



Julius-Maximilians-

UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität



Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

13. Vorlesung

PageRank und Power-Methode

Text siehe

<http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/RalucaRemus/Lecture3/lecture3.html>

Internet-Suche



Internet-Suche

Google

Press Enter to search.

Search About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web

[java.com: Java + You](#)
www.java.com/
Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

[Download Java](#)
This page is your source to download or update your ...

[How do I test whether Java is ...](#)
See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

[More results from java.com »](#)

[Which Java download should I ...](#)
Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

[What is Java?](#)
What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

Würzburg

Change location

Show search tools

[Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
[en.wikipedia.org/wiki/Java_\(programming_language\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language))
Java is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

[Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
en.wikipedia.org/wiki/Java
Java (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
[en.wikipedia.org/wiki/Java_\(software_platform\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform))
Java is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

Internet-Suche

Google

Press Enter to search.

Search About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web [java.com: Java + You](#)
www.java.com/
Get the latest **Java** Software and explore how **Java** technology provides a better digital experience.

Images [Download Java](#)
This page is your source to download or update your ...

Maps [Which Java download should I ...](#)
Which Java download should I choose for my 64-bit Windows ...

Videos [How do I test whether Java is ...](#)
See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...

News [What is Java?](#)
What is Java? Java allows you to play online games, chat with ...

Shopping

Books

More [More results from java.com »](#)

Würzburg [Java \(programming language\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
[en.wikipedia.org/wiki/Java_\(programming_language\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language))
Java is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...

Change location

Show search tools [Java - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
en.wikipedia.org/wiki/Java
Java (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...

[Java \(software platform\) - Wikipedia, the free encyclopedia](#)
[en.wikipedia.org/wiki/Java_\(software_platform\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform))
Java is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...

Internet-Suche

Google

java

Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web Images Maps Videos News Shopping Books More Würzburg Change location Show search tools	<p>java.com: Java + You www.java.com/ Get the latest Java Software and explore how Java technology provides a better digital experience.</p> <p>Download Java This page is your source to download or update your ...</p> <p>How do I test whether Java is ... See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...</p> <p>More results from java.com »</p> <p>Java (programming language) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language) Java is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...</p> <p>Java - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java Java (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...</p> <p>Java (software platform) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform) Java is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...</p>
--	--

Wie funktioniert das?

Internet-Suche

Google

java

Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web Images Maps Videos News Shopping Books More Würzburg Change location Show search tools	<p>java.com: Java + You www.java.com/ Get the latest Java Software and explore how Java technology provides a better digital experience.</p> <p>Download Java This page is your source to download or update your ...</p> <p>How do I test whether Java is ... See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...</p> <p>More results from java.com »</p> <p>Java (programming language) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language) Java is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...</p> <p>Java - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java Java (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...</p> <p>Java (software platform) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform) Java is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...</p>
--	--

Wie funktioniert das?
– per Katalog?

Internet-Suche

Google

java

Press Enter to search.

Search

About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web Images Maps Videos News Shopping Books More Würzburg Change location Show search tools	<p>java.com: Java + You www.java.com/ Get the latest Java Software and explore how Java technology provides a better digital experience.</p> <p>Download Java This page is your source to download or update your ...</p> <p>How do I test whether Java is ... See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...</p> <p>More results from java.com »</p> <p>Java (programming language) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language) Java is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...</p> <p>Java - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java Java (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...</p> <p>Java (software platform) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform) Java is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...</p>
--	--

Wie funktioniert das?
 – per Katalog?
 – von Hand??

Internet-Suche

Google

Press Enter to search.

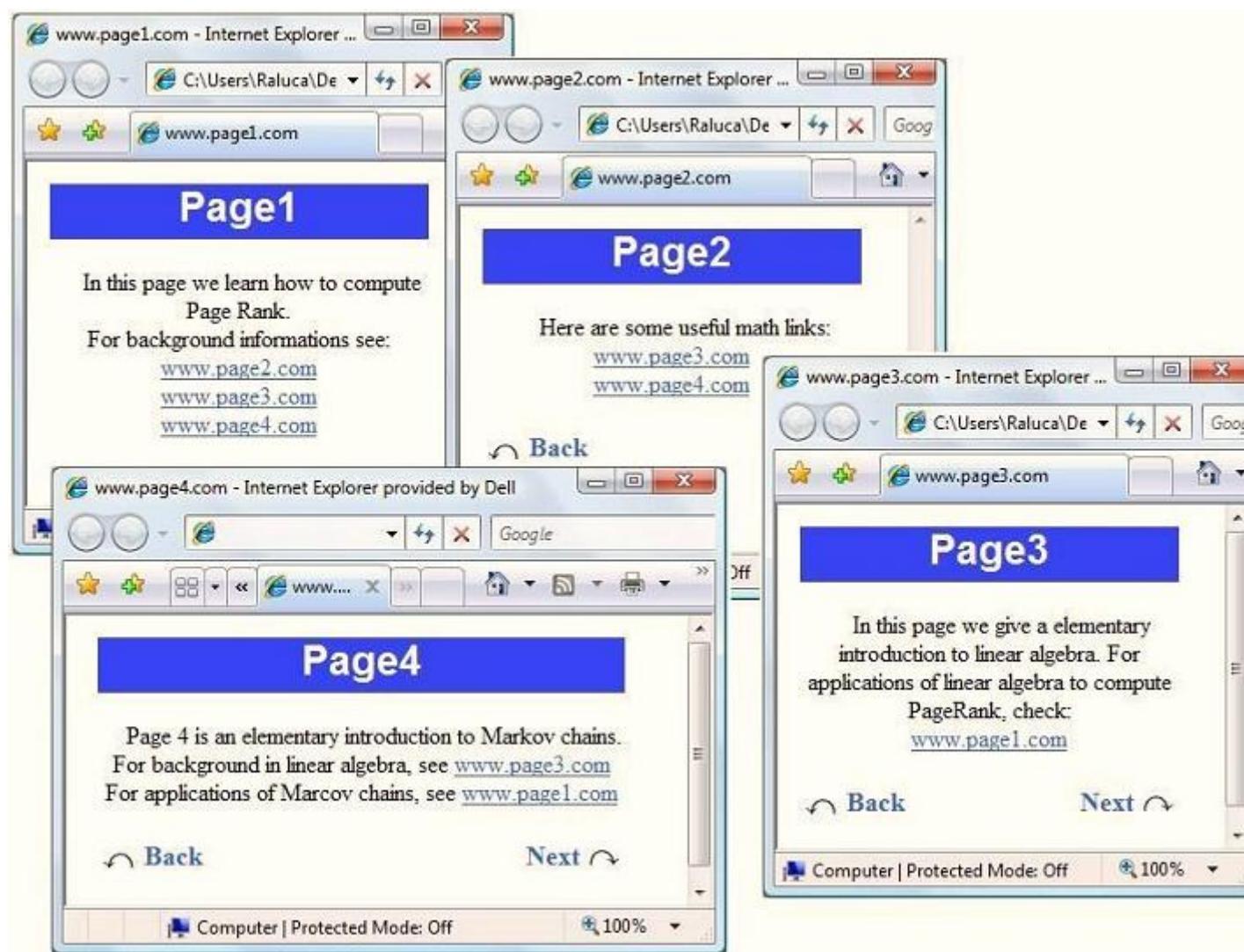
Search About 892,000,000 results (0.22 seconds)

Web Images Maps Videos News Shopping Books More Würzburg Change location Show search tools	<p>java.com: Java + You www.java.com/ Get the latest Java Software and explore how Java technology provides a better digital experience.</p> <p>Download Java This page is your source to download or update your ...</p> <p>How do I test whether Java is ... See if the Java Virtual Machine (JVM) is working properly on ...</p> <p>More results from java.com »</p> <p>Java (programming language) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(programming_language) Java is a programming language originally developed by James Gosling at Sun Microsystems (which has since merged into Oracle Corporation) and released ...</p> <p>Java - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java Java (Indonesian: Jawa) is an island of Indonesia. With a population of 135 million (excluding the 3.6 million on the island of Madura which is administered as ...</p> <p>Java (software platform) - Wikipedia, the free encyclopedia en.wikipedia.org/wiki/Java_(software_platform) Java is a set of several computer software products and specifications from Sun Microsystems (which has since merged with Oracle Corporation), that together ...</p>
--	--

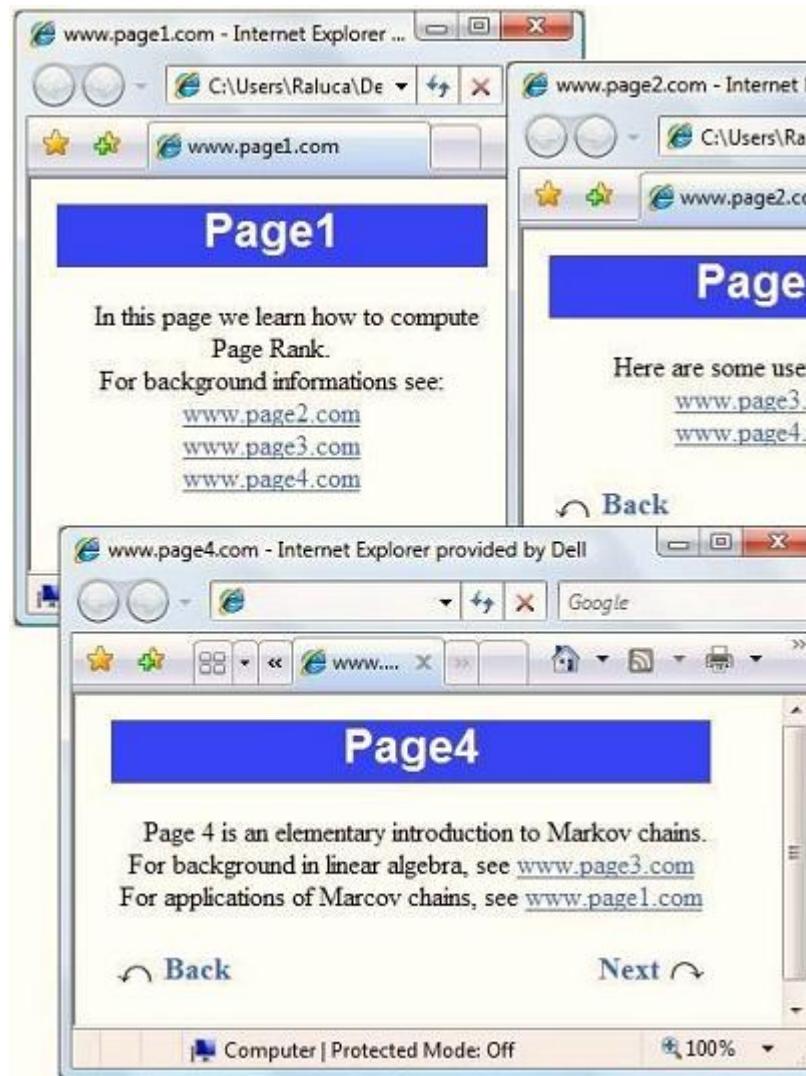
Wie funktioniert das?

- per Katalog?
- von Hand??
- Graphentheorie???

