



Julius-Maximilians-

**UNIVERSITÄT  
WÜRZBURG**

Lehrstuhl für

**INFORMATIK I**

Algorithmen & Komplexität



Institut für Informatik

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

13. Vorlesung

## PageRank und Power-Methode

Text siehe

<http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/RalucaRemus/Lecture3/lecture3.html>

# Internet-Suche

**Google**

Press Enter to search.

**Search** About 892,000,000 results (0.22 seconds)

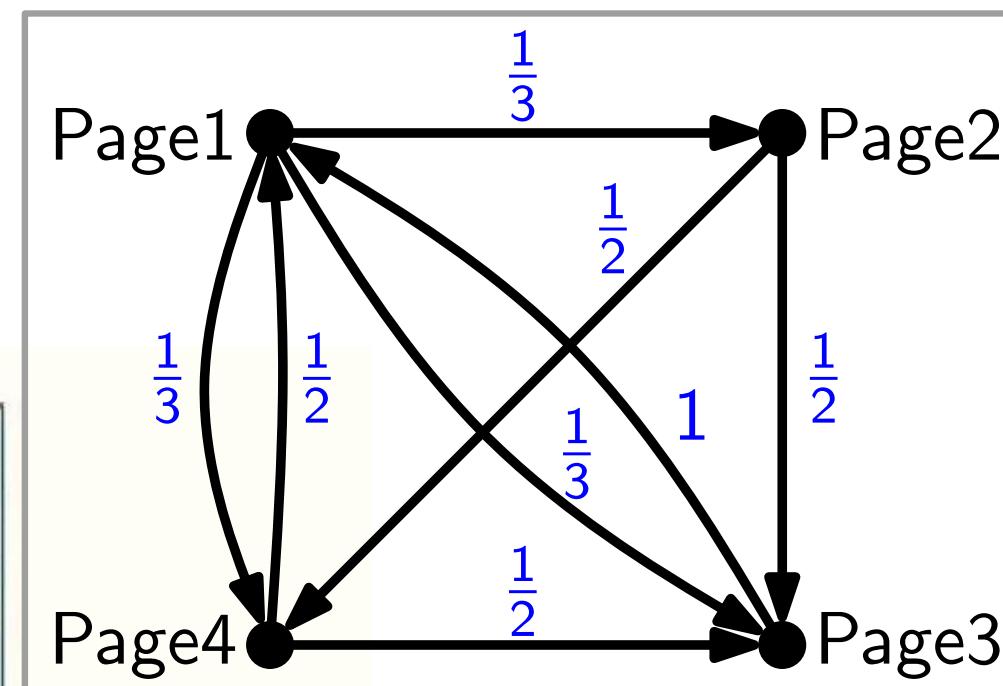
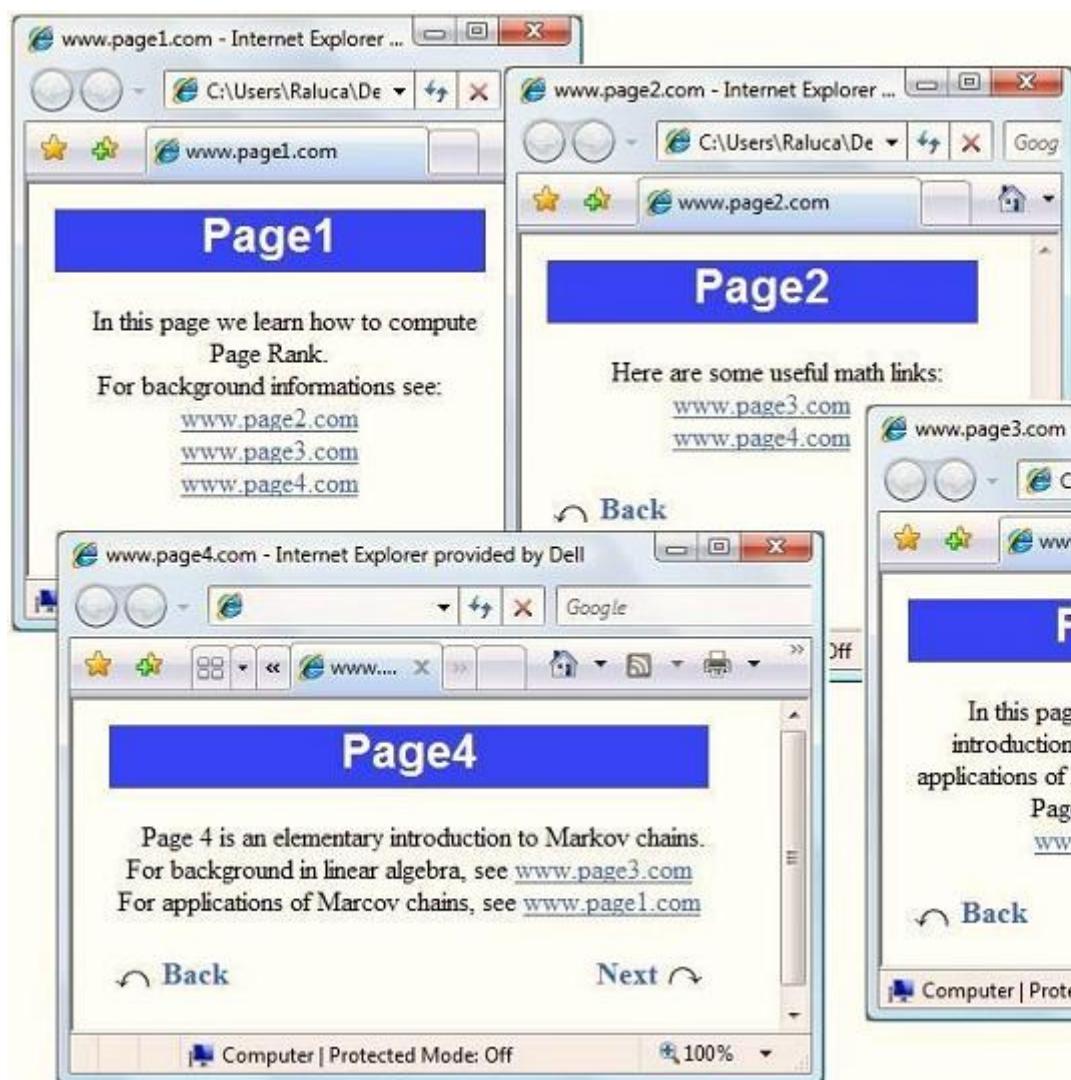
---

