Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

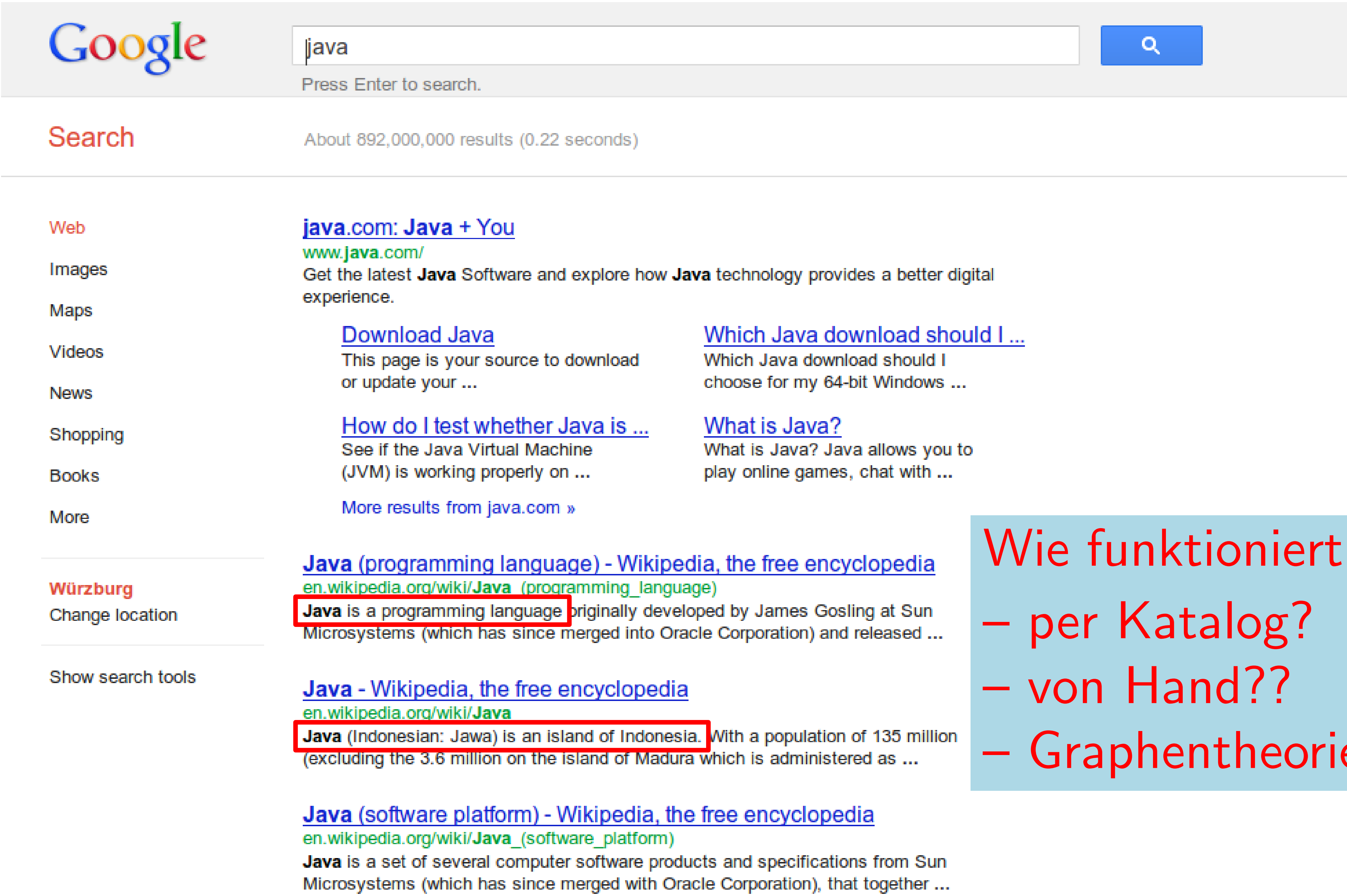
13. Vorlesung

PageRank und Power-Methode

Text siehe
http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/RalucaRemus/Lecture3/lecture3.html