Ein Graphen-Modell



Ein Graphen-Modell



Page1 ●

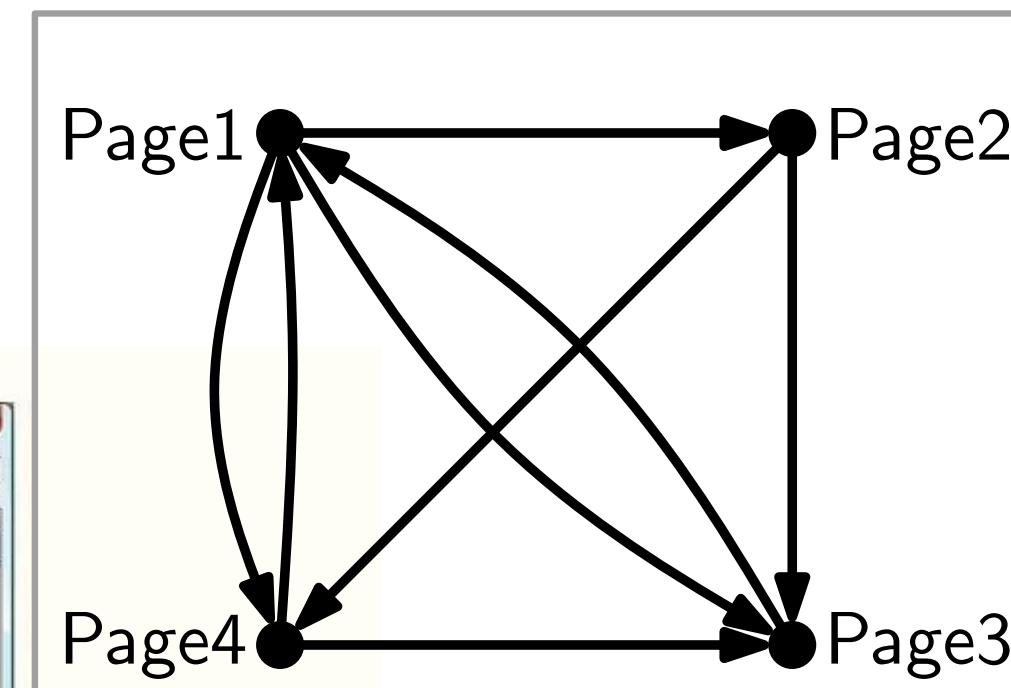
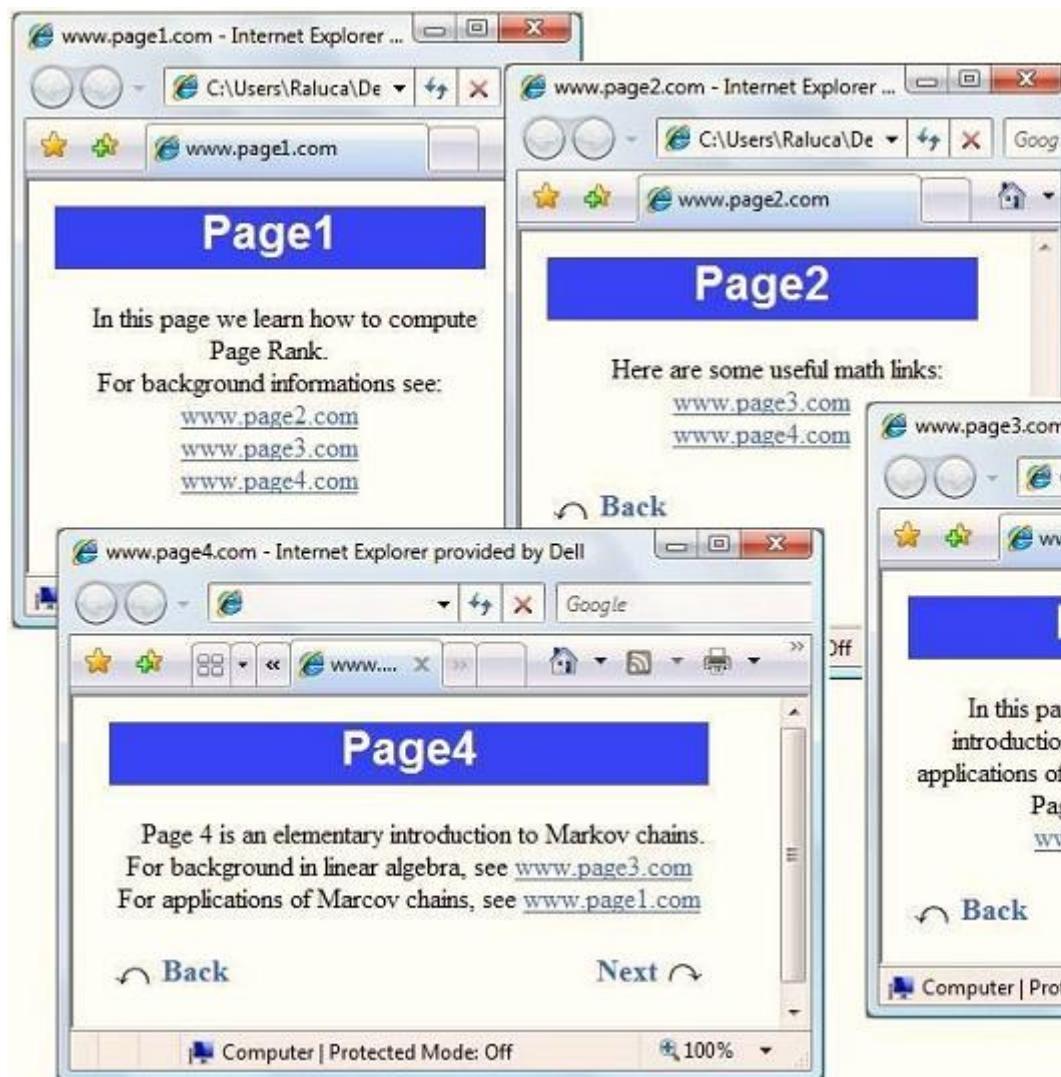
● Page2

Page4 ●

● Page3

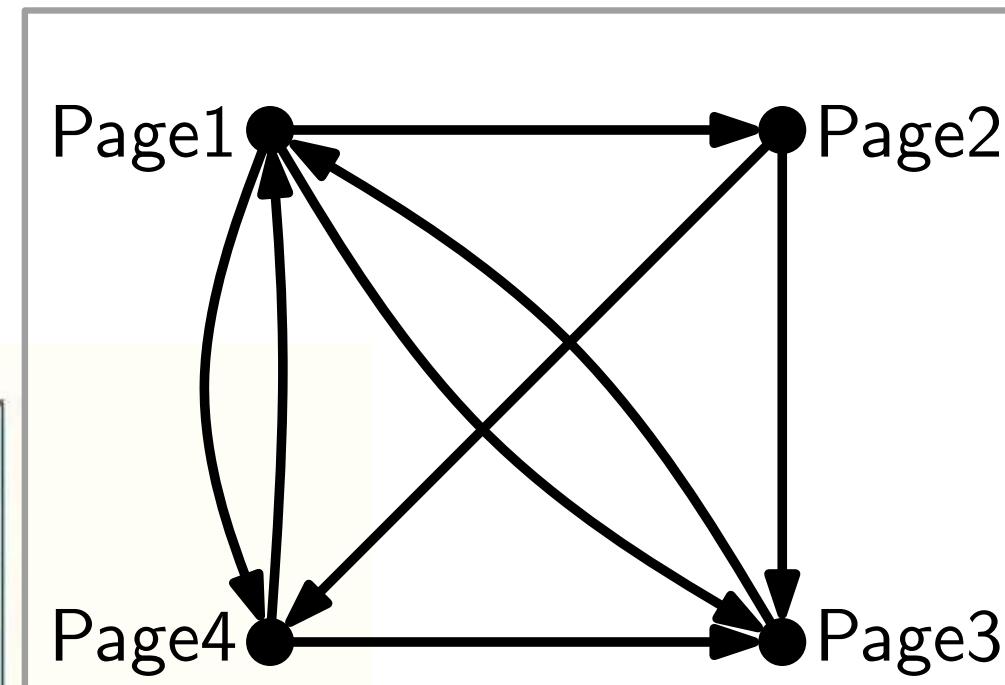
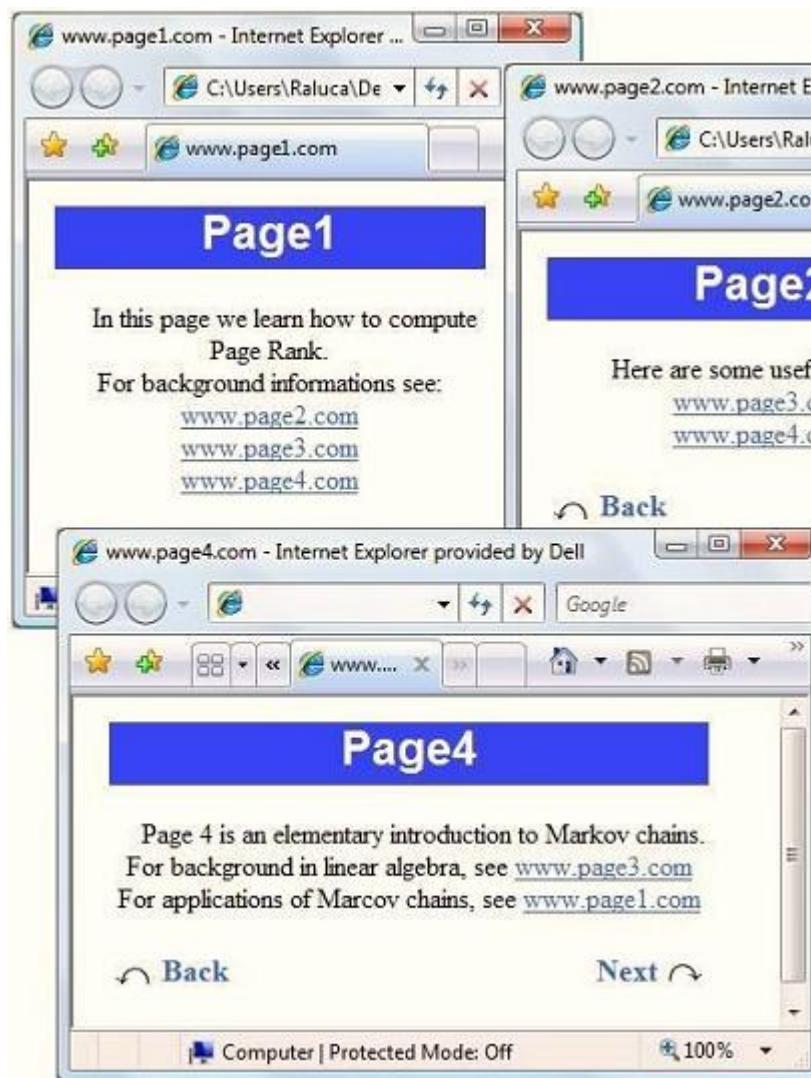
- Ein Knoten für jede Webseite.