<a href="#">Web</a> <a href="#">Images</a> <a href="#">Maps</a> <a href="#">Videos</a> <a href="#">News</a> <a href="#">Shopping</a> <a href="#">Books</a> <a href="#">More</a>  <a href="#">Würzburg</a> Change location  <a href="#">Show search tools</a>	<p><a href="#"><b>java.com: Java + You</b></a>  <a href="http://www.java.com/">www.java.com/</a>          Get the latest <b>Java</b> Software and explore how <b>Java</b> technology provides a better digital experience.</p> <p><a href="#"><b>Download Java</b></a>          This page is your source to download or update your ...</p> <p><a href="#"><b>How do I test whether Java is ...</b></a>          See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...</p> <p><a href="#">More results from java.com »</a></p> <p><a href="#"><b>Java (programming language) - Wikipedia, the free encyclopedia</b></a>  <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language)">en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language)</a>  <b>Java</b> is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...</p> <p><a href="#"><b>Java - Wikipedia, the free encyclopedia</b></a>  <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/Java">en.wikipedia.org/wiki/Java</a>  <b>Java</b> (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...</p> <p><a href="#"><b>Java (software platform) - Wikipedia, the free encyclopedia</b></a>  <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform)">en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform)</a>  <b>Java</b> is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...</p>
--	--

Wie funktioniert das?

- per Katalog?
- von Hand??
- Graphentheorie???

# Ein Graphen-Modell



- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante  $uv$ , falls Seite  $u$  per Link auf Seite  $v$  verweist.
- Kantengewichte  $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