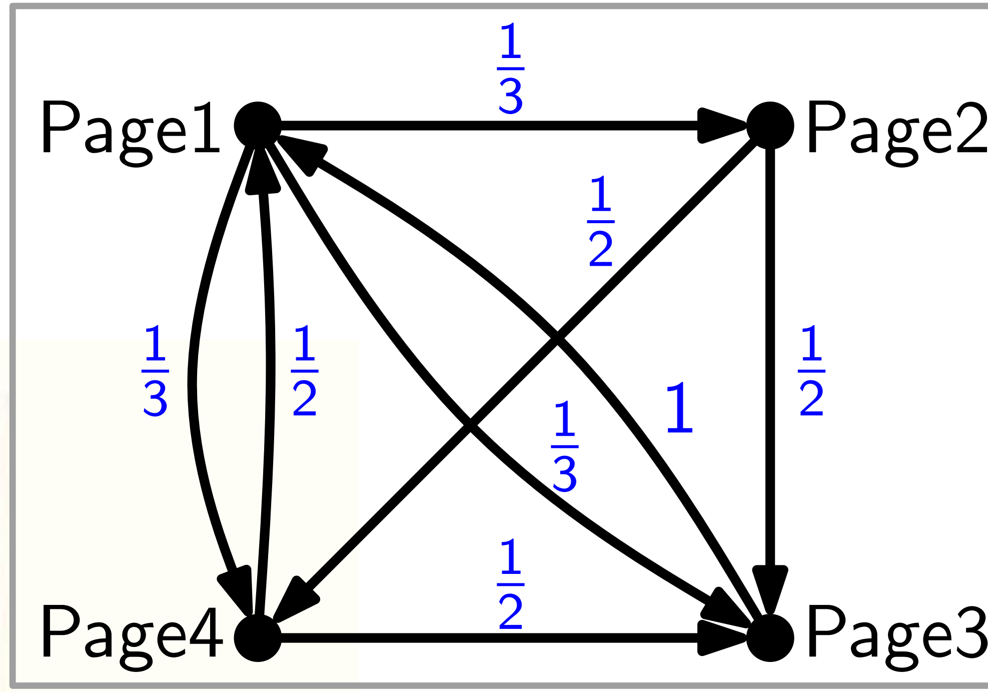
Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