Ein Graphen-Modell



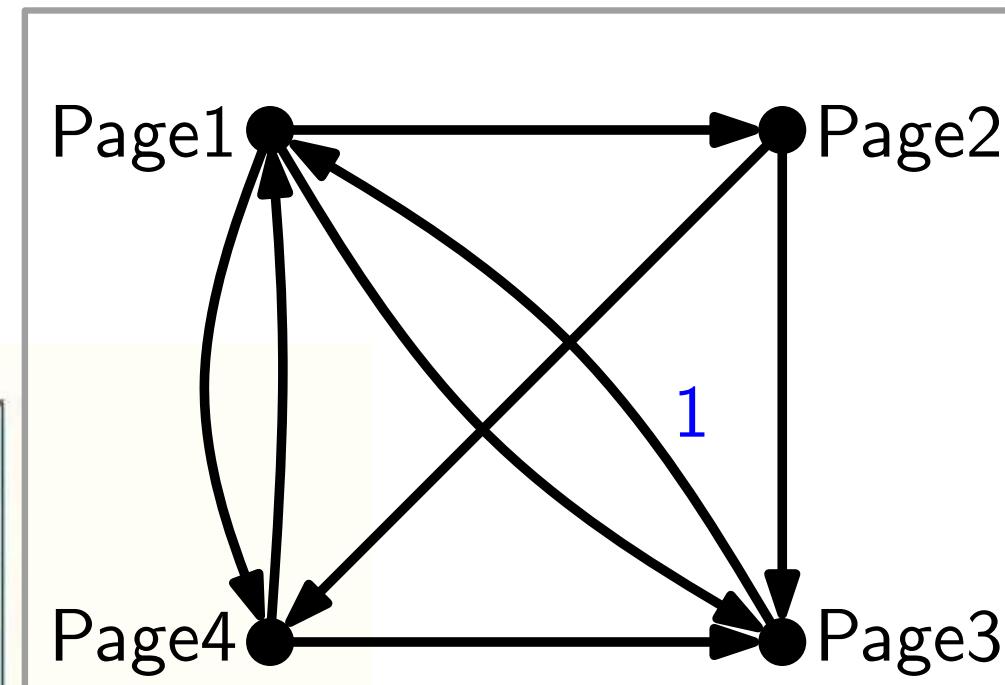
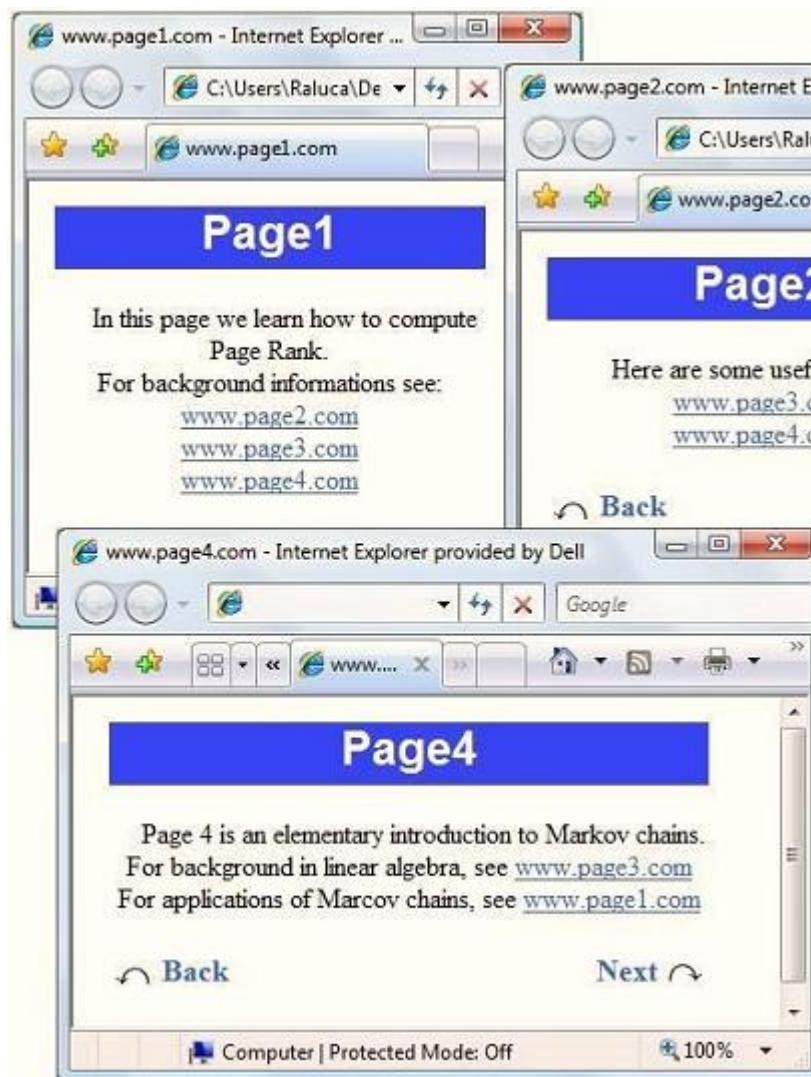
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv , falls Seite u per Link auf Seite v verweist.

Ein Graphen-Modell



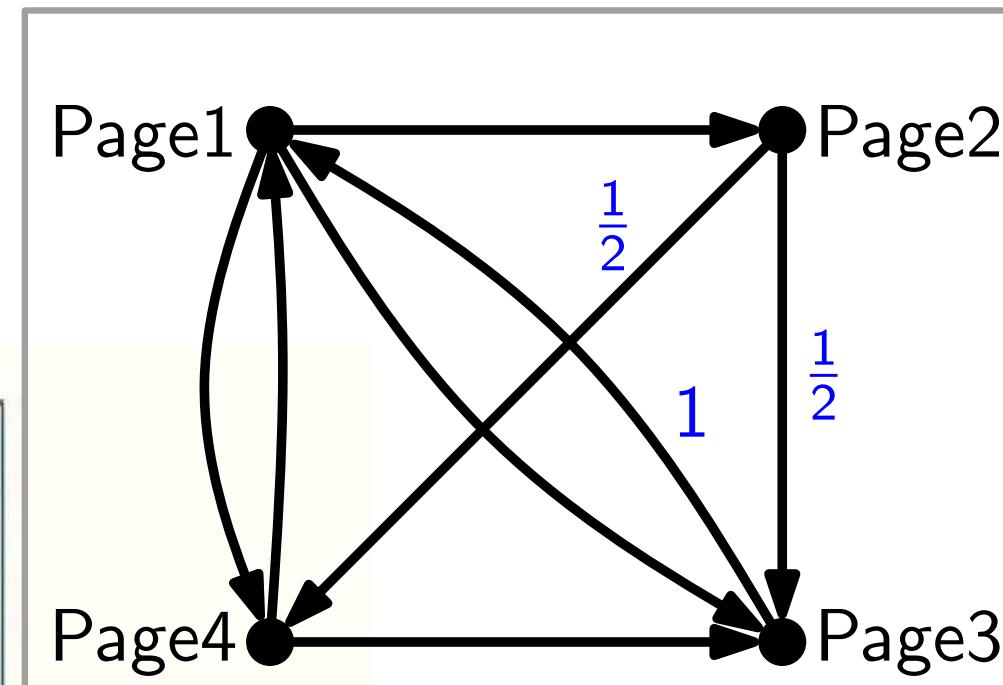
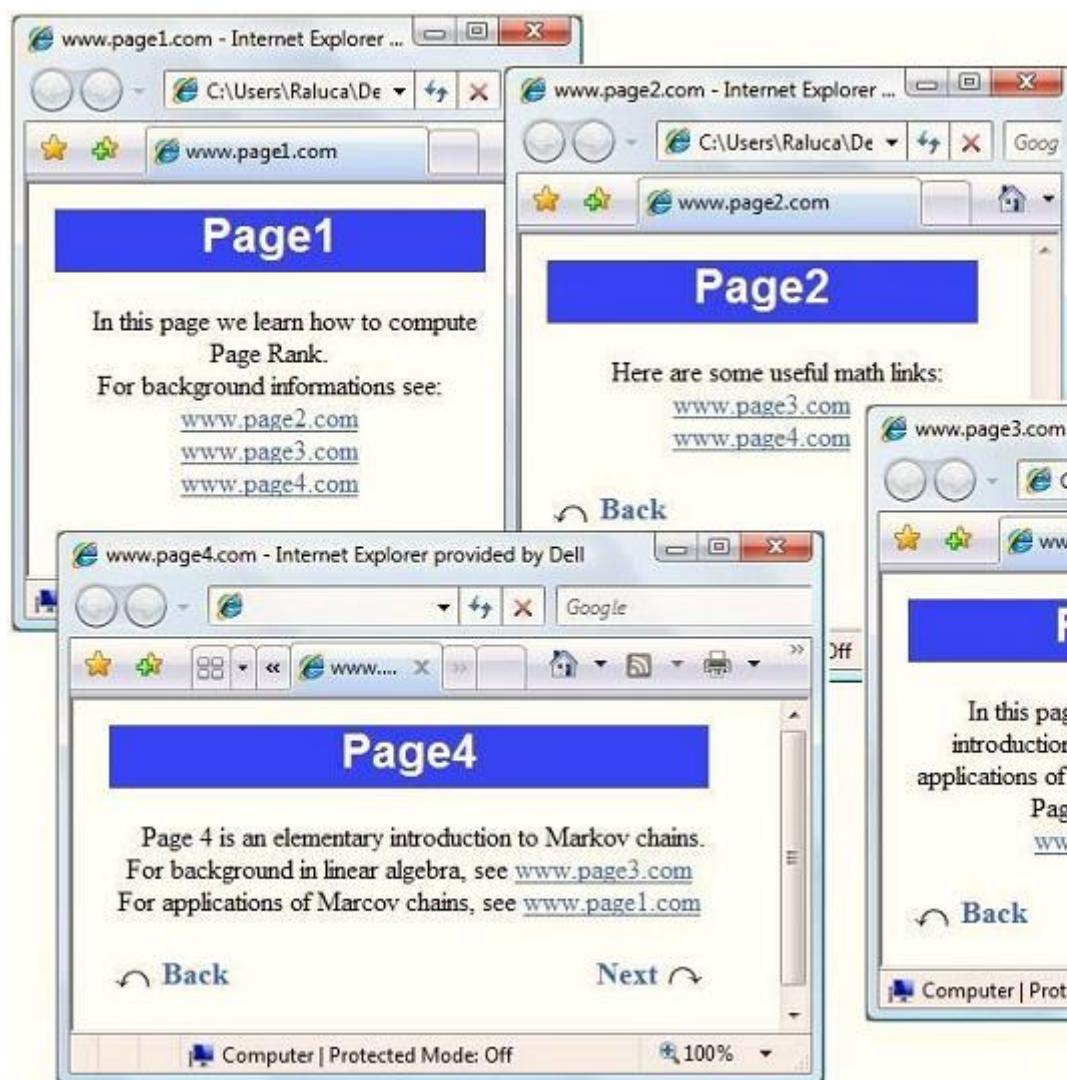
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv , falls Seite u per Link auf Seite v verweist.
- Kantengewichte $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

Ein Graphen-Modell



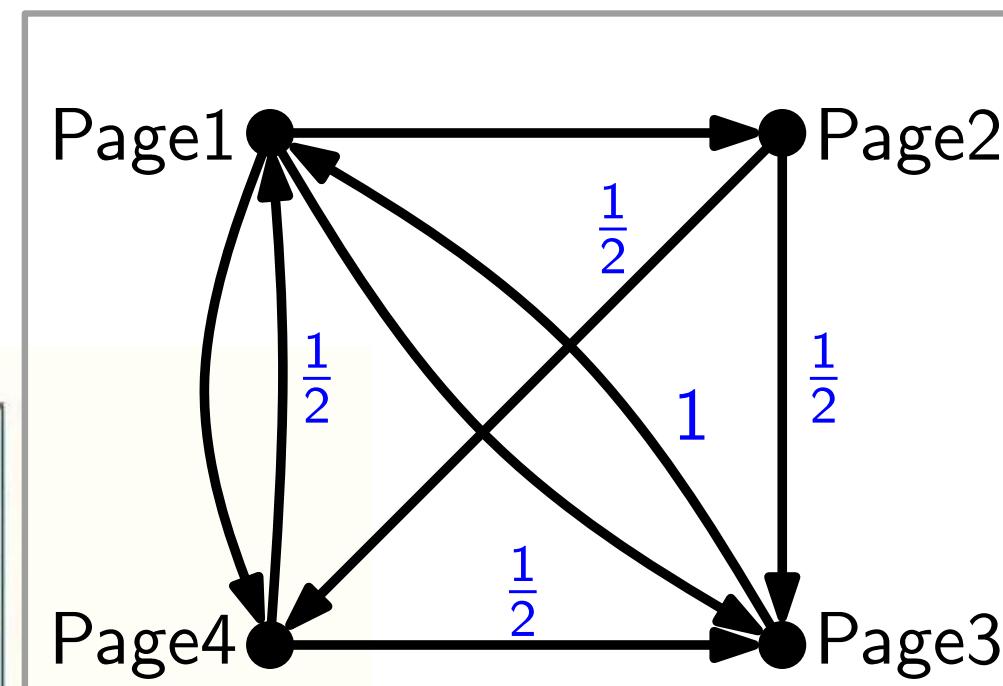
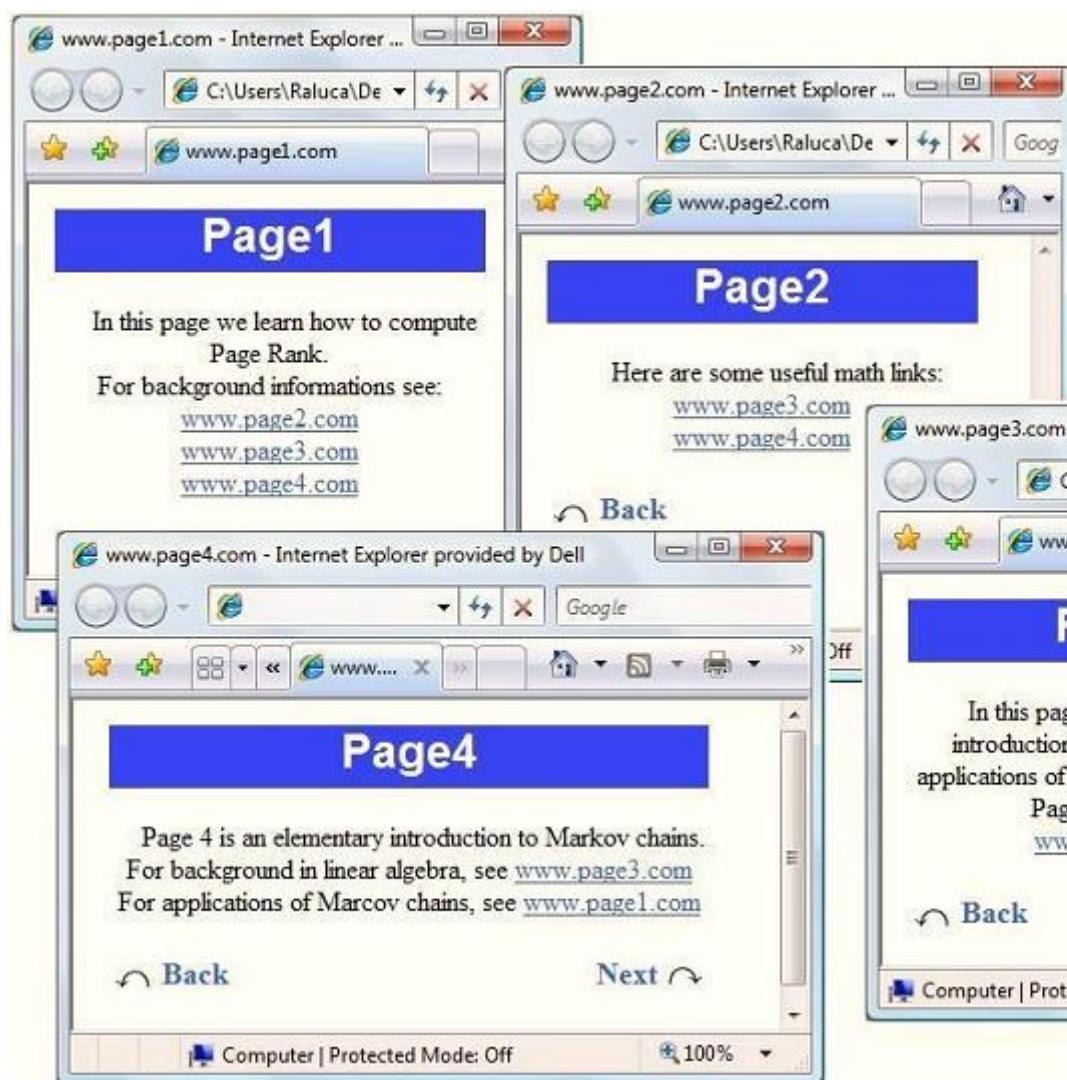
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv , falls Seite u per Link auf Seite v verweist.
- Kantengewichte $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

