

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

13. Vorlesung

PageRank und Power-Methode

Text siehe

<http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/RalucaRemus/Lecture3/lecture3.html>

Internet-Suche

Google

Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

Images

Maps

Videos

News

Shopping

Books

More

Würzburg

Change location

Show search tools

[java.com: Java + You](#)

[www.java.com/](#)

Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)

This page is your source to download or update your ...

[Which Java download should I ...](#)

Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[How do I test whether Java is ...](#)

See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[What is Java?](#)

What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

[More results from java.com »](#)

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java_\(programming_language\)](#)

Java is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

[en.wikipedia.org/wiki/Java](#)

Java (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)

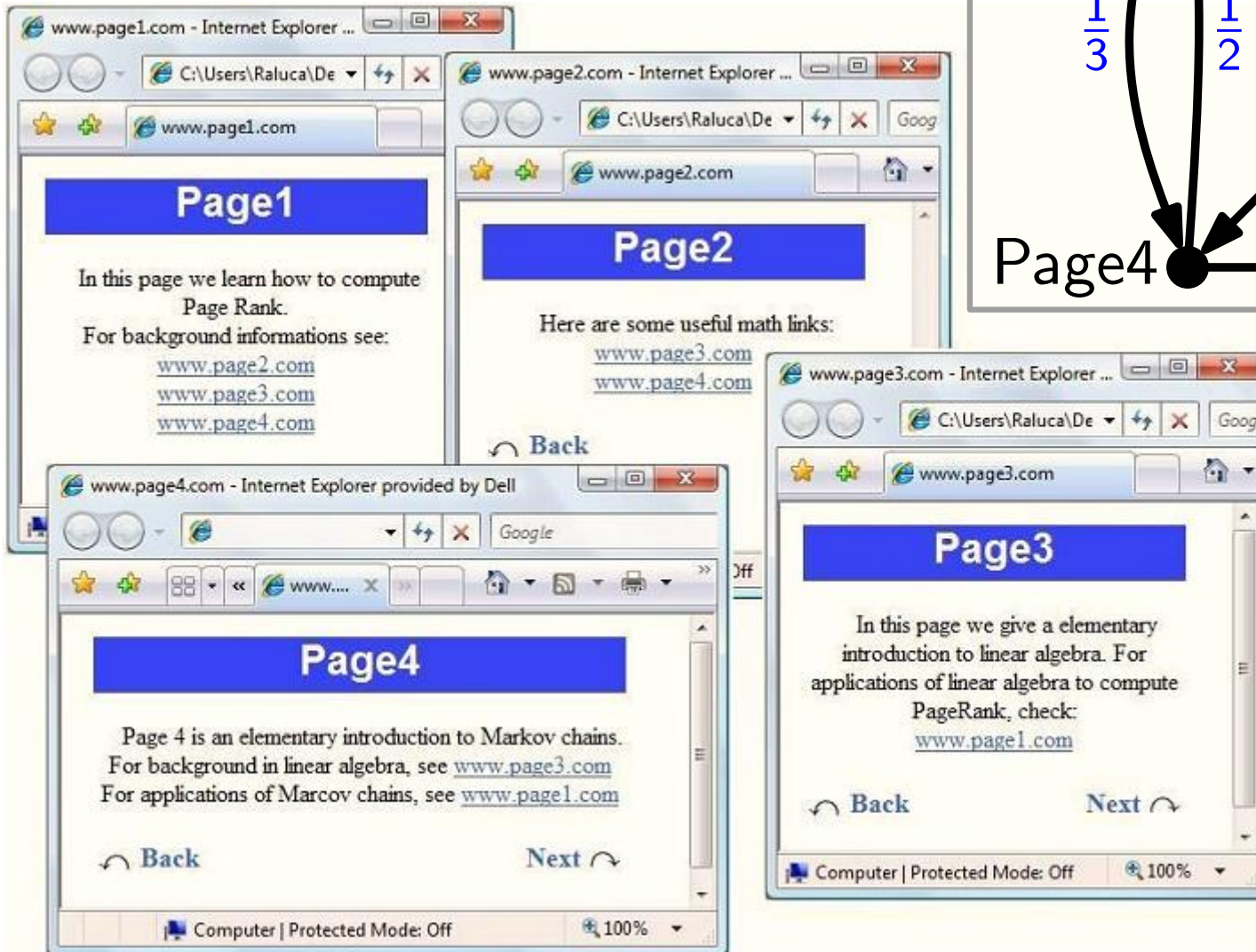
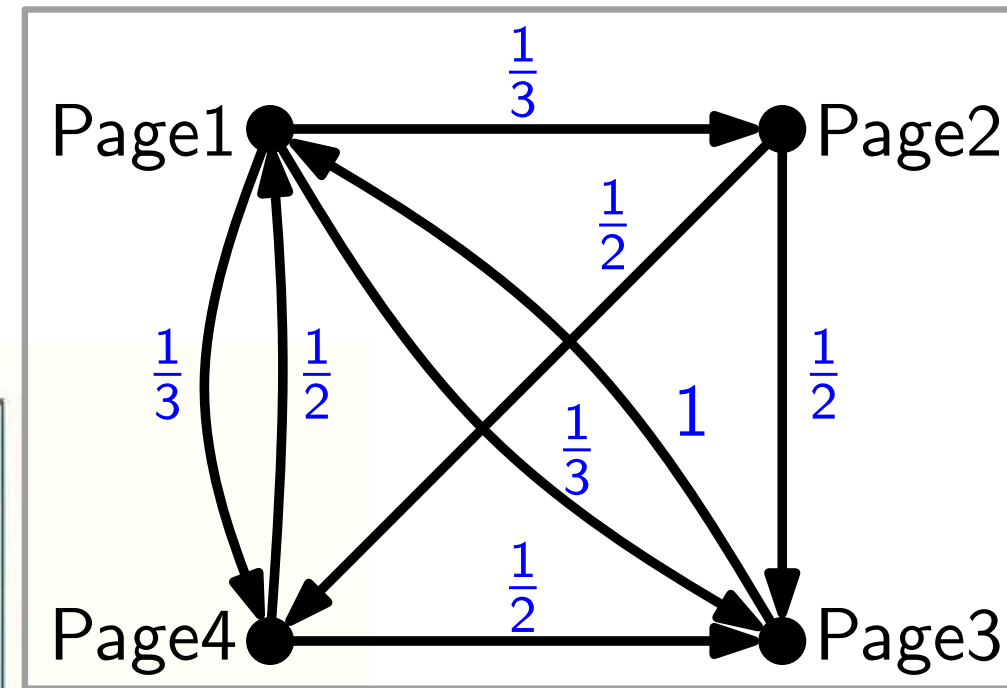
[en.wikipedia.org/wiki/Java_\(software_platform\)](#)

