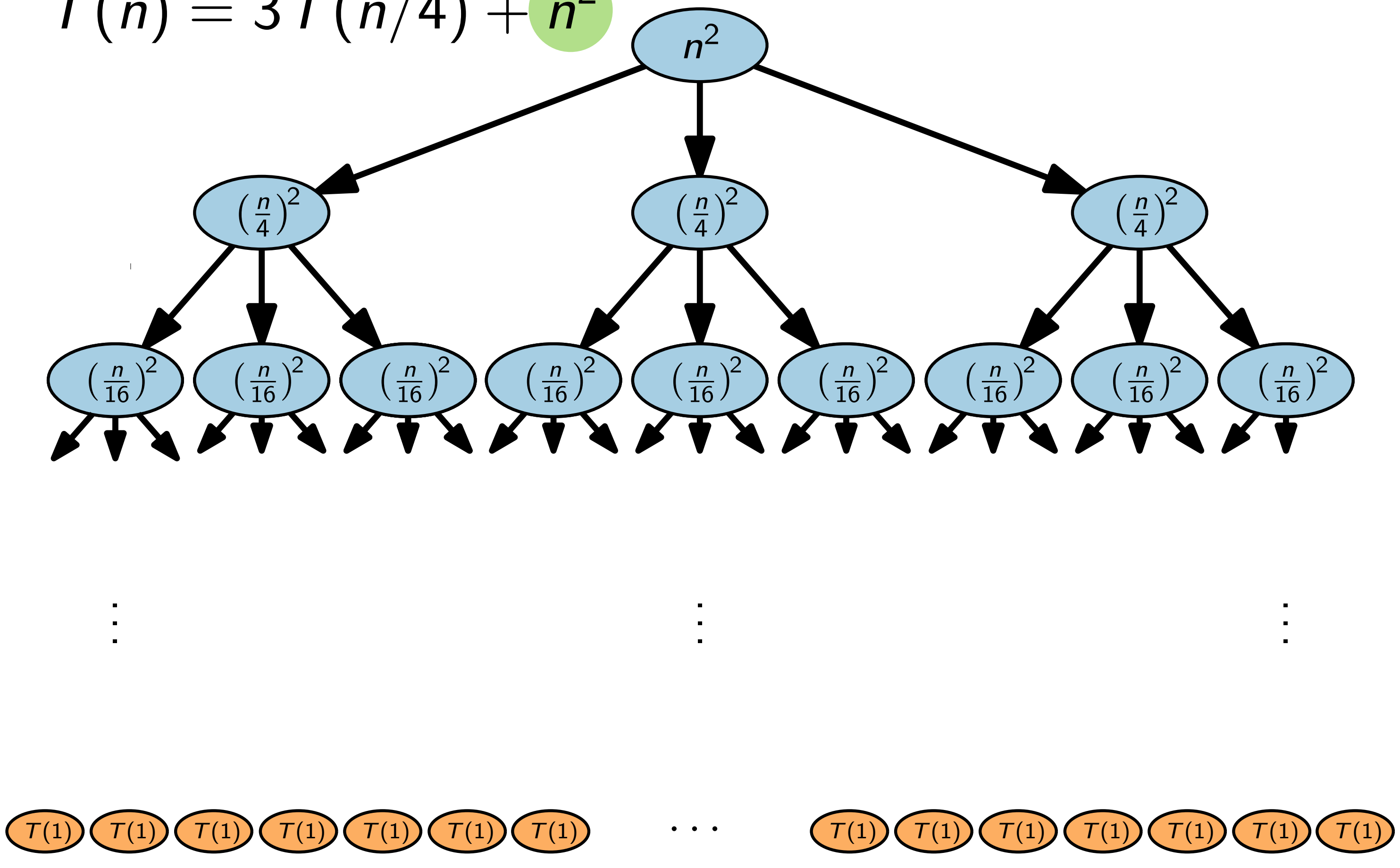
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

