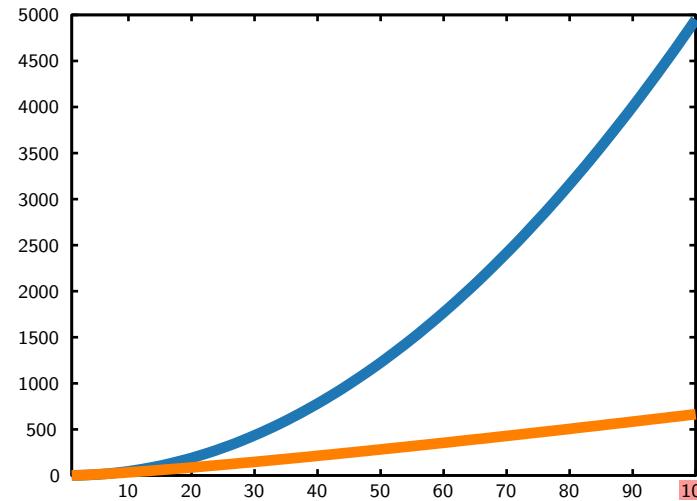


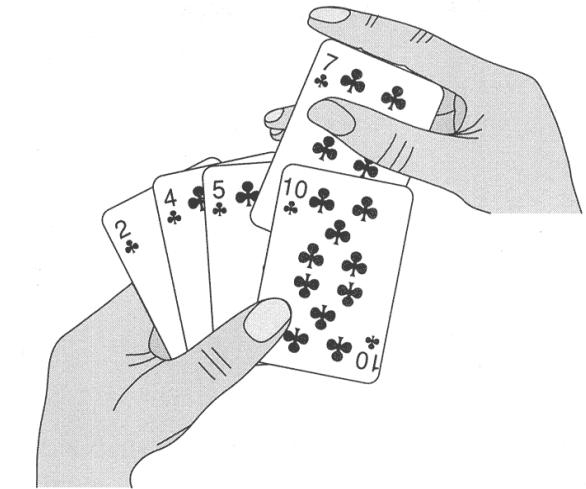
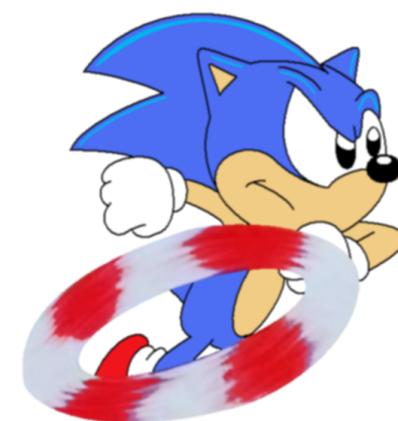


Algorithmen und Datenstrukturen



Vorlesung 3: Laufzeitanalyse

Alexander Wolff



Wintersemester 2025

Recap

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?
2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?
3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?
4. Wie beweisen wir die Korrektheit
 - a) einer Schleife?
 - b) eines inkrementellen Algorithmus?
 - c) eines rekursiven Algorithmus?

Laufzeit von INSERTION SORT

```
INSERTIONSORT(int[] A)
for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
        A[i + 1] = A[i]
        i = i - 1
    A[i + 1] = key
```

Bester Fall.

Array ist bereits aufsteigend sortiert.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$\Rightarrow A[i] > \text{key}$ nie erfüllt.

\Rightarrow Für jedes j nur 1 Vergleich.

\Rightarrow Laufzeit: $n - 1$ Vergleiche

Wie lang braucht dieser Algorithmus?

Wir zählen nur Vergleiche zwischen Schlüsseln.

Laufzeit wird bzgl. der Eingabegröße n gemessen.

Hier: $n = A.length$.

Antwort: kommt drauf an...

Analysieren meistens schlechtesten Fall

Schlechtester Fall.

Array ist absteigend sortiert.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$\Rightarrow A[i] > \text{key}$ immer erfüllt (bis $i = 0$)

\Rightarrow Für jedes j gibt es $j - 1$ Vergleiche.