Java is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

Wie funktioniert das?

- per Katalog?
- von Hand??
- Graphentheorie???

Ein Graphen-Modell



- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv , falls Seite u per Link auf Seite v verweist.
- Kantengewichte $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

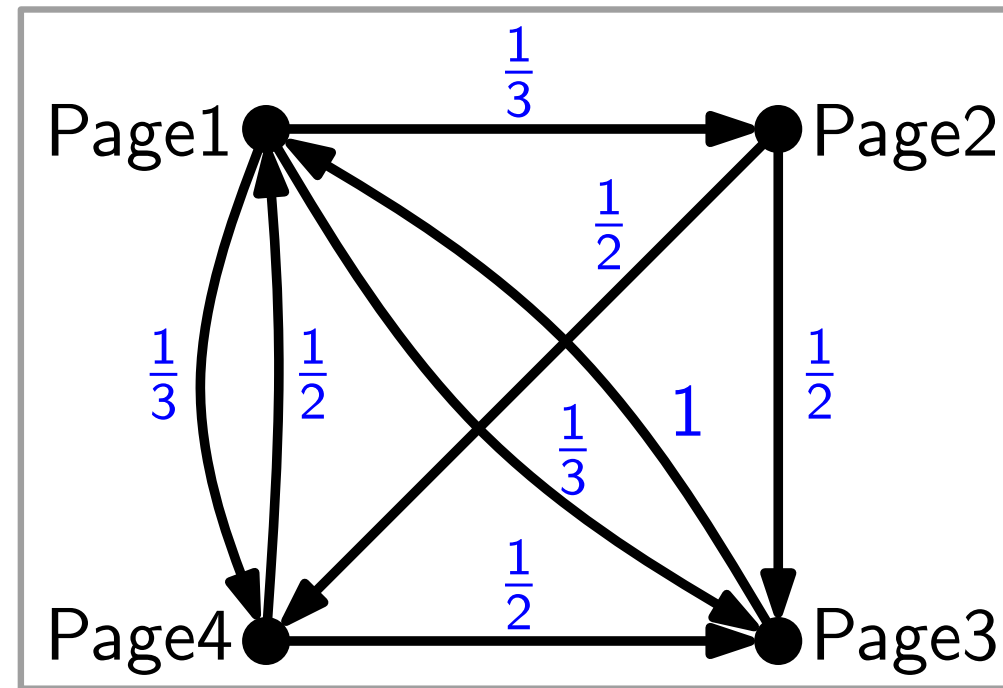
Some Math...