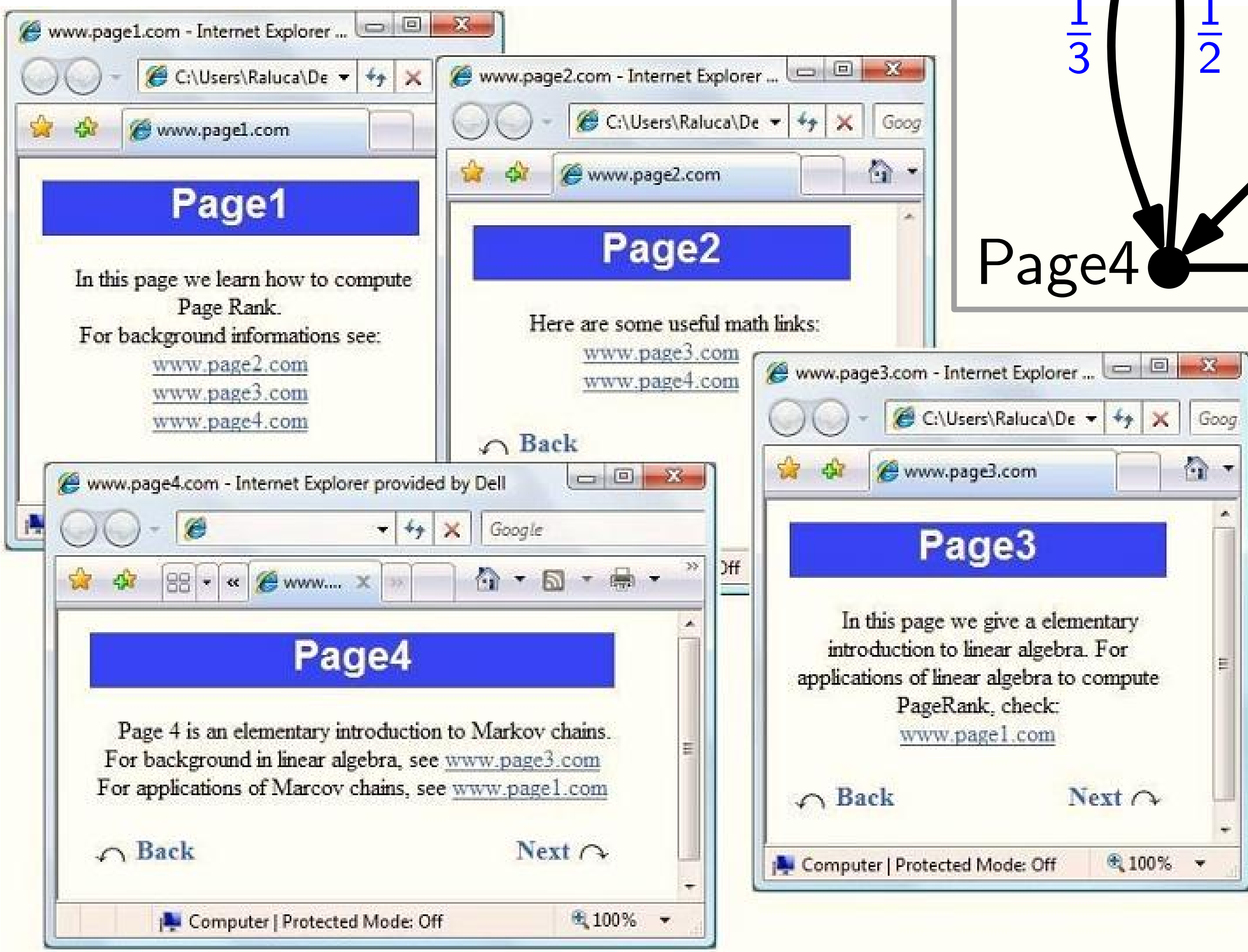
Internet-Suche



Wie funktioniert das?
– per Katalog?
– von Hand??
– Graphentheorie???

Ein Graphen-Modell





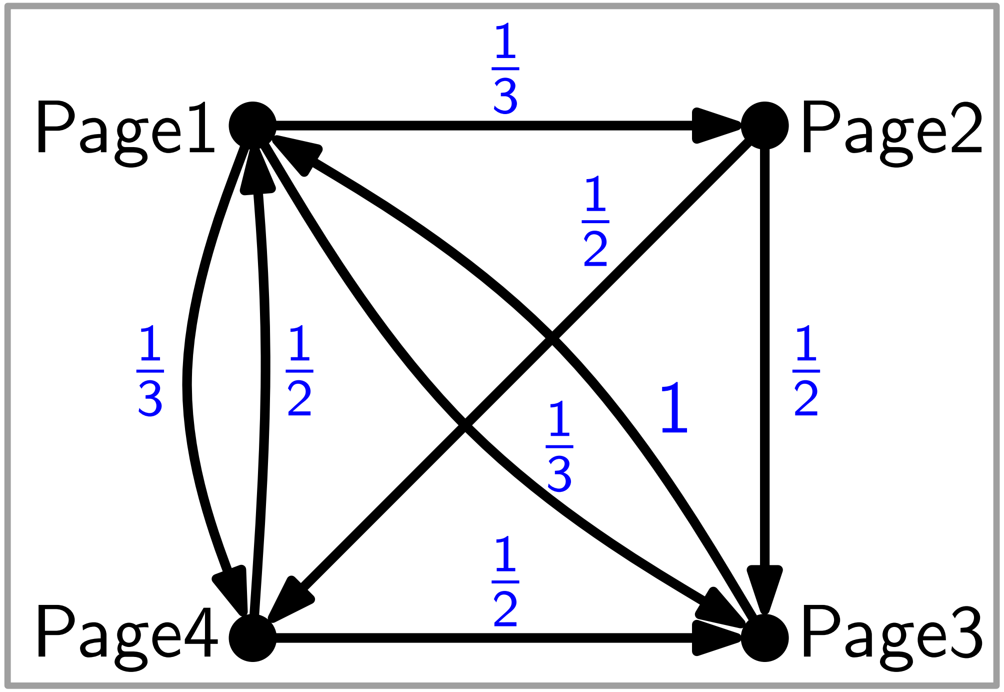
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv, falls Seite u per Link auf Seite v verweist.
- Kantengewichte $w(uv) = 1/\mathrm{outdeg}(u)$

Some Math. . .