\Rightarrow Laufzeit $\sum_{j=2}^n (j - 1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$

1) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ arithmetische Reihe

Laufzeit von MERGESORT

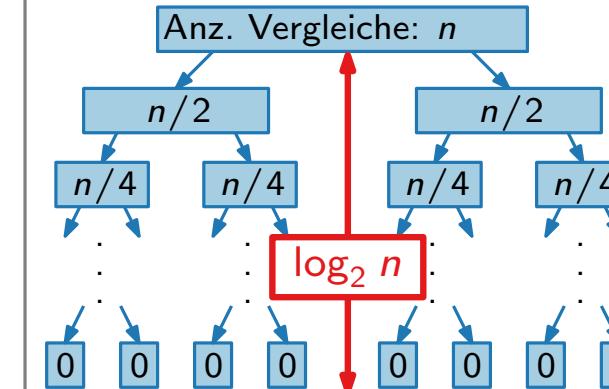
MERGESORT(int[] A, int $\ell = 1$, int $r = A.length$)

```

if  $\ell < r$  then
     $m = \lfloor (\ell + r)/2 \rfloor$ 
    MERGESORT(A,  $\ell$ ,  $m$ )
    MERGESORT(A,  $m + 1$ ,  $r$ )
    MERGE(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ )
} teile
} herrsche
} kombiniere

```

Rekursionsbaum von MERGESORT



Effizient? ✓

Sei $V_{\text{MS}}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MERGESORT zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{\text{MS}}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{\text{MS}}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases} = n \cdot \log_2 n \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{falls } n \\ \text{Zweierpotenz} \\ \hline \end{array}$$

Beweis. Per Induktion über n .

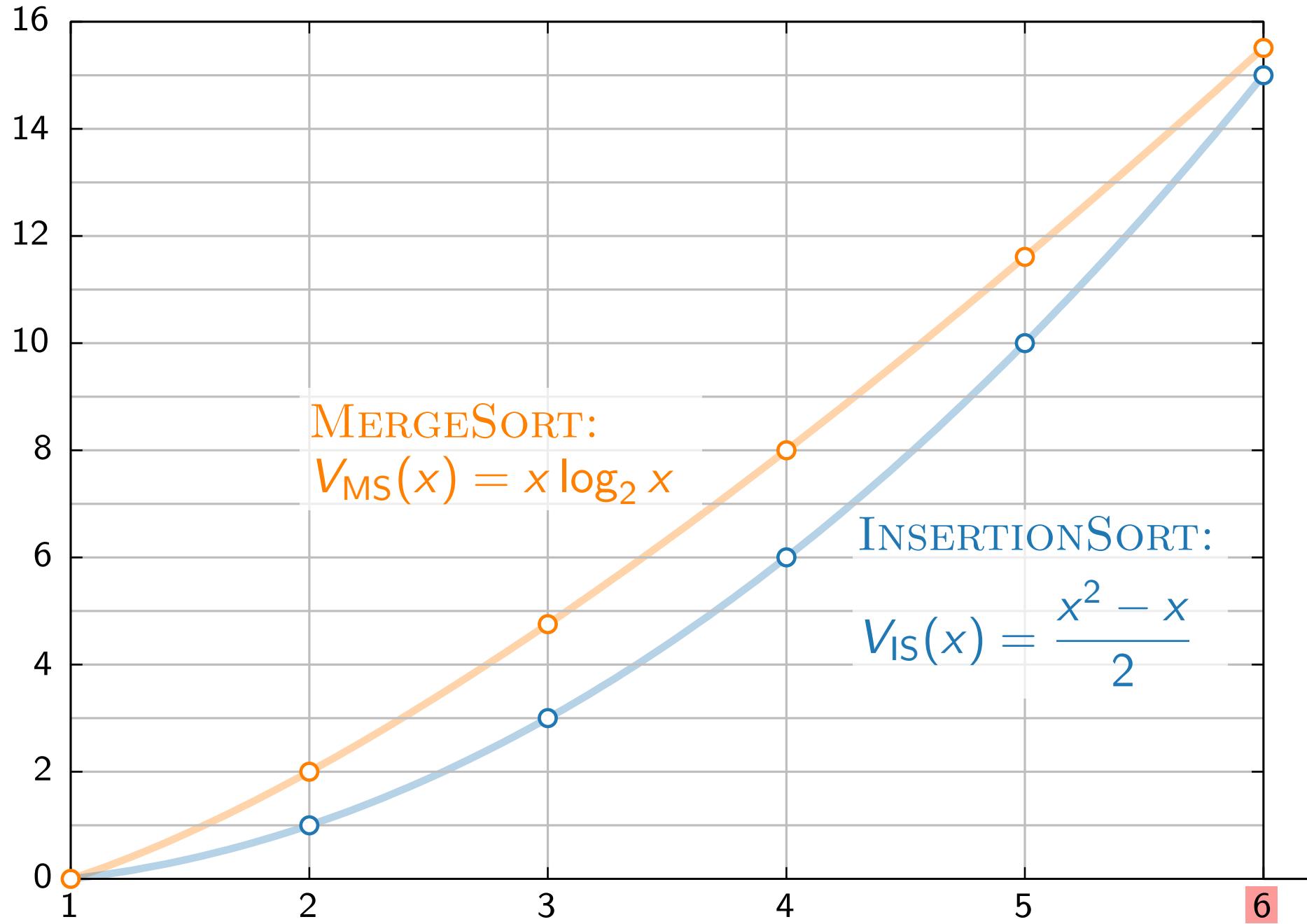
Induktionsanfang: $V_{\text{MS}}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{\text{MS}}(n) = 2V_{\text{MS}}\left(\frac{n}{2}\right) + n \stackrel{n>1}{=} 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n = n \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^1) + n = n \log_2 n$ ✓