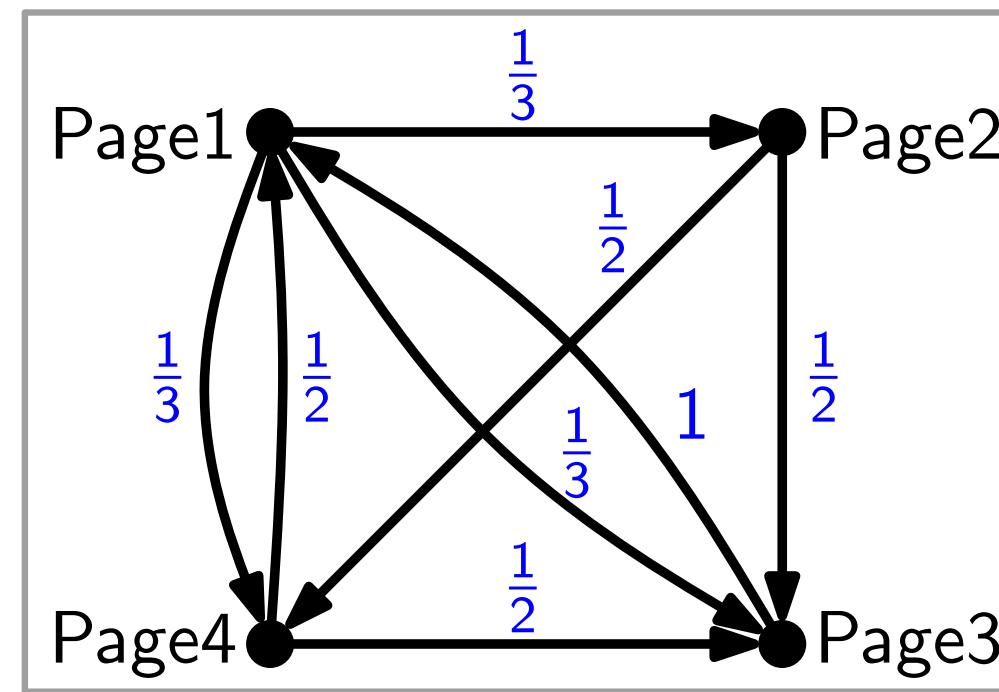
# Some Math...

**Def.** Übergangsmatrix

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Intuition:

Jede der  $n = |V(G)|$  Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

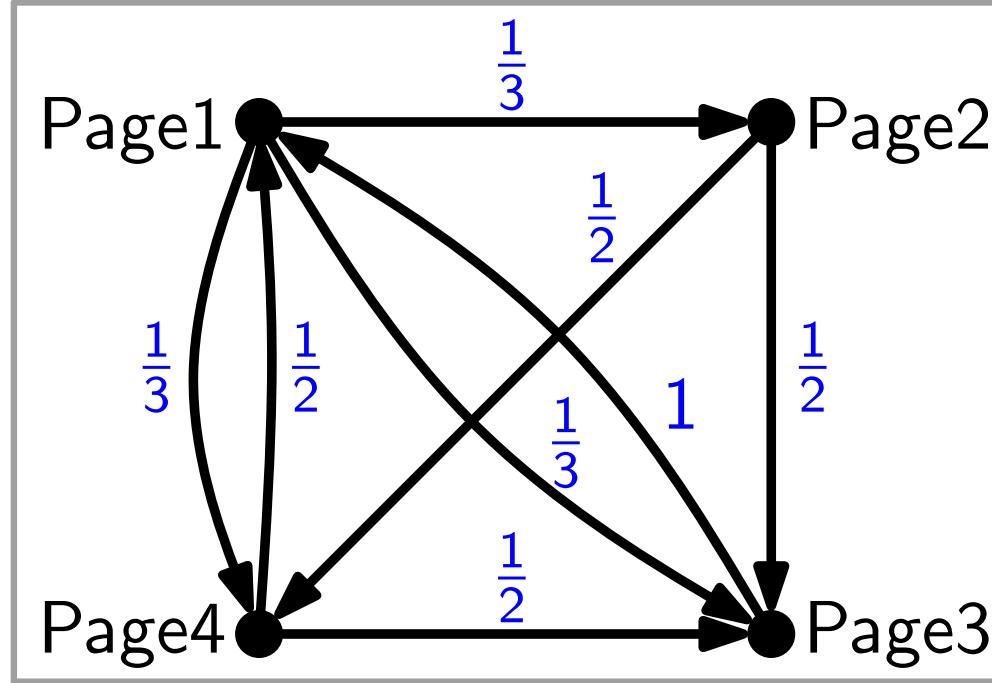
Seite desto (ge-)wichtiger, je öfter sie von wichtigen Seiten verlinkt wird.

Jede Seite verteilt ihr Gewicht über ihre ausgehenden Kanten gleichmäßig unter ihren Nachbarn.

# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht:  $1/n$ .