Def. *Übergangsmatrix*
$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



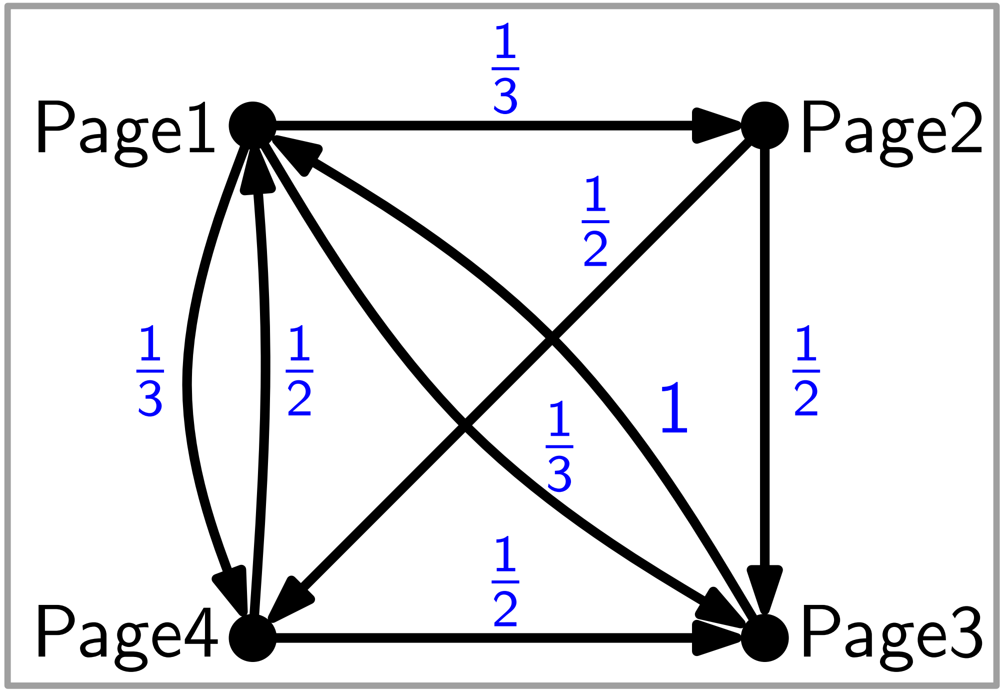
Intuition:

Jede der $n = |V(G)|$ Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

Seite desto (ge-)wichtiger, je öfter sie von wichtigen Seiten verlinkt wird.

Jede Seite verteilt ihr Gewicht über ihre ausgehenden Kanten gleichmäßig unter ihren Nachbarn.

Dynamisches System



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.

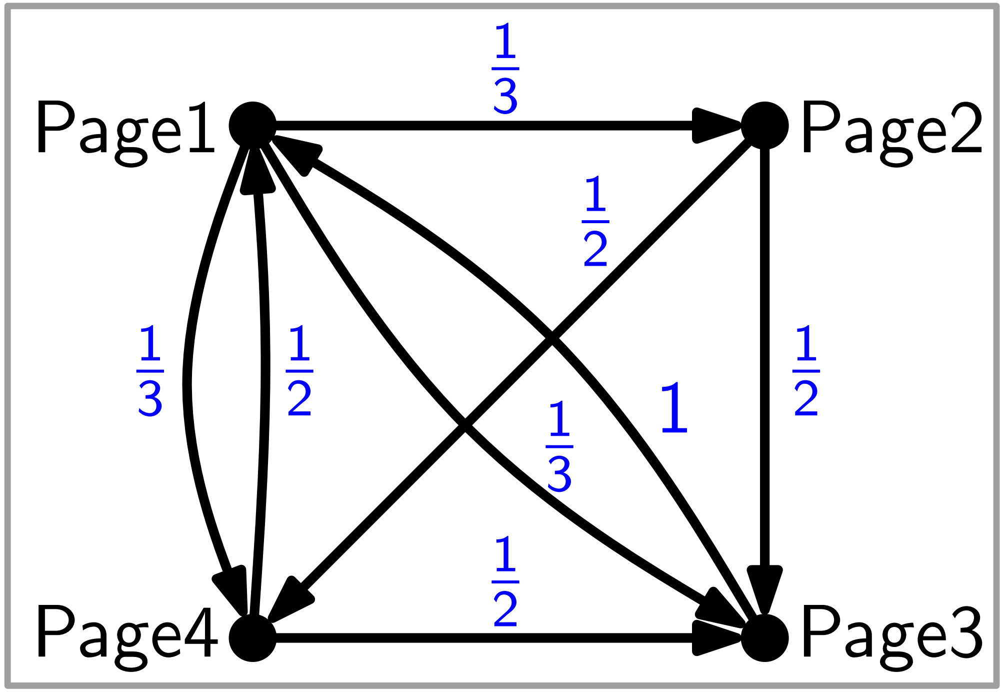
Im Beispiel: Vektor $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