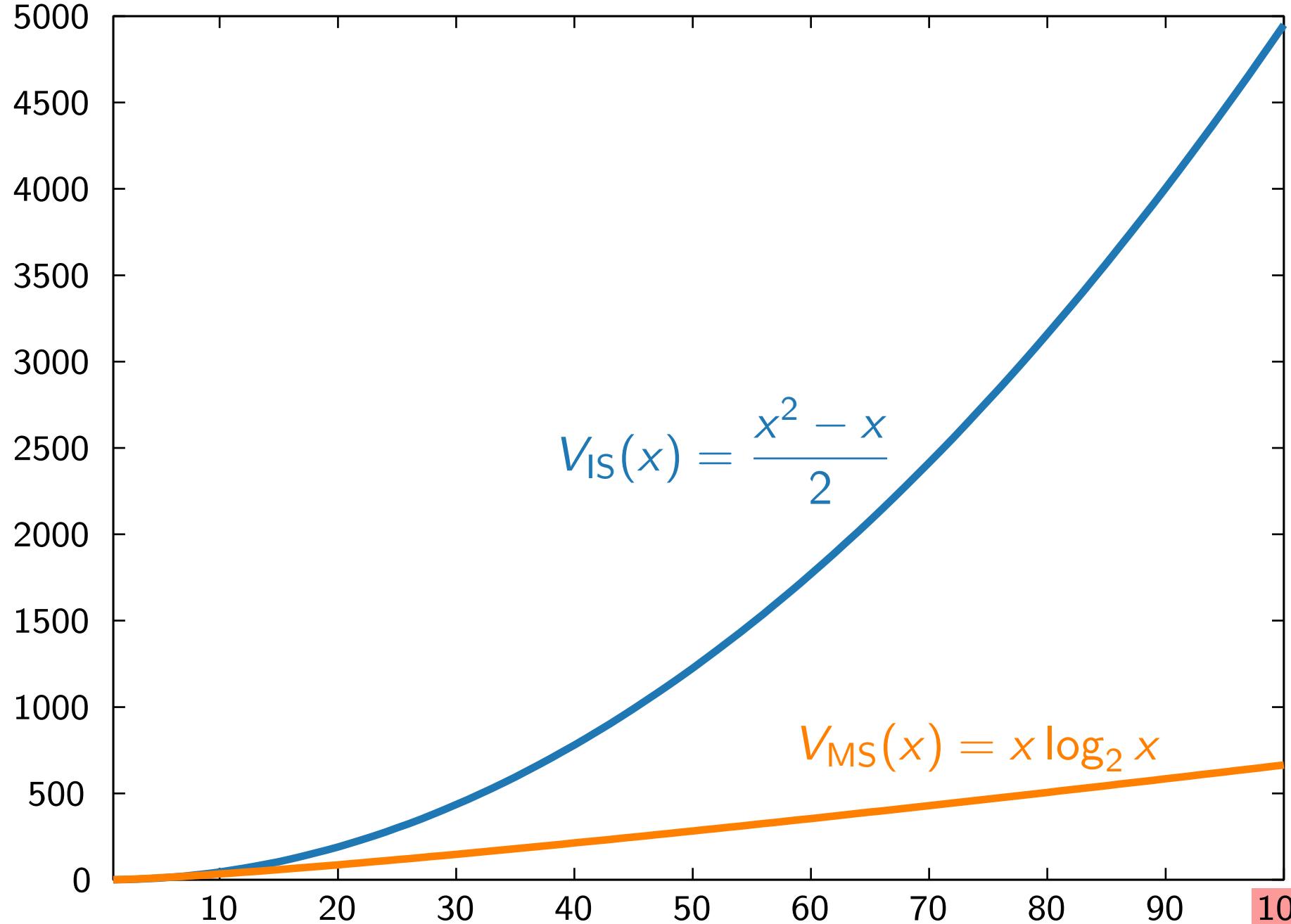
Vergleich Laufzeiten

	Bester Fall	Schlechtester Fall	
INSERTION SORT	$n - 1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	Geht das besser?
SELECTION SORT	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	
BUBBLE SORT	$n - 1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	
BOGO SORT	$n - 1$	∞	Ist das besser?
MERGE SORT	$n \log_2 n$	$n \log_2 n$	

Vergleich INSERTIONSORT vs. MERGESORT



Vergleich INSERTIONSORT vs. MERGESORT



Tatsächliche Laufzeit

Was ist schneller?

ALGA(n)

$n = n + 1$

return n

oder

ALGB(n)