Ein Graphen-Modell



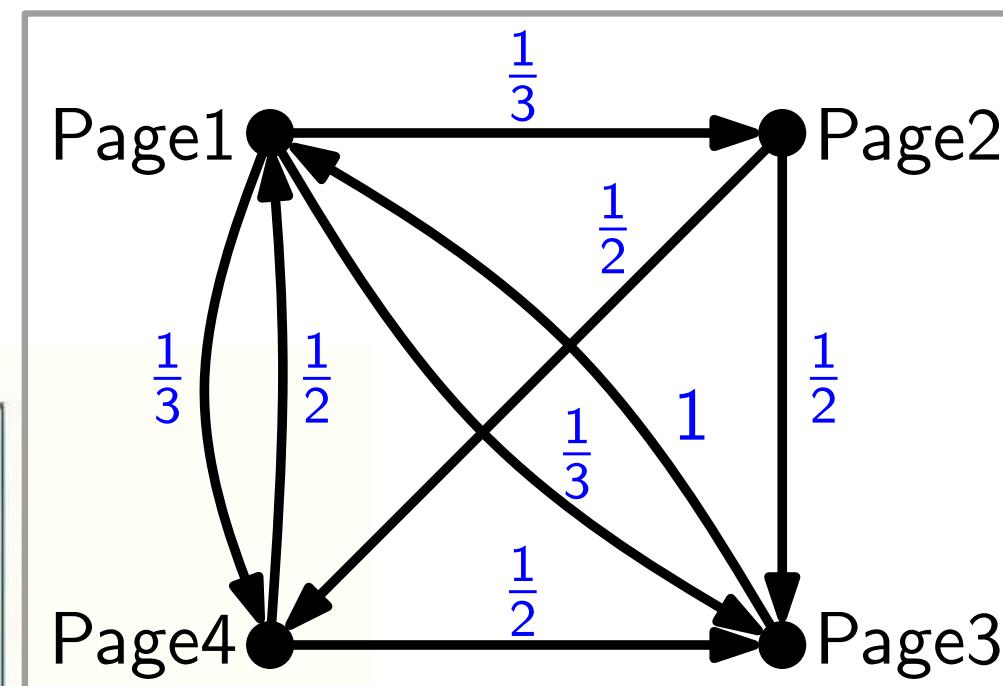
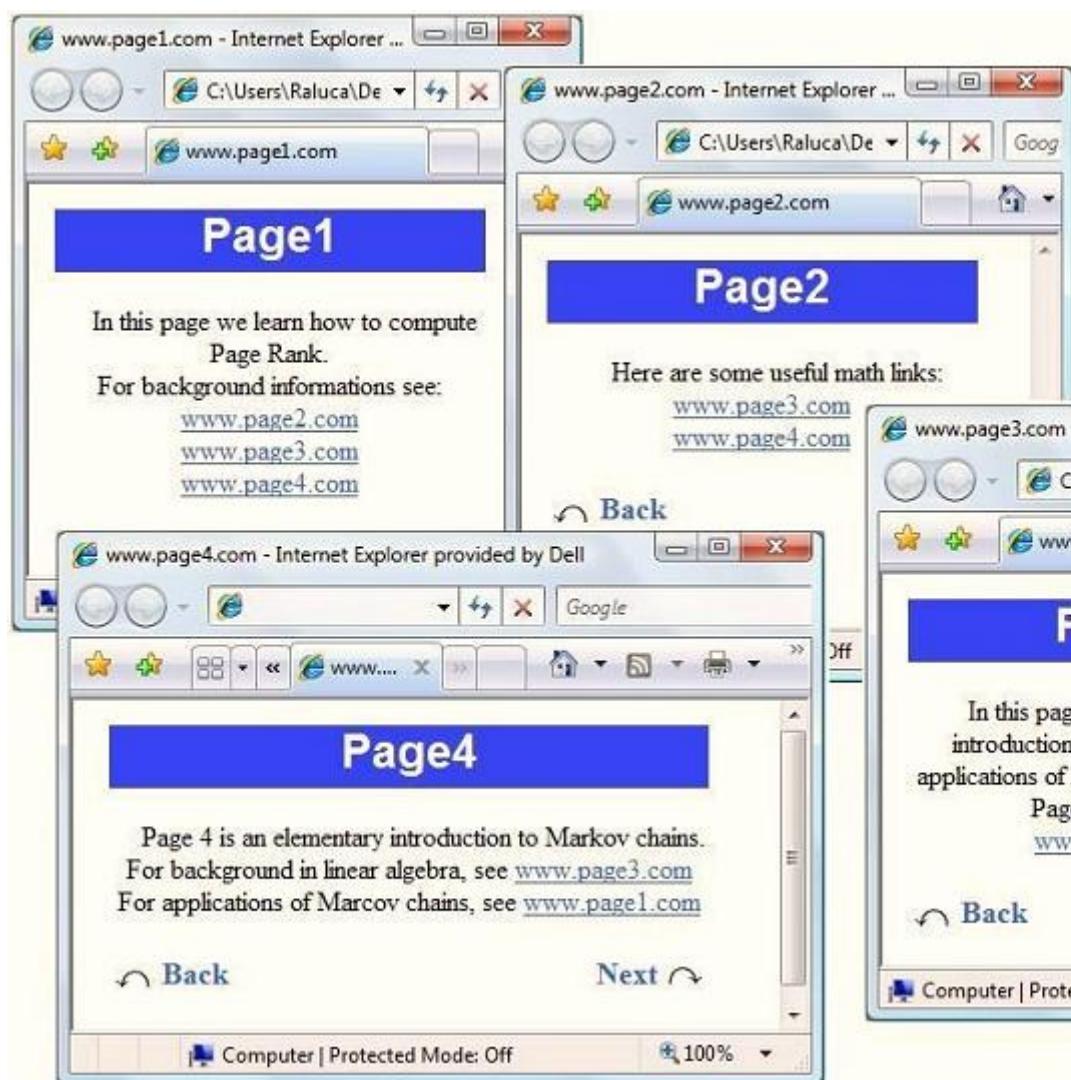
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv , falls Seite u per Link auf Seite v verweist.
- Kantengewichte $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

Ein Graphen-Modell



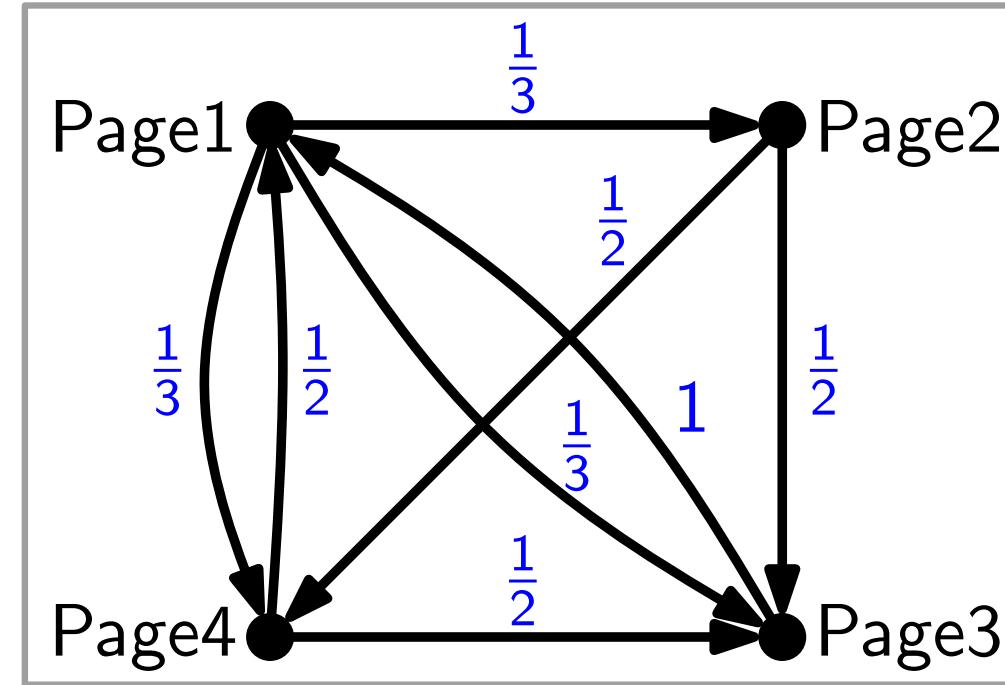
- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv , falls Seite u per Link auf Seite v verweist.
- Kantengewichte $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

Ein Graphen-Modell



- Ein Knoten für jede Webseite.
- Eine Kante uv , falls Seite u per Link auf Seite v verweist.
- Kantengewichte $w(uv) = 1/\text{outdeg}(u)$

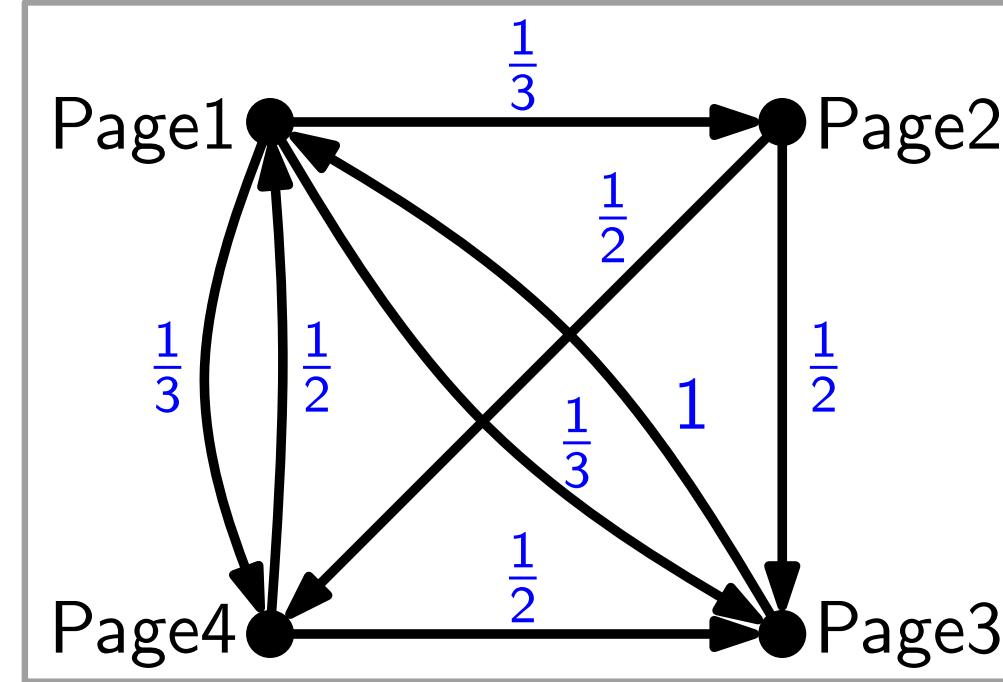
Some Math...