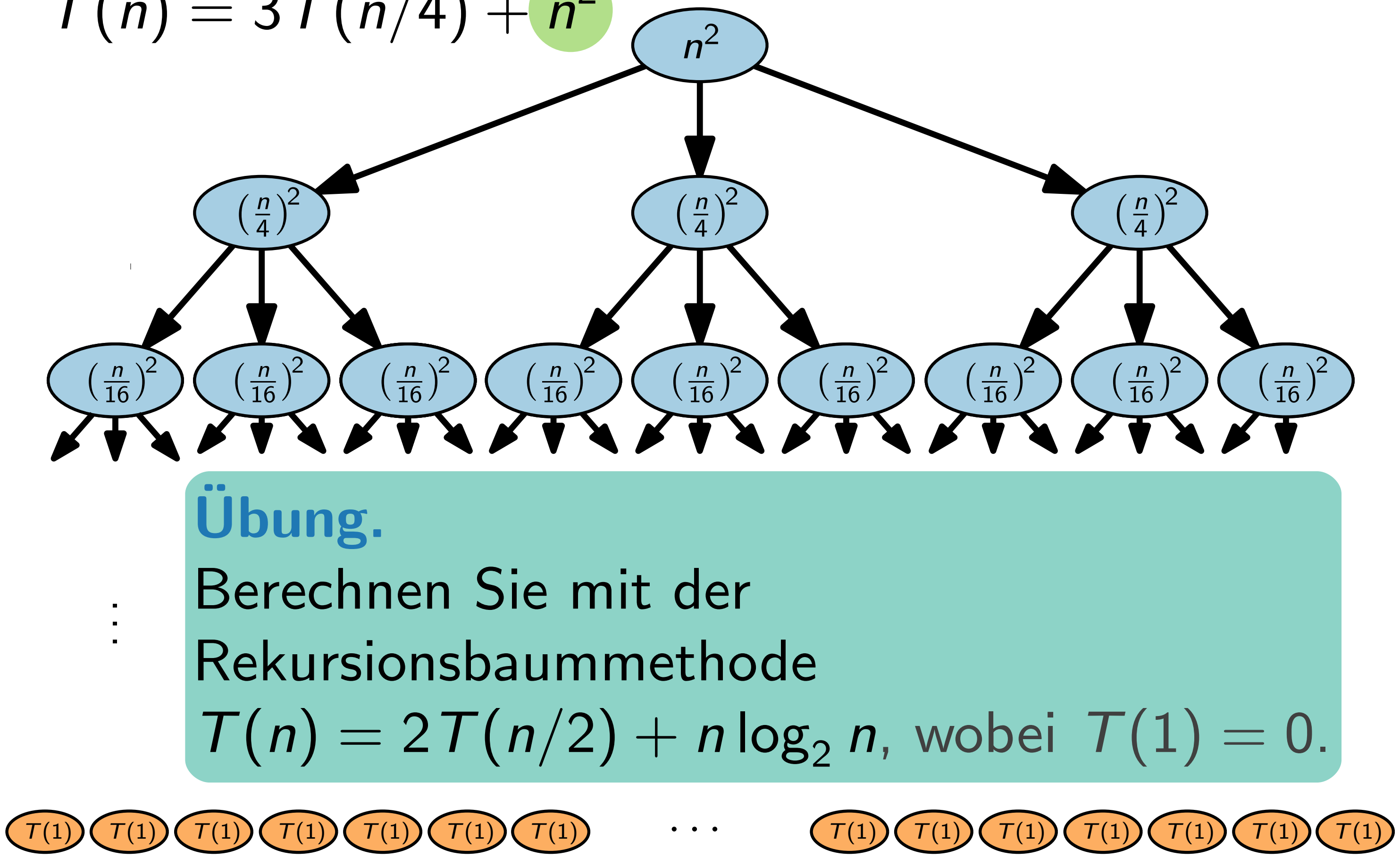
0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = \underbrace{n^{\log_4 3}}_{\text{unterste Ebene}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2}_{\text{andere Ebenen}} \leq n^{0,793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



Übung.
Berechnen Sie mit der Rekursionsbaummethode
$T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$, wobei $T(1) = 0$.

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \le n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)$!

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **asymptotisch positiv**...

...und auch da nicht in allen Fällen!

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Definition. Die **Regularitätsbedingung** ist erfüllt, falls

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

für ein $c < 1$ und für alle großen n.

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow\ a = 3\,(\geq 1),\ b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

$$\underbrace{\text{Das ist Fall 3!} \quad \Rightarrow \quad T \in \Theta(f) = \Theta(n^2) \quad \Box}_{\text{Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:}}$$

Üben! Hausaufgaben!

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein! ✓

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

  Also können wir die Meistermethode hier **nicht** verwenden!

  $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$, aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$ **!**

  Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^{ε}, für jedes $\varepsilon > 0$.

  PS: Wie könnte man das beweisen?