$n = n + 5$

return n

$a = a + 1$

oder

$a = a - 1$

$b = b + 1$

oder

$b = b + 100$

$c = c + 10$

oder

$c = c \cdot 10$

$d = A[0]$

oder

$d = A[100]$

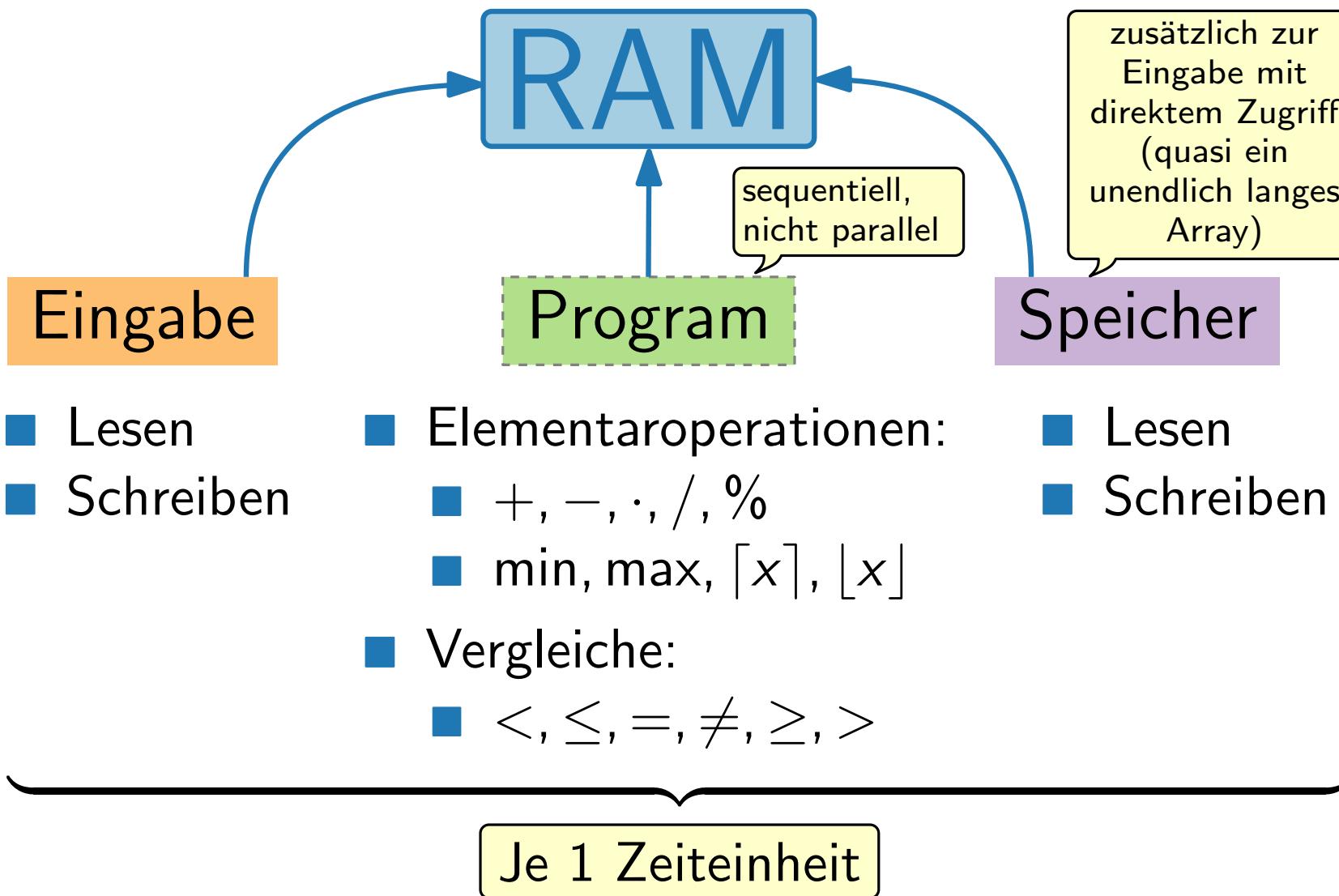
Hängt von vielen Faktoren ab!

- Realisierung der Elementaroperationen
- Größe der Variablen
- Position im Speicher
- Position des Lesekopfs