$$r_1 := A \cdot r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/12 \\ 1/3 \\ 5/24 \end{pmatrix}$$

Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0{,}43; 0{,}12; 0{,}27; 0{,}16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0{,}35; 0{,}14; 0{,}29; 0{,}20)^\top$$

System strebt gegen Gleichgewichtszustand!

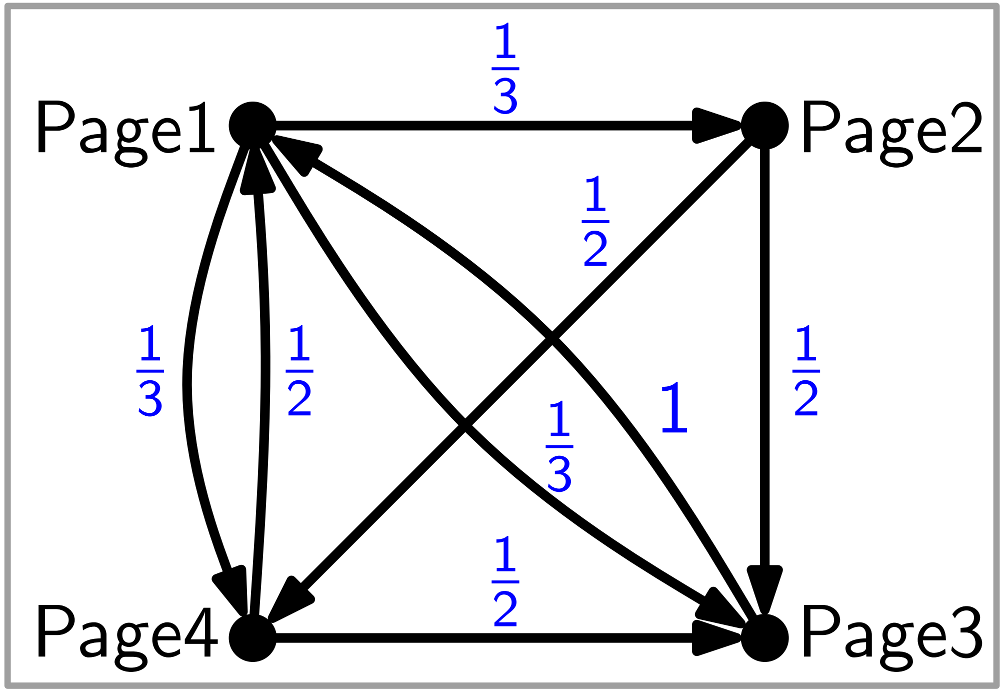
$$\vdots$$

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0{,}38; 0{,}13; 0{,}29; 0{,}19)^\top$$

$$r_7 := A^7 \cdot r_0 \approx (0{,}38; 0{,}12; 0{,}29; 0{,}19)^\top \approx A^8 \cdot r_0 =: r_8$$

Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

Seitenrangvektor

D.h. r ist Eigenvektor von A für den Eigenwert 1.