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Intuition:

Jede der $n = |V(G)|$ Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

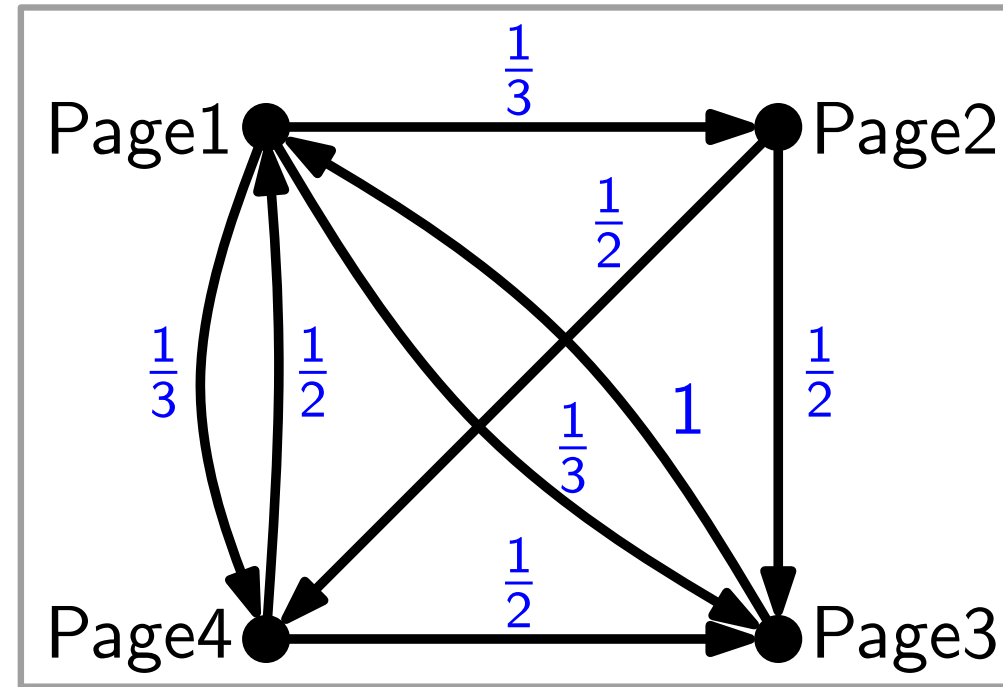
Seite desto (ge-)wichtiger, je öfter sie von wichtigen Seiten verlinkt wird.

Jede Seite verteilt ihr Gewicht über ihre ausgehenden Kanten gleichmäßig unter ihren Nachbarn.

Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.