Some Math...

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$



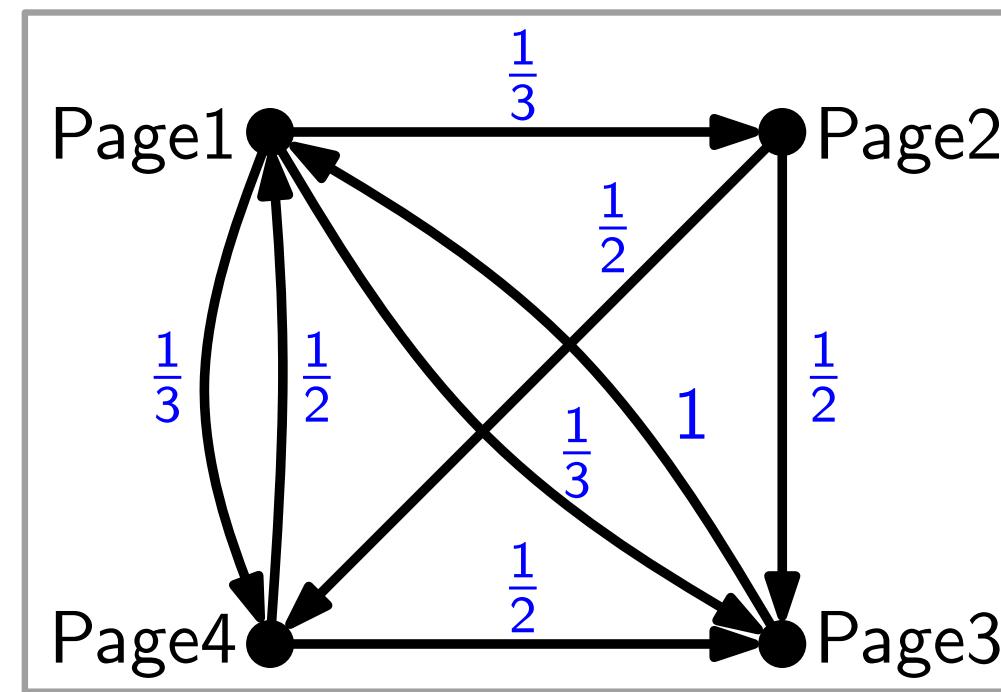
Some Math. . .

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$



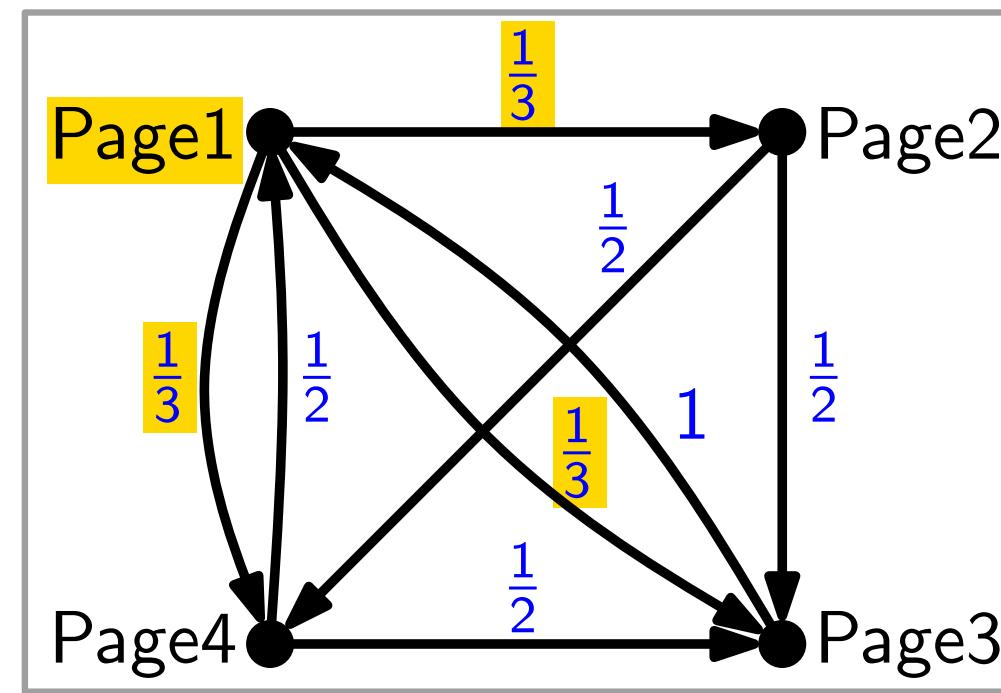
Some Math. . .

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$



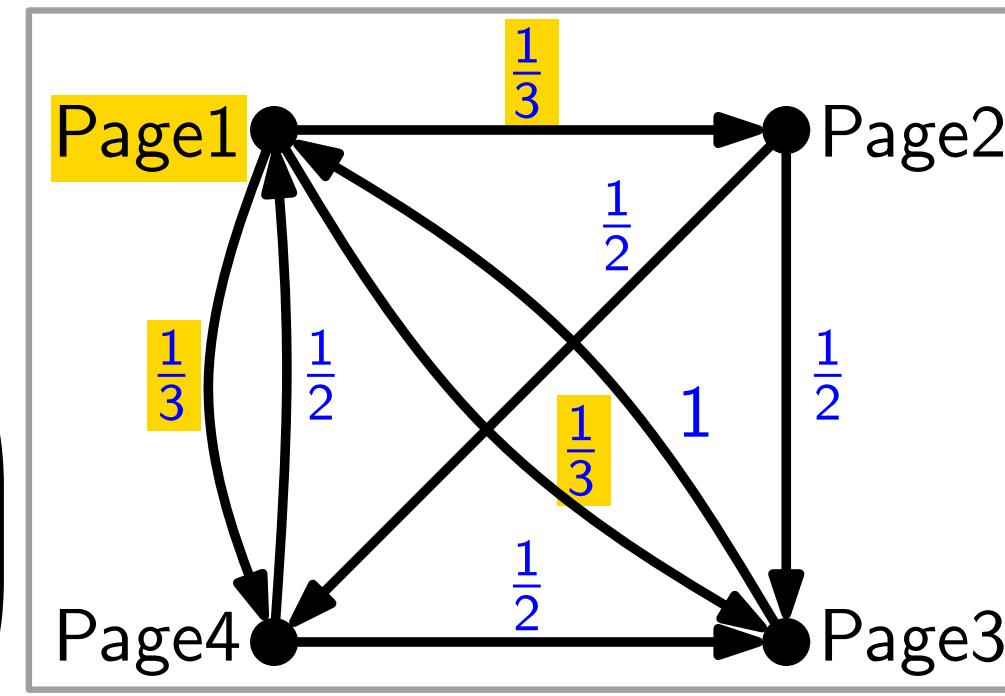
Some Math...

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$



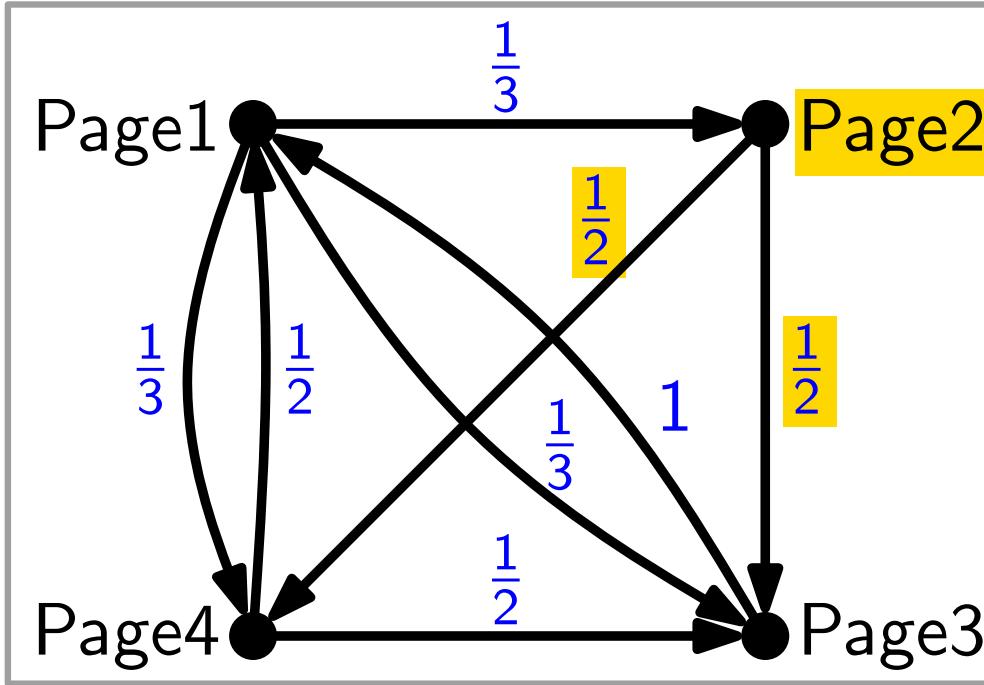
Some Math...

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$



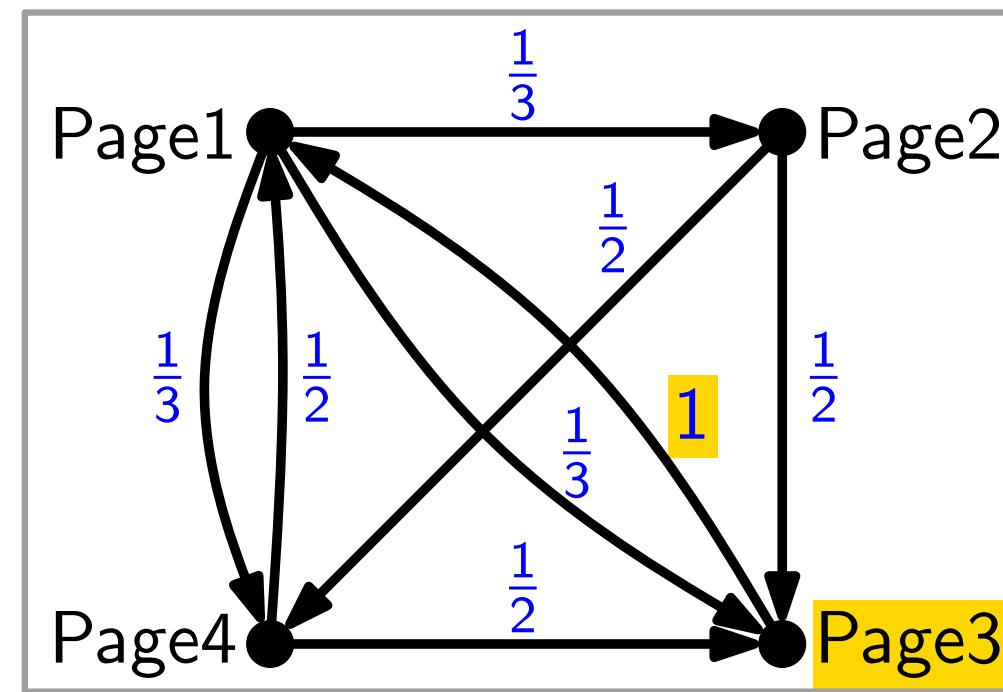
Some Math...