Im Beispiel: Vektor  $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

$$r_1 := A \cdot r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/12 \\ 1/3 \\ 5/24 \end{pmatrix}$$

# Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

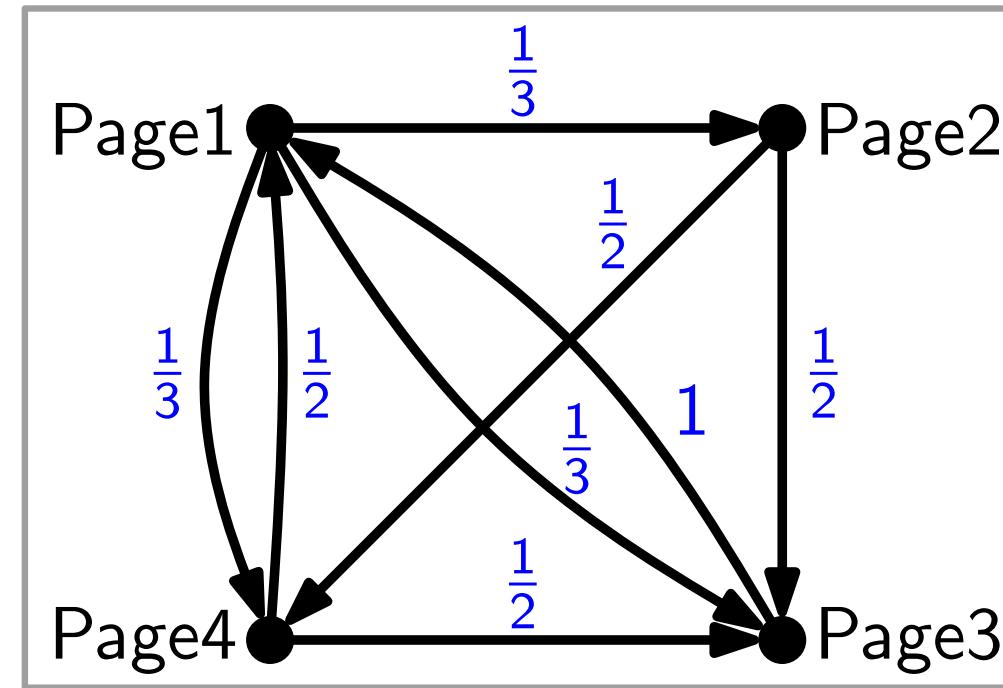
$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

⋮

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$

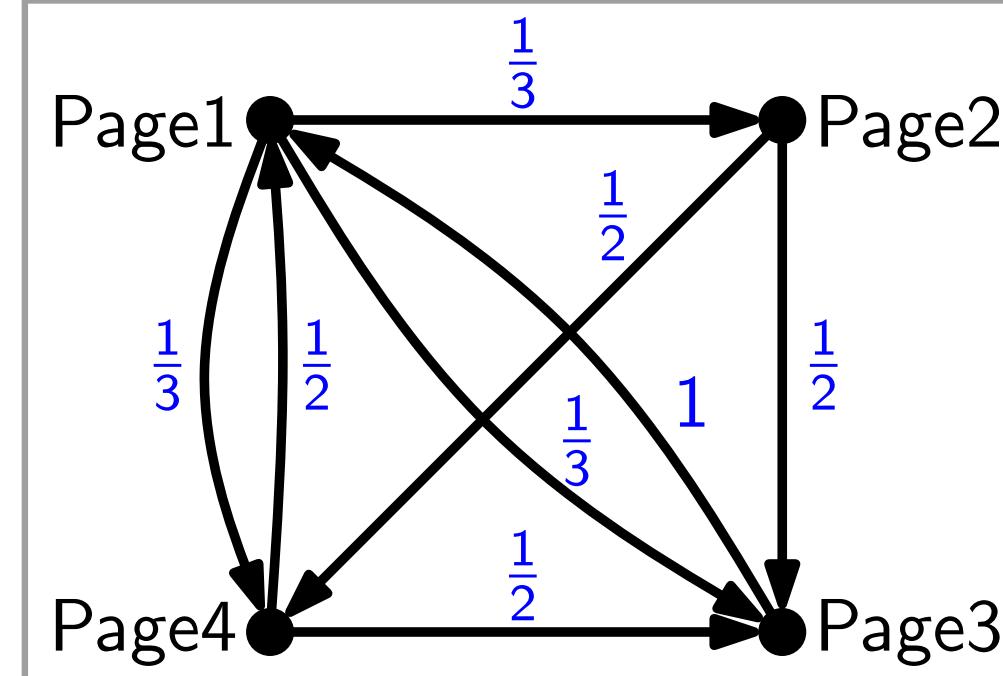
$$r_7 := A^7 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,12; 0,29; 0,19)^\top \approx A^8 \cdot r_0 =: r_8$$



*System strebt gegen  
Gleichgewichtszustand!*

# Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt  $A \cdot r = r$ .