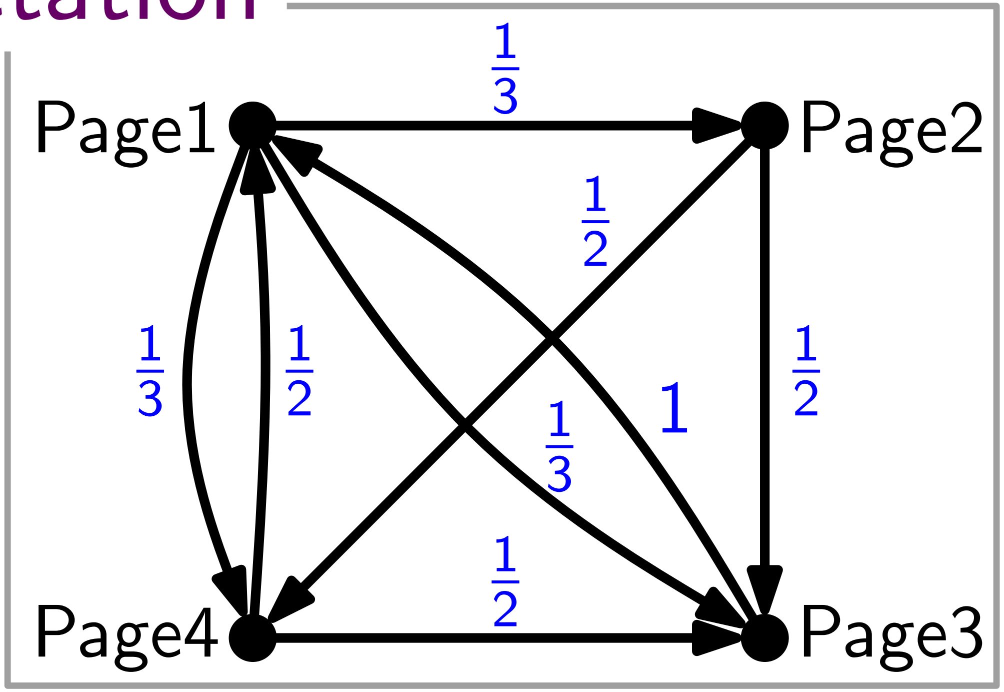
Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):
Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form $c \cdot (12, 4, 9, 6)^\top$.

Normiere: Einträge von r summieren sich zu 1.
(probabilistischer Eigenvektor).

$$\Rightarrow r = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

$\Rightarrow$ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.

In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

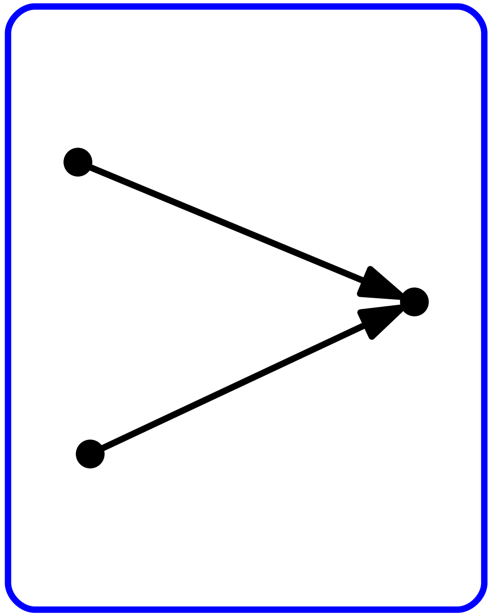
$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration i ist $r_i = A^i \cdot r_0$.

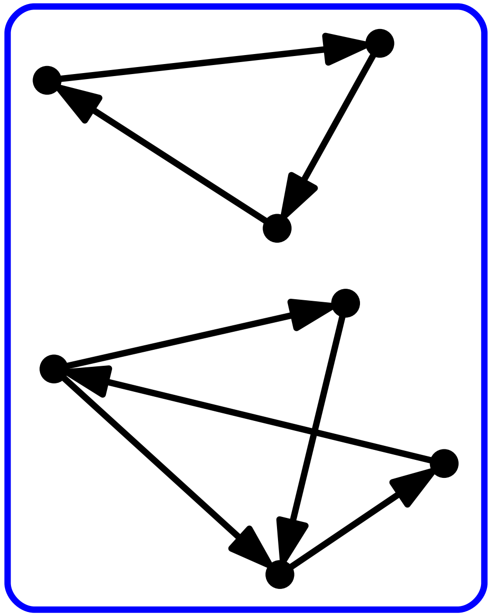
$\Rightarrow$ Stationäre Verteilung ist probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1, also hier $r = \frac{1}{31}(12, 4, 9, 6)^\top$.