Im Beispiel: Vektor $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

$$r_1 := A \cdot r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/12 \\ 1/3 \\ 5/24 \end{pmatrix}$$

Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

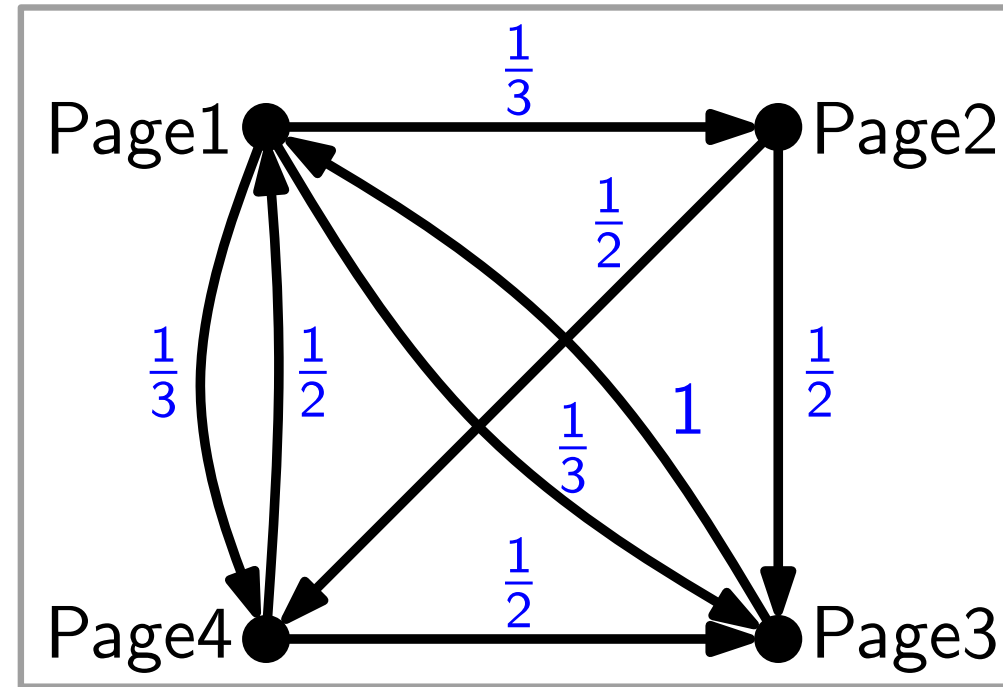
$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

\vdots

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$

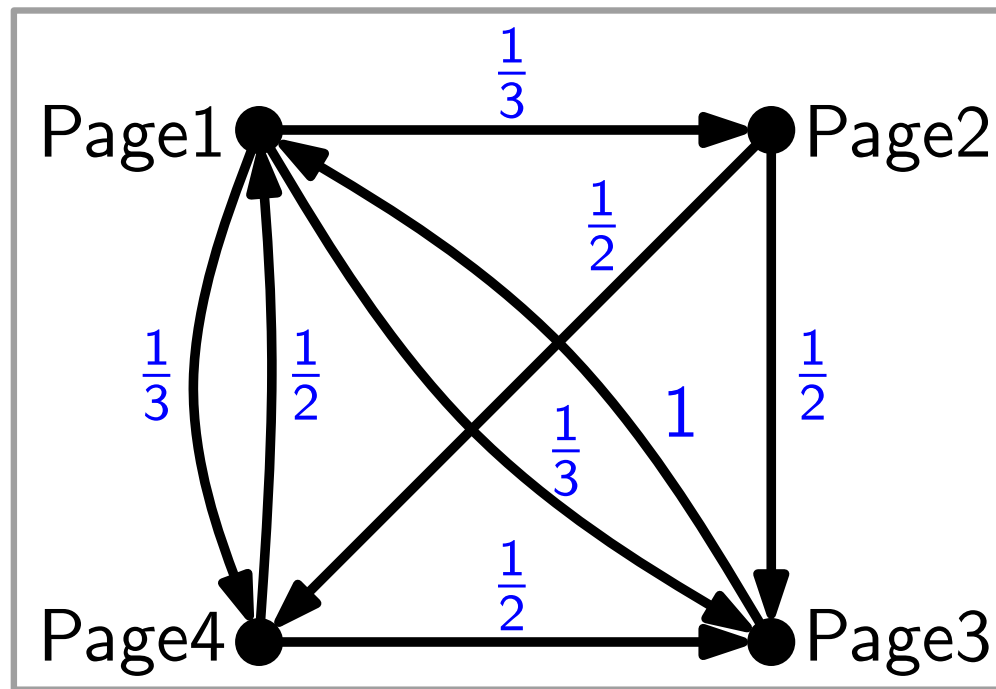
$$r_7 := A^7 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,12; 0,29; 0,19)^\top \approx A^8 \cdot r_0 =: r_8$$



System strebt gegen Gleichgewichtszustand!

Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

Seitenrangvektor

D.h. r ist Eigenvektor von A für den Eigenwert 1.

Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

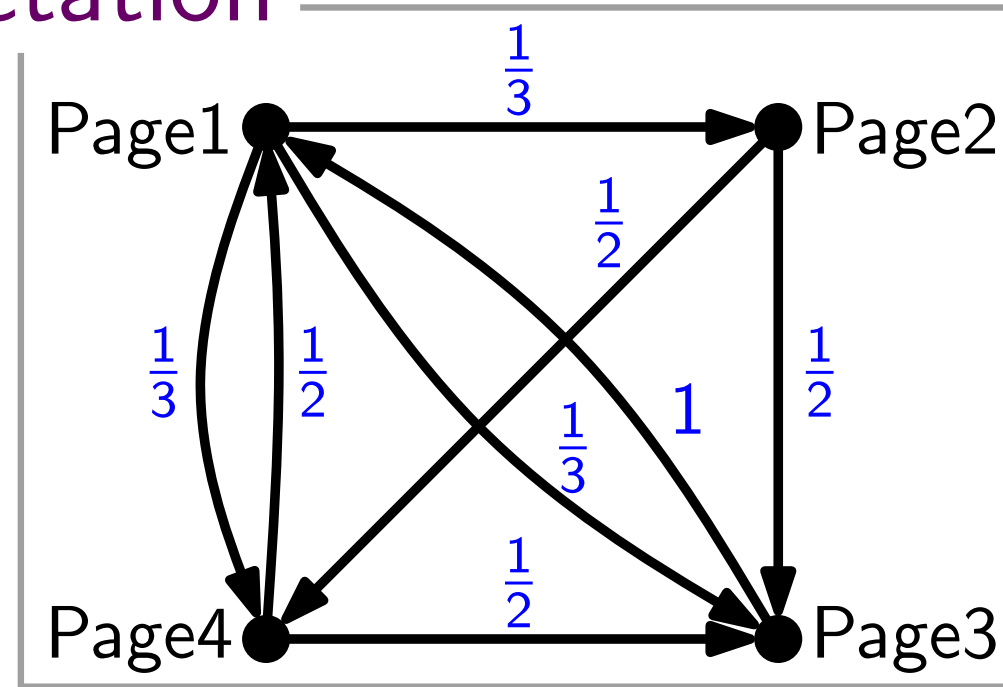
Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form $c \cdot (12, 4, 9, 6)^T$.

Normiere: Einträge von r summieren sich zu 1. $\Rightarrow r = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$
(probabilistischer Eigenvektor).

Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.



⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.

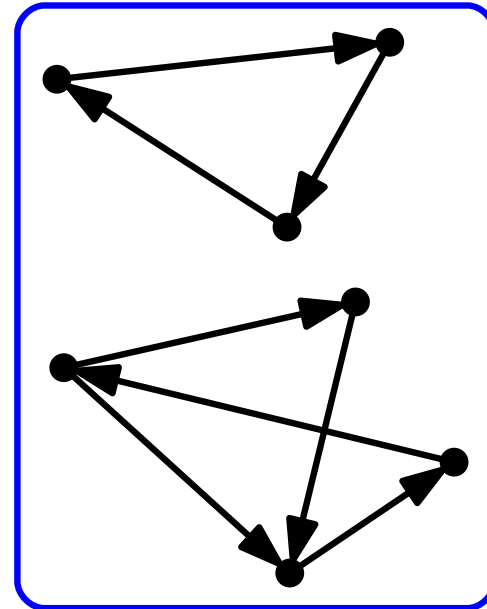
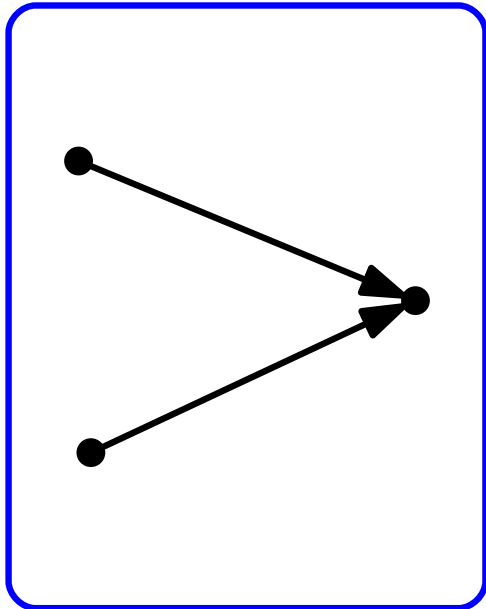
In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration i ist $r_i = A^i \cdot r_0$.