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$



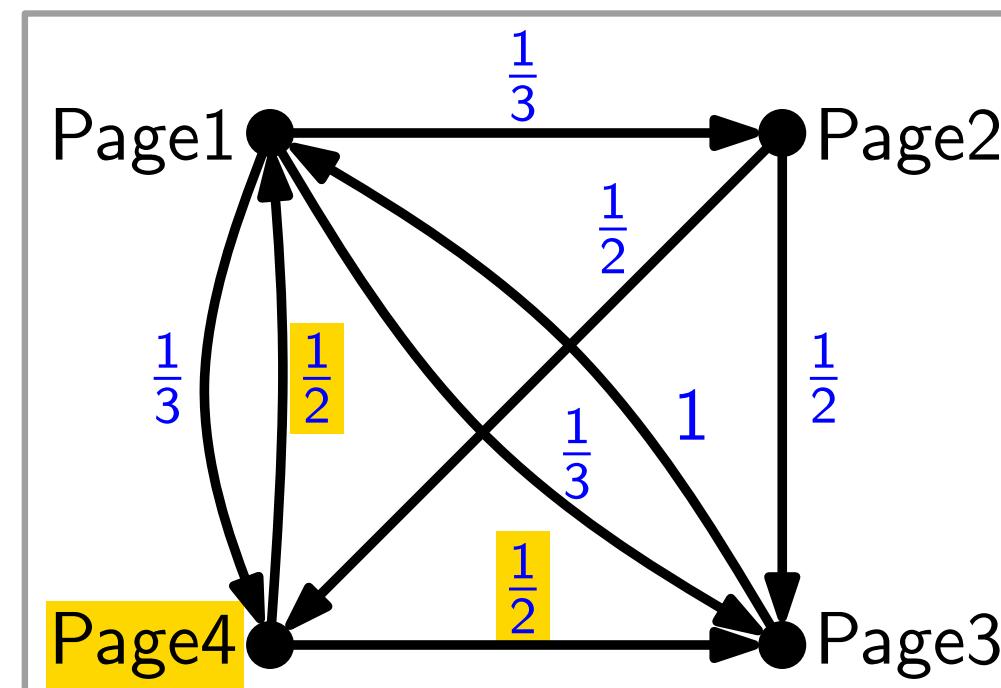
Some Math...

Def. *Übergangsmatrix*

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



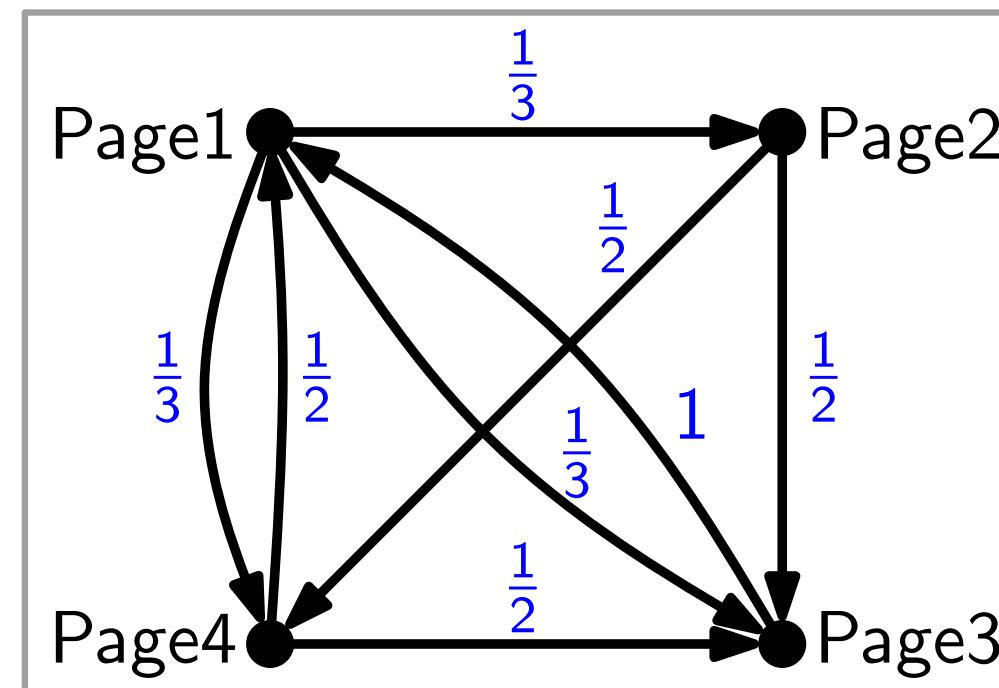
Some Math...

Def. Übergangsmatrix

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Intuition:

Jede der $n = |V(G)|$ Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

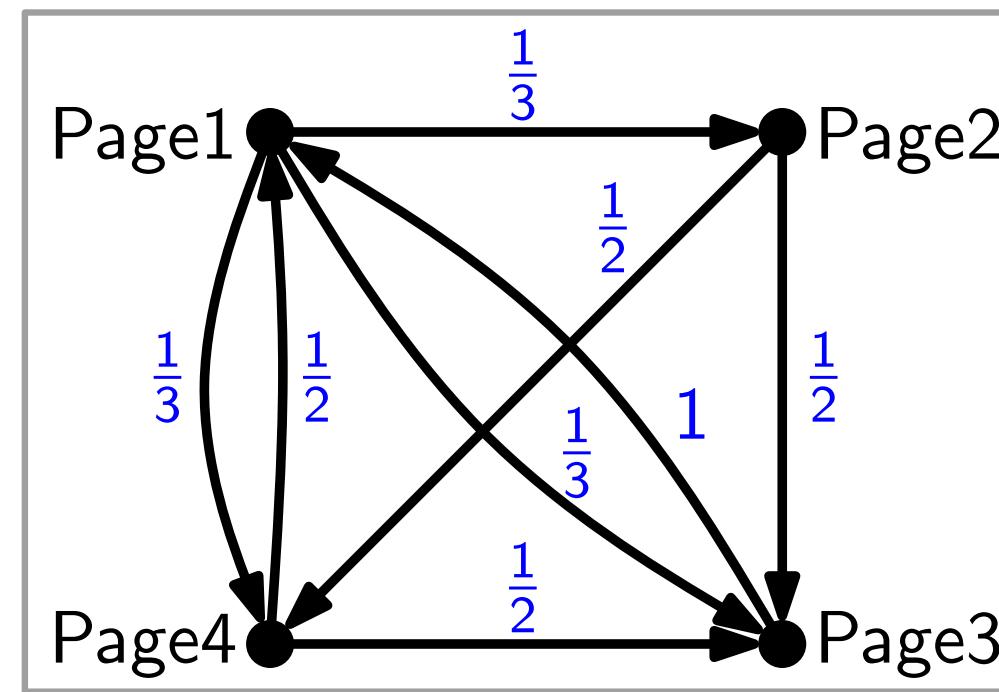
Some Math...

Def. Übergangsmatrix

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Intuition:

Jede der $n = |V(G)|$ Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

Seite desto (ge-)wichtiger, je öfter sie von wichtigen Seiten verlinkt wird.

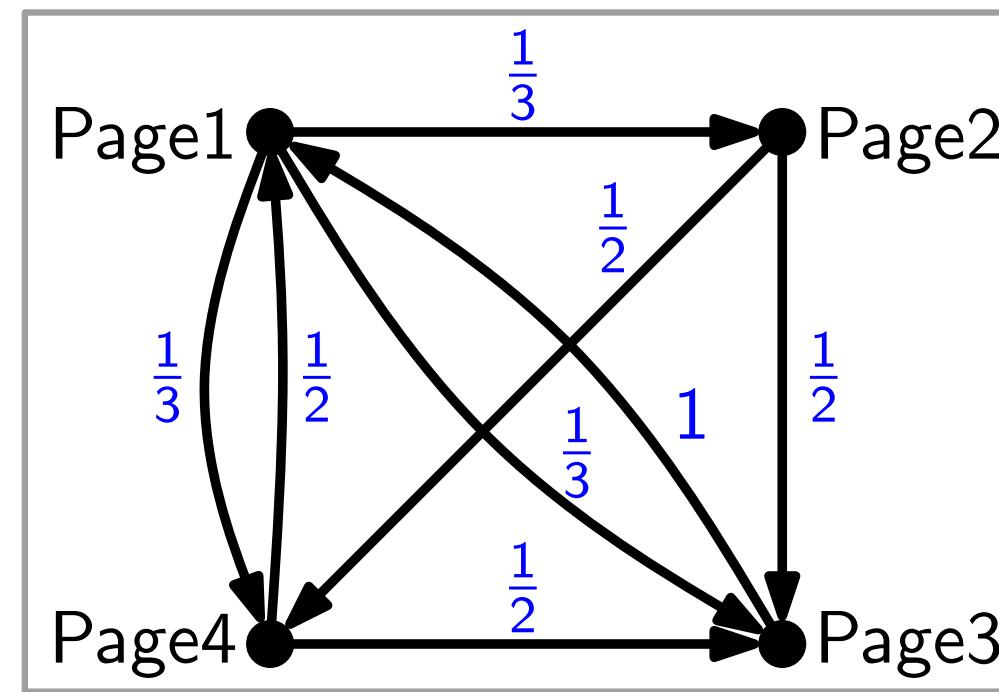
Some Math...

Def. Übergangsmatrix

$$A = (w_{uv})_{uv \in V(G) \times V(G)}$$

hier:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Intuition:

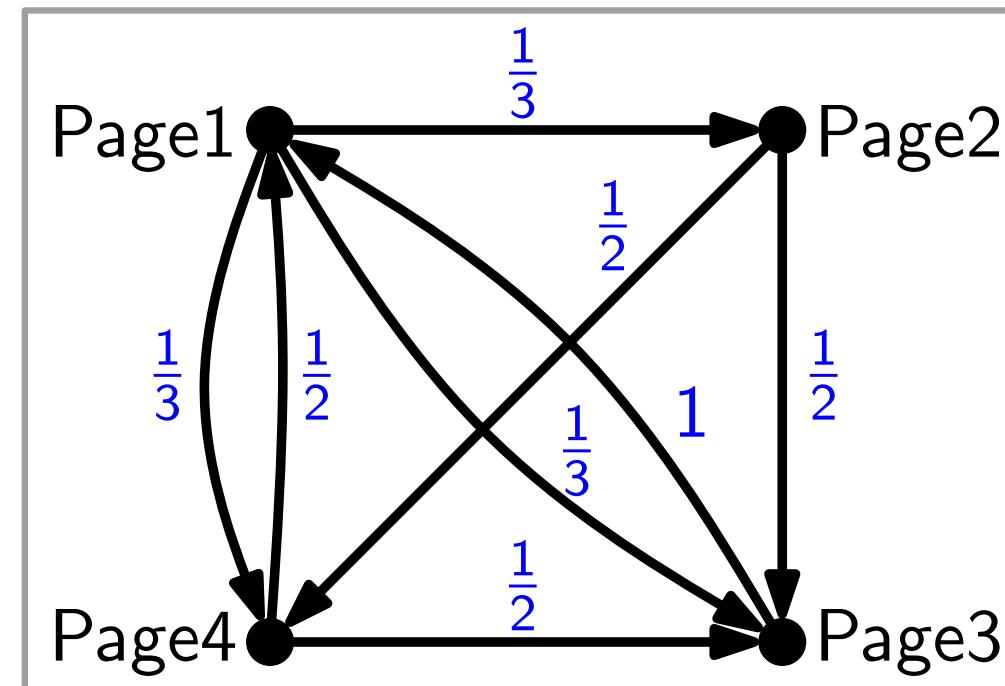
Jede der $n = |V(G)|$ Seiten bekommt ein Gewicht (Rang).

Seite desto (ge-)wichtiger, je öfter sie von wichtigen Seiten verlinkt wird.

Jede Seite verteilt ihr Gewicht über ihre ausgehenden Kanten gleichmäßig unter ihren Nachbarn.