Probleme

- Gewicht „verschwindet“ in Knoten ohne ausgehende Kanten (nur „Eigenvektor“ 0).

- Falls Graph nicht zusammenhängend, existieren unendlich viele probabilistische Eigenvektoren zum Eigenwert 1 (Linearkombination der Eigenvektoren der ZK).





Lösung von Page und Brin

(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0{,}15$) „teleportiert" sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt $\rightsquigarrow$ „Zusammenhang" erreicht.

Sei $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

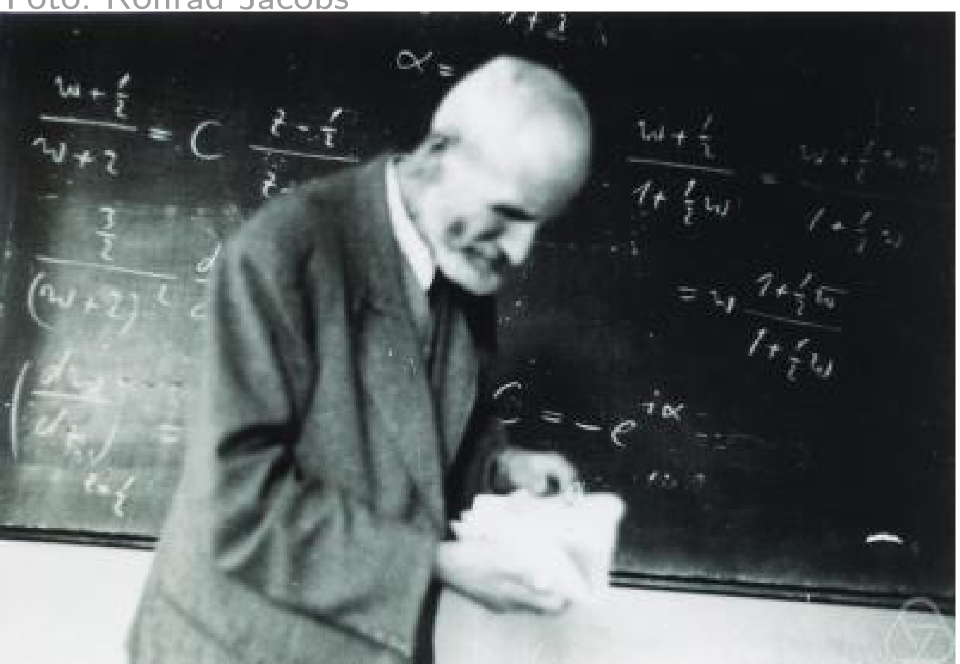
- M hat nur positive Einträge.
  (Also ist M *positiv*.)
- Alle Spaltensummen von M sind 1, da dies für A u. B gilt.
  (Also ist M *spalten-stochastisch*.)

Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

(i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,
(ii) 1 ist der größte Eigenwert,
(iii) es gibt einen eindeutigen Eigenvektor r zum Eigenwert 1, dessen Einträge sich zu 1 summieren (probabilistischer Eigenvektor); alle Einträge von r sind positiv.

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron
(Frankenthal 1880
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection

Ferdinand Georg Frobenius
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix. Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei r_0 ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle $1/n$ sind. Dann konvergiert die Folge $r_0, Mr_0, M^2 r_0, \ldots, M^k r_0, \ldots$ gegen den Vektor r.

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor r für $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$ mit
– Übergangsmatrix A (Web-Graph!) und
– Dämpfungsfaktor p
kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Dies ist häufig schneller als die exakte Berechnung.

Man muss dabei ausnutzen, dass in A fast alle Einträge 0 sind.