*Seitenrangvektor*

D.h.  $r$  ist Eigenvektor von  $A$  für den Eigenwert 1.

Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form  $c \cdot (12, 4, 9, 6)^\top$ .

Normiere: Einträge von  $r$  summieren sich zu 1.  
(probabilistischer Eigenvektor).

$$\Rightarrow r = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

# Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

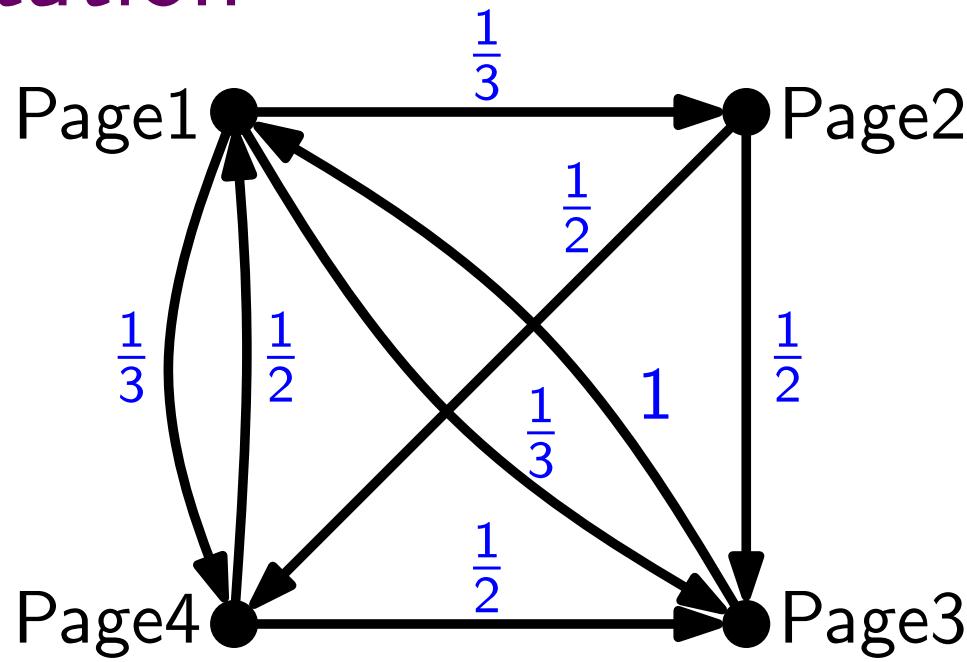
Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung  $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$ .

In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

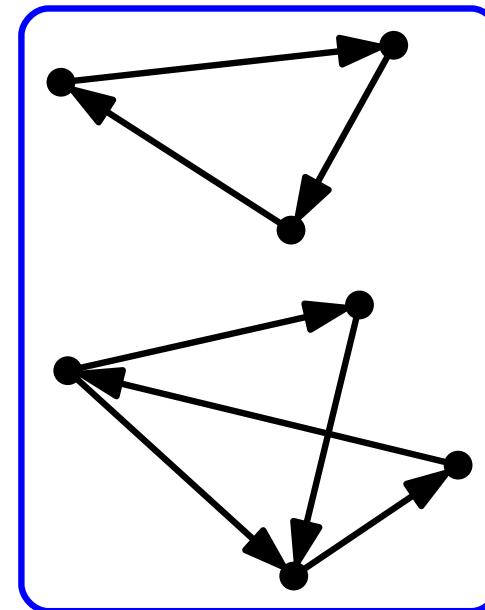
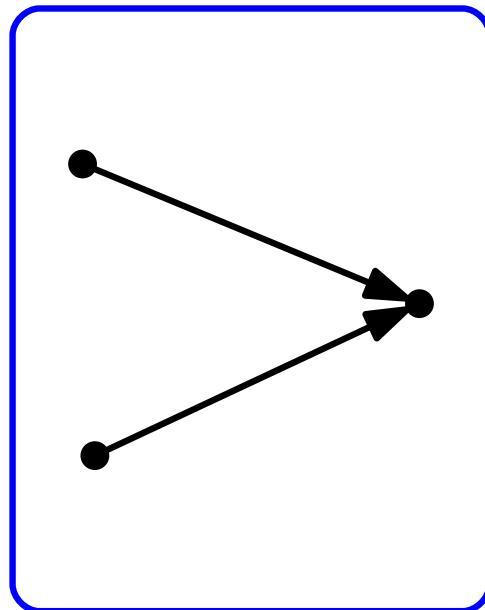
⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration  $i$  ist  $r_i = A^i \cdot r_0$ .