Wollen ein Maschinenmodell,
das einem Rechner ähnelt,
aber möglichst einfach ist!

Das RAM-Modell

Die **Random Access Machine (RAM)** besteht aus:



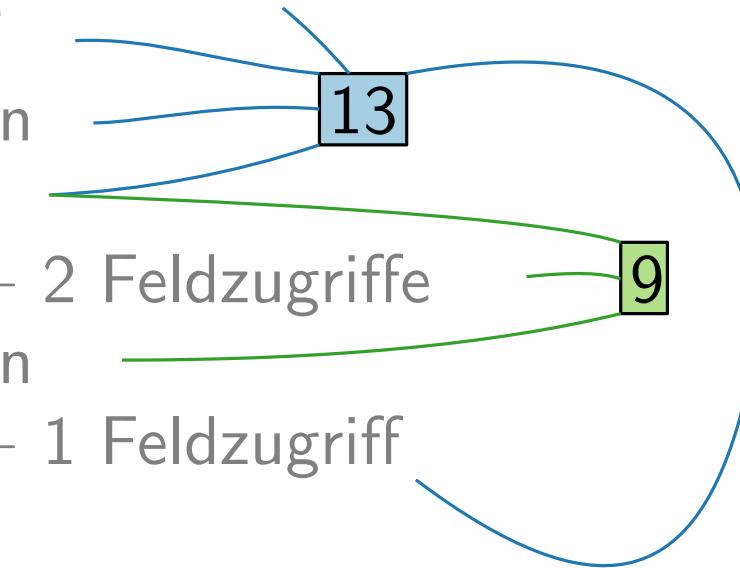
```
INSERTIONSORT(int[] A)
for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
        A[i + 1] = A[i]
        i = i - 1
    A[i + 1] = key
```