Dynamisches System

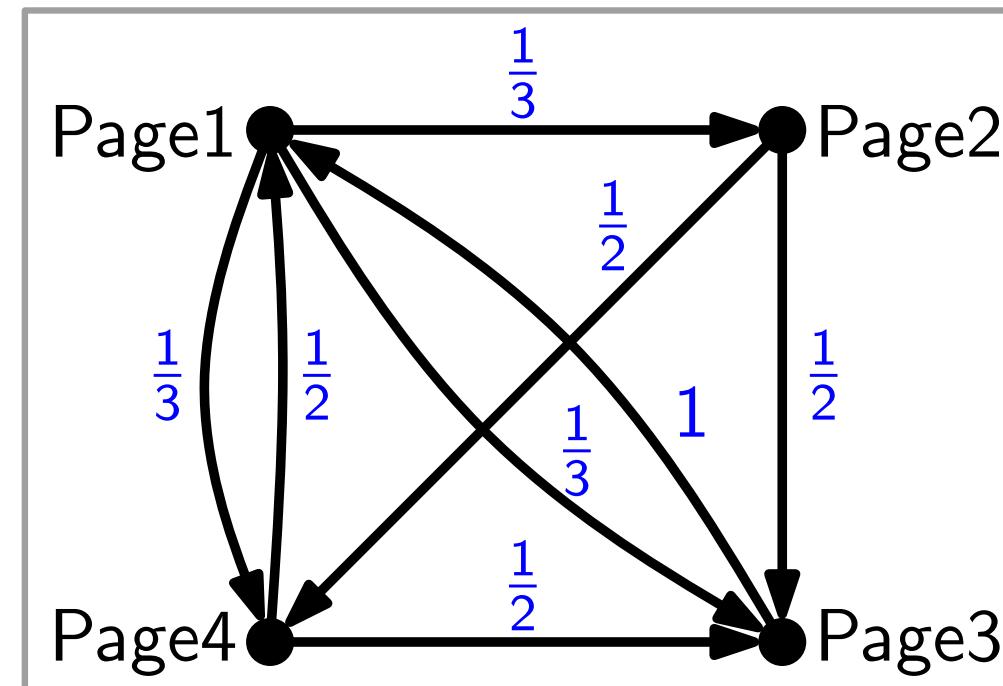
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.

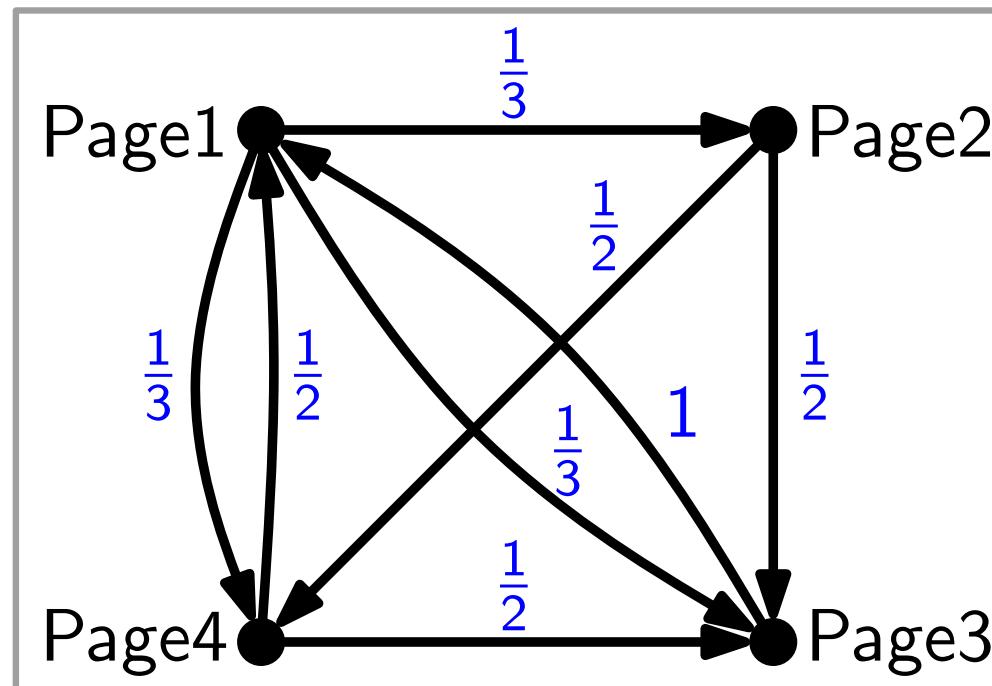


Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.

Im Beispiel: Vektor $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$



Dynamisches System

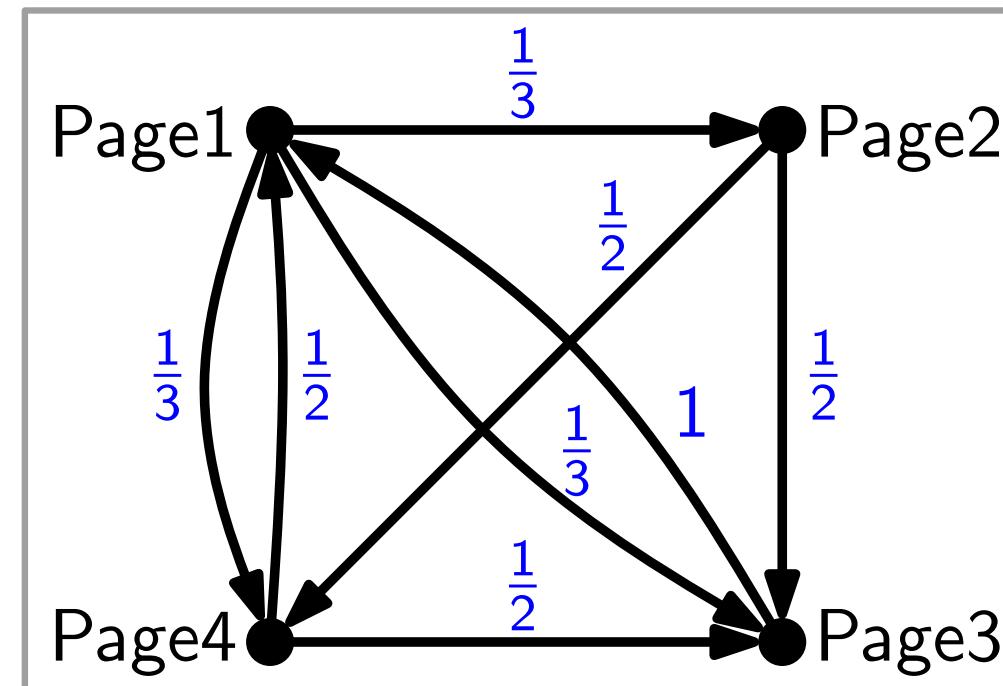
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.

Im Beispiel: Vektor $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

$$r_1 :=$$



Dynamisches System

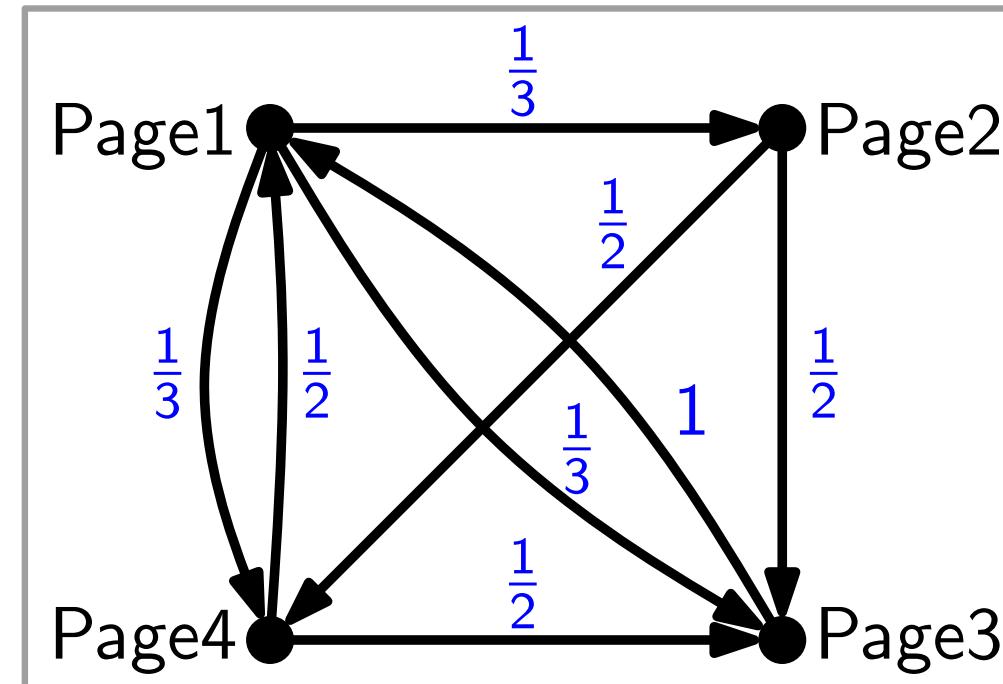
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.

Im Beispiel: Vektor $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

$$r_1 := A \cdot r_0 =$$



Dynamisches System

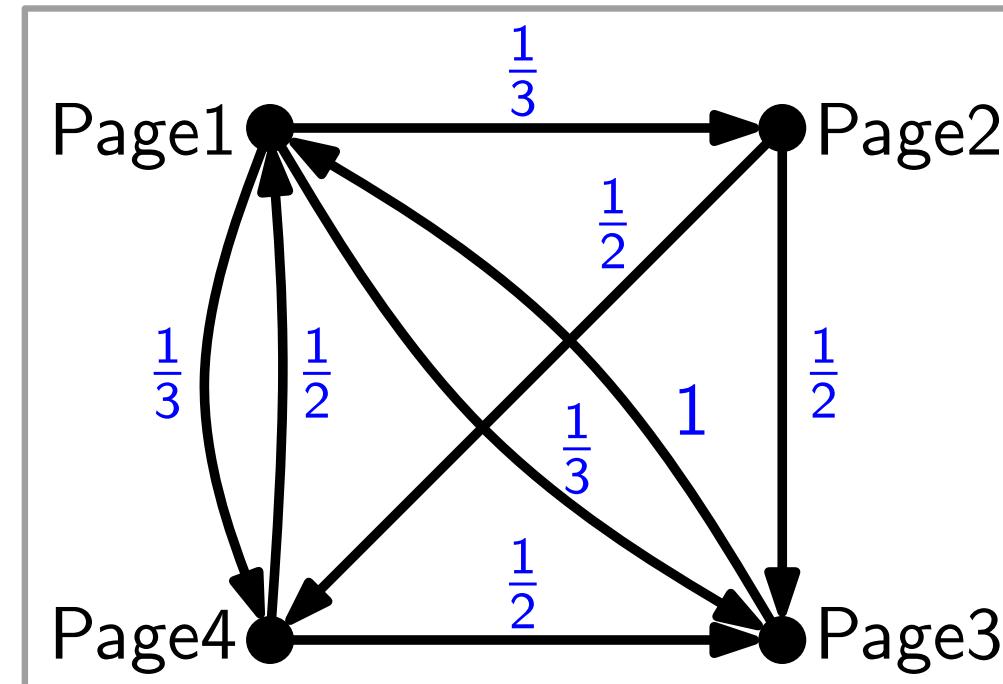
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.

Im Beispiel: Vektor $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

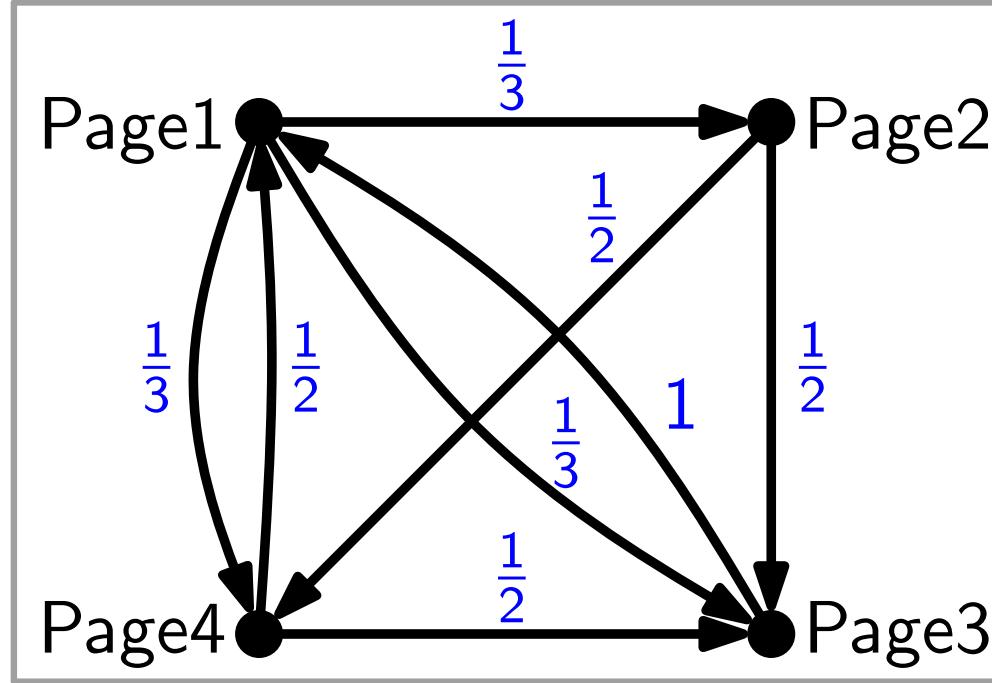
$$r_1 := A \cdot r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} =$$



Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anfangs bekommt jede Seite das gleiche Gewicht: $1/n$.



Im Beispiel: Vektor $r_0 := (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$

Im ersten Schritt verteilt jeder Knoten sein Gewicht gleichmäßig auf seine Nachbarn:

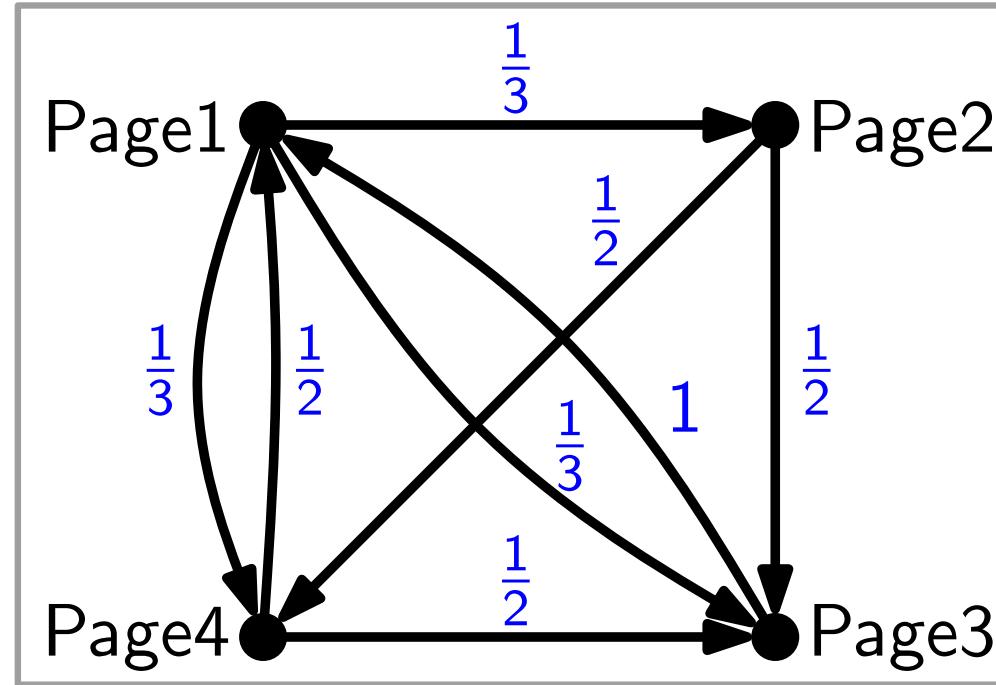
$$r_1 := A \cdot r_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/12 \\ 1/3 \\ 5/24 \end{pmatrix}$$

Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 :=$$

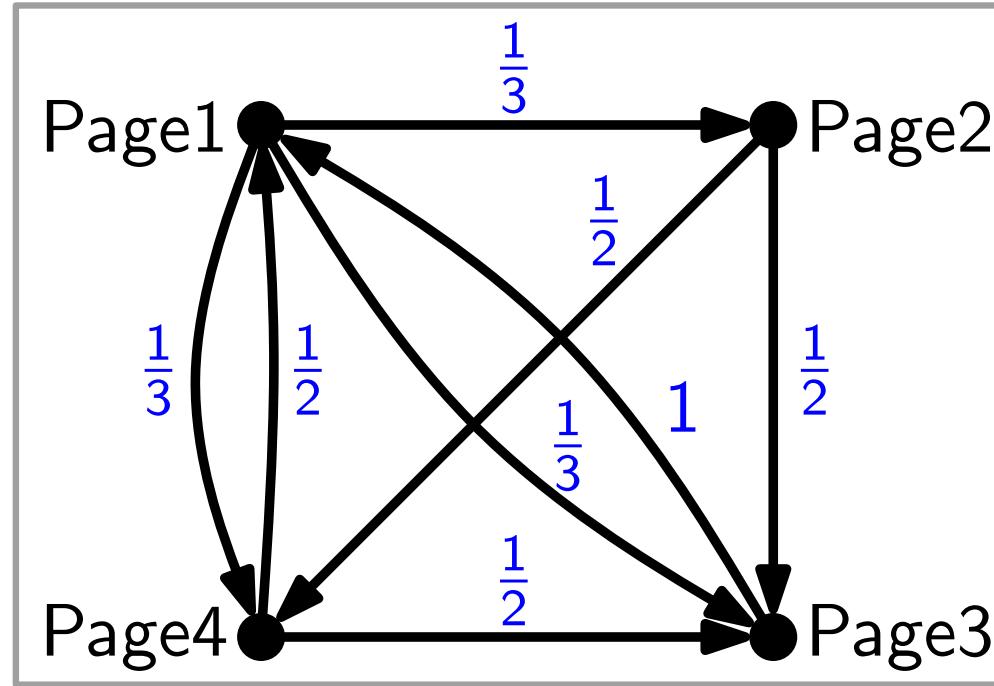


Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 =$$

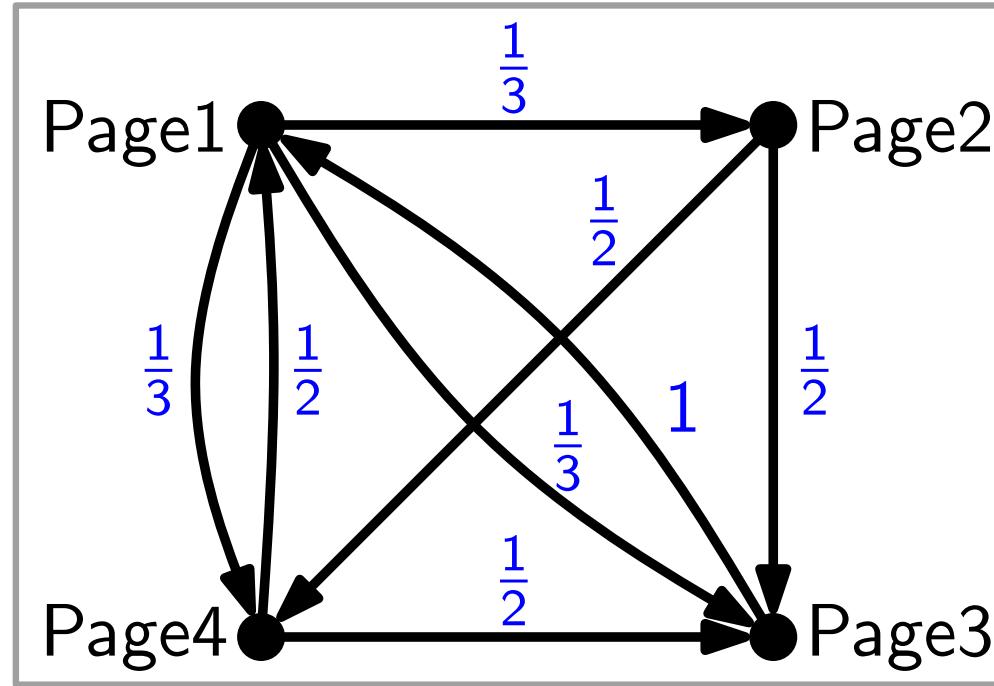


Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) =$$

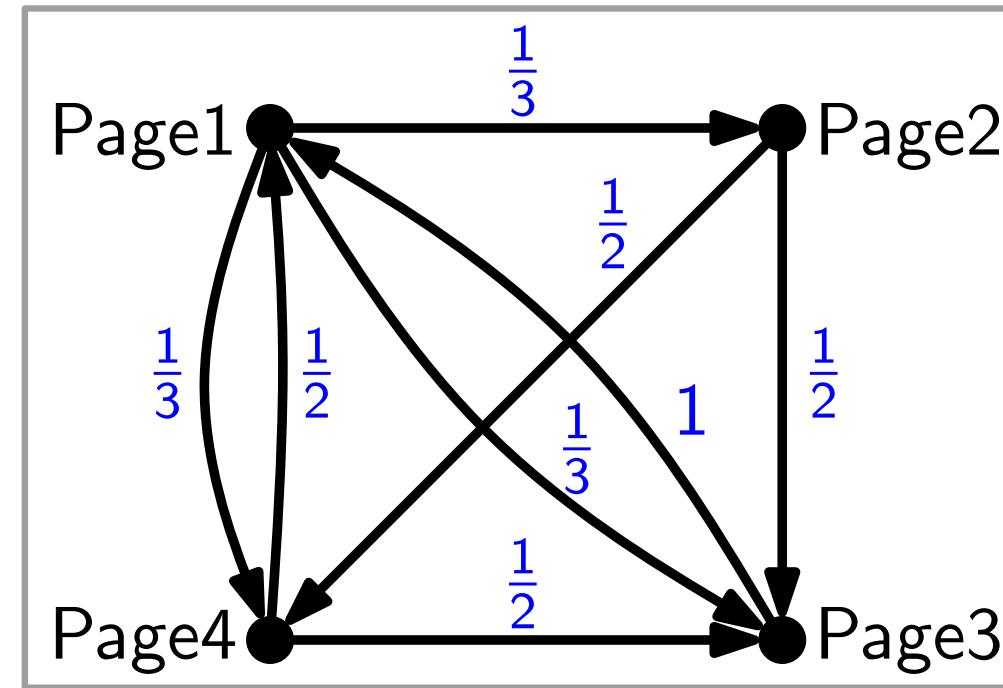


Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx$$

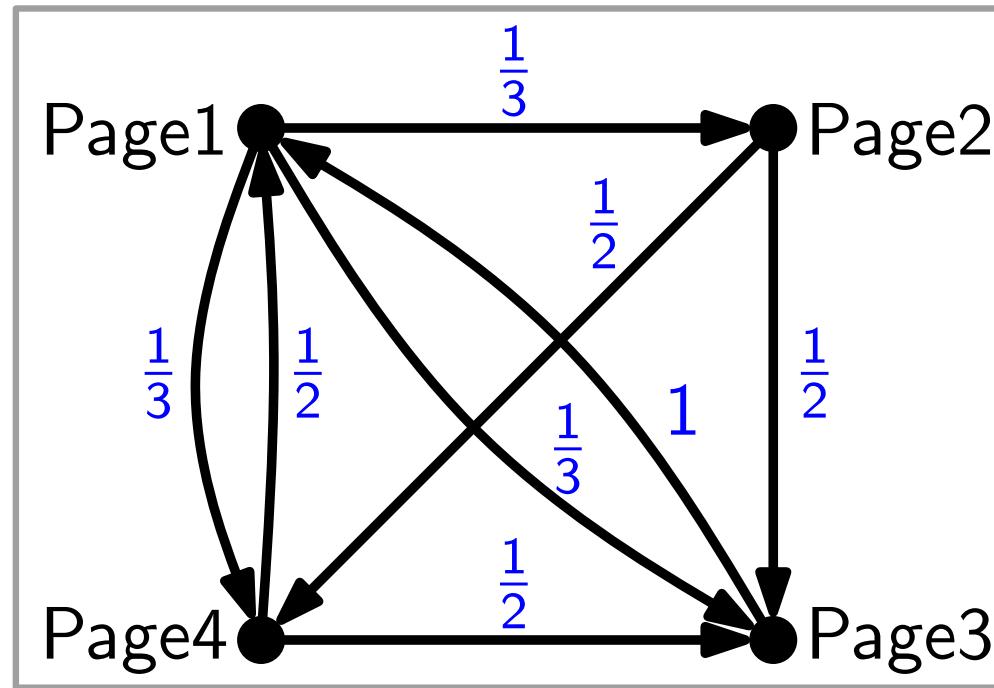


Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$