⇒ Stationäre Verteilung ist probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1, also hier $r = \frac{1}{31} (12, 4, 9, 6)^\top$.

Probleme

- Gewicht „verschwindet“ in Knoten ohne ausgehende Kanten (nur „Eigenvektor“ 0).
- Falls Graph nicht zusammenhängend, existieren unendlich viele probabilistische Eigenvektoren zum Eigenwert 1 (Linearkombination der Eigenvektoren der ZK).



Lösung von Page und Brin



(c) Wikipedia 2008

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

Sei $B = (1/n)_{1 \leq i, j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

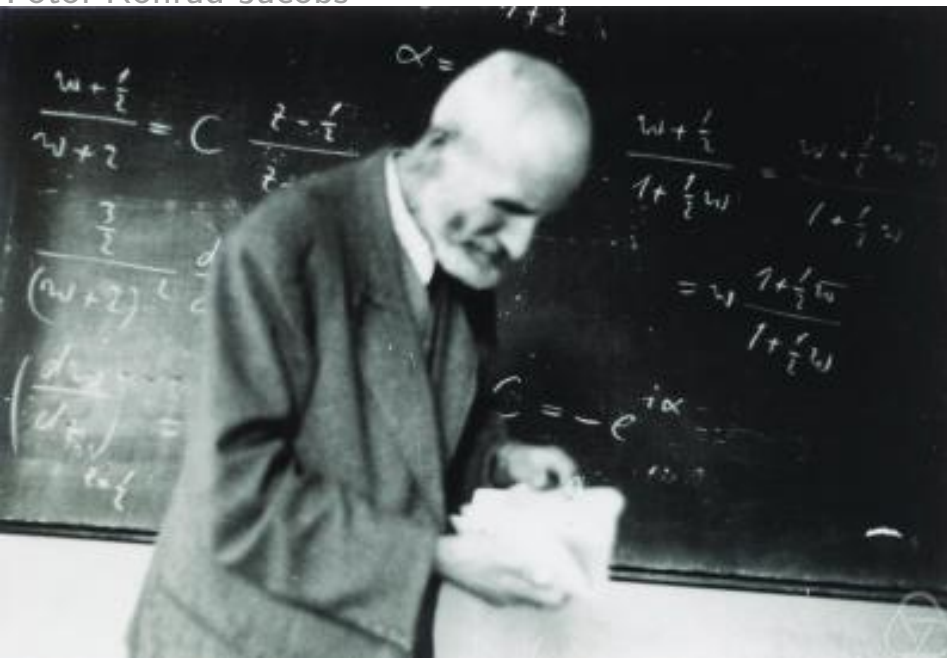
- M hat nur positive Einträge.
(Also ist M *positiv*.)
- Alle Spaltensummen von M sind 1, da dies für A u. B gilt.
(Also ist M *spalten-stochastisch*.)

Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

- (i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,
- (ii) 1 ist der größte Eigenwert,
- (iii) es gibt einen eindeutigen Eigenvektor r zum Eigenwert 1, dessen Einträge sich zu 1 summieren (probabilistischer Eigenvektor); alle Einträge von r sind positiv.

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron
(Frankenthal 1880
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



Ferdinand Georg Frobenius
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix. Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei r_0 ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle $1/n$ sind. Dann konvergiert die Folge $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^k r_0, \dots$ gegen den Vektor r .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor r für $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$ mit

- Übergangsmatrix A (Web-Graph!) und
- Dämpfungsfaktor p

kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Dies ist häufig schneller als die exakte Berechnung.

Man muss dabei ausnutzen, dass in A fast alle Einträge 0 sind.