Laufzeit von INSERTION SORT

```
INSERTIONSORT(int[] A)
```

```
for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
        A[i + 1] = A[i]
        i = i - 1
    A[i + 1] = key
```

// 1 Zuweisung + 1 Addition + 1 Vergleich
 // 1 Zuweisung + 1 Feldzugriff
 // 1 Zuweisung + 1 Subtraktion
 // 2 Vergleiche + 1 Feldzugriff
 // 1 Zuweisung + 1 Addition + 2 Feldzugriffe
 // 1 Zuweisung + 1 Subtraktion
 // 1 Zuweisung + 1 Addition + 1 Feldzugriff



Wie lang braucht dieser Algorithmus?

Wir zählen **alle Rechenschritte**.

Schlechtester Fall.

Array ist absteigend sortiert.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

$\Rightarrow A[i] > \text{key}$ **immer** erfüllt

\Rightarrow für jedes j gibt es $13 + 9(j - 1)$ Rechenschritte

$$\Rightarrow \text{Laufzeit } \sum_{j=2}^n (13 + 9(j - 1)) = \sum_{j=1}^{n-1} (13 + 9j) = 13(n - 1) + 9 \sum_{j=1}^{n-1} j$$

$$= 13(n - 1) + 9 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(9n+26)(n-1)}{2}$$



1) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Ein Klassifikationsschema für Funktionen

Definition.

Menge der **reellen** Zahlen, z.B. $-7, 3, \frac{2}{9}, \sqrt{2}, e, \pi^2$.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Menge der **natürlichen Zahlen** $0, 1, 2, \dots$

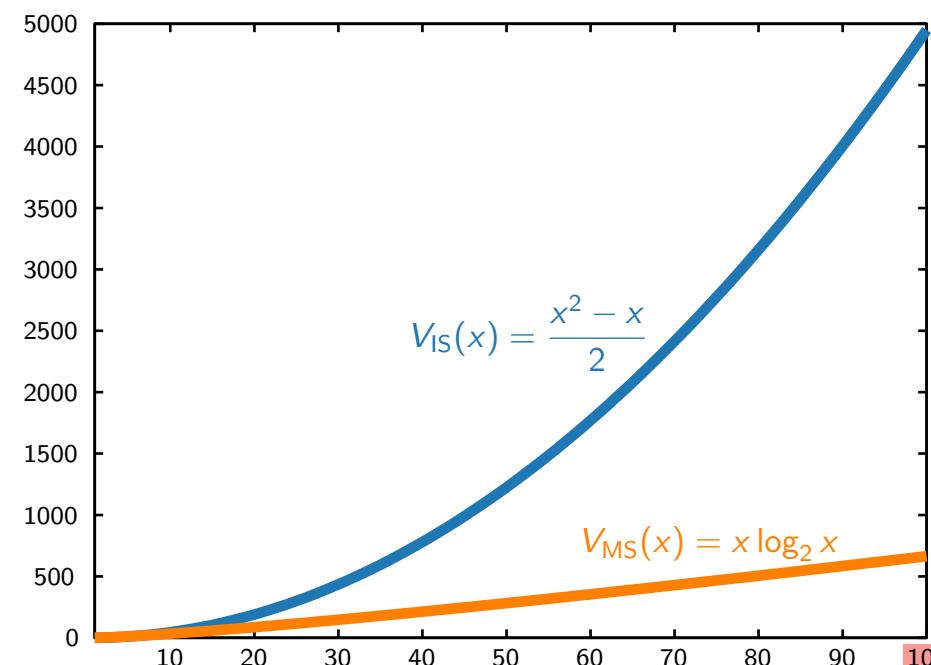
Ein Klassifikationsschema für Funktionen

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$\mathcal{O}(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **höchstens** so schnell wachsen wie g .



Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$\mathcal{O}(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass f\"ur alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **h\"ochstens** so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behauptung: $f \notin \mathcal{O}(n)$; m.a.W. f w\"achst schneller als linear.

Beweis. Zeige: f\"ur alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,

so dass $f(n) > c \cdot n$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$\mathcal{O}(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass f\"ur alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **h\"ochstens** so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behauptung: $f \notin \mathcal{O}(n)$; m.a.W. f w\"achst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,
so dass $f(n) > c \cdot n$.

Also: bestimme n in Abh\"angigkeit von c und n_0 , so dass
 $n \geq n_0$ und $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin \mathcal{O}(n)$

Bestimme n in Abhängigkeit von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > c \cdot n$, dann $f(n) > c \cdot n$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max(c, 5, n_0) \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > c \cdot n$. Also gilt $f \notin \mathcal{O}(n)$. \square

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **mindestens** so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin \mathcal{O}(n)$, $f \in \mathcal{O}(n^2)$, $f \in \mathcal{O}(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $f \in \Theta(n^2)$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $c_1 \cdot n^2 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^2$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Theta von g “

$$\Theta(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c_1, c_2 \text{ und } n_0, \\ \text{so dass f\"ur alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **genau** so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin \mathcal{O}(n)$, $f \in \mathcal{O}(n^2)$, $f \in \mathcal{O}(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $\underline{f \in \Omega(n^2)}$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $f \in \Theta(n^2)$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0 , so dass f\"ur alle $n \geq n_0$ gilt: $c_1 \cdot n^2 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^2$.

Das Klassifikationsschema – intuitiv

- $f \in \mathcal{O}(n^2)$ bedeutet f wächst **höchstens** quadratisch.
 - $f \in \Omega(n^2)$ **mindestens**
 - $f \in \Theta(n^2)$ **genau**
 - $f \in o(n^2)$ **echt langsamer als**
 - $f \in \omega(n^2)$ **echt schneller als**
- neu!**

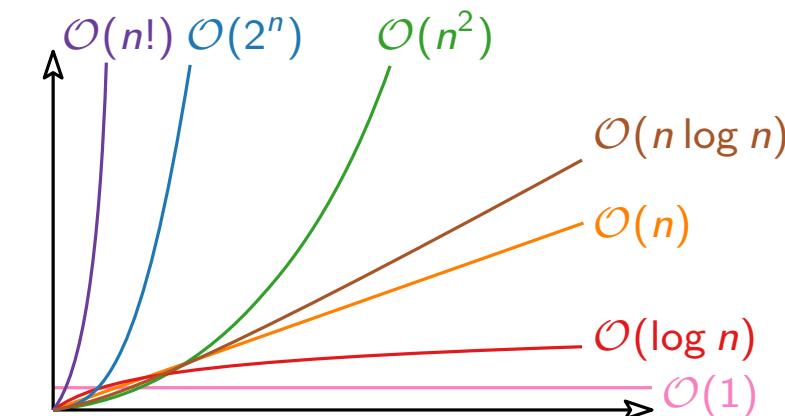
Genaue Definition für „klein-oh“ und „klein-omega“ siehe Kapitel 3 [CLRS].

Übung.

Gegeben folgende Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \dots$:

$$n^2, \log_2 n, \sqrt{n \log_2 n}, 1.01^n, n^{\log_3 4}, \log_2(n \cdot 2^n), 4^{\log_3 n}.$$

Sortieren Sie nach Geschwindigkeit des **asymptotischen Wachstums**, also so, dass danach gilt: $\mathcal{O}(\dots) \subseteq \mathcal{O}(\dots) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{O}(\dots)$.



Vergleich Laufzeiten

	Bester Fall	Schlechtester Fall	
INSERTION SORT	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	Geht das besser?
SELECTION SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	
BUBBLE SORT	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	
BOGO SORT	$\Theta(n)$	∞	Ist das besser? Ja!
MERGE SORT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	