⇒ Stationäre Verteilung ist probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1, also hier  $r = \frac{1}{31}(12, 4, 9, 6)^\top$ .



# Probleme

- Gewicht „verschwindet“ in Knoten ohne ausgehende Kanten (nur „Eigenvektor“ 0).
- Falls Graph nicht zusammenhängend, existieren unendlich viele probabilistische Eigenvektoren zum Eigenwert 1 (Linearkombination der Eigenvektoren der ZK).



# Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  (Dämpfungsfaktor, beispielsweise  $p = 0,15$ ) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt  $\rightsquigarrow$  „Zusammenhang“ erreicht.

Sei  $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$ . Die neue Übergangsmatrix  $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$  hat folgende Eigenschaften:

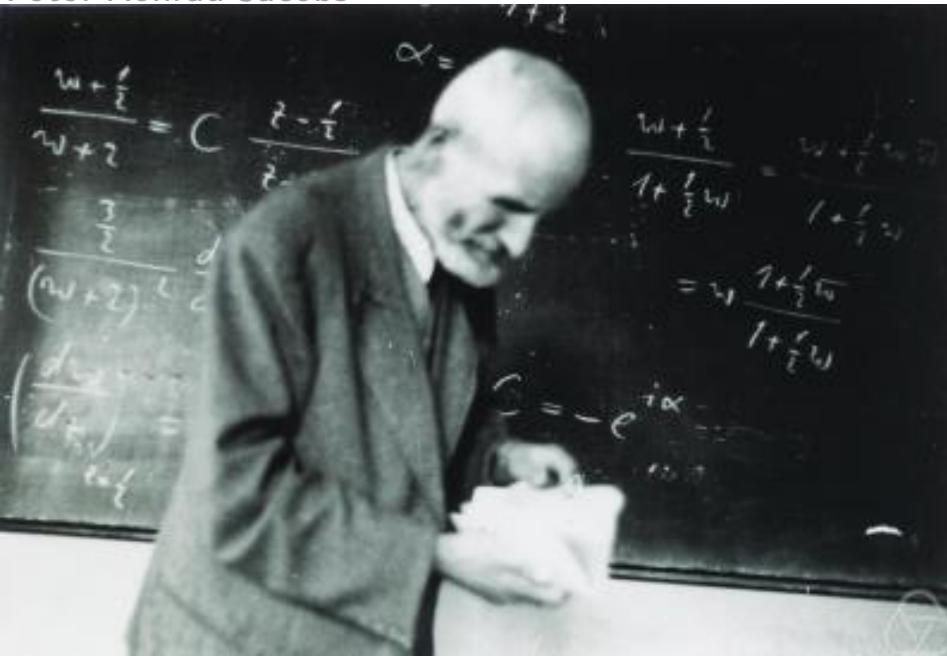
- $M$  hat nur positive Einträge.  
(Also ist  $M$  positiv.)
- Alle Spaltensummen von  $M$  sind 1, da dies für  $A$  u.  $B$  gilt.  
(Also ist  $M$  spalten-stochastisch.)

# Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

- (i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,
- (ii) 1 ist der größte Eigenwert,
- (iii) es gibt einen eindeutigen Eigenvektor  $r$  zum Eigenwert 1, dessen Einträge sich zu 1 summieren (probabilistischer Eigenvektor); alle Einträge von  $r$  sind positiv.

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron  
(Frankenthal 1880 – 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



Ferdinand Georg Frobenius  
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

# Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

**Satz.** Sei  $M$  eine positive spalten-stochastische  $n \times n$  Matrix. Sei  $r$  ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei  $r_0$  ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle  $1/n$  sind. Dann konvergiert die Folge  $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^kr_0, \dots$  gegen den Vektor  $r$ .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor  $r$  für  $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$  mit  
– Übergangsmatrix  $A$  (Web-Graph!) und  
– Dämpfungsfaktor  $p$   
kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Dies ist häufig schneller als die exakte Berechnung.

Man muss dabei ausnutzen, dass in  $A$  fast alle Einträge 0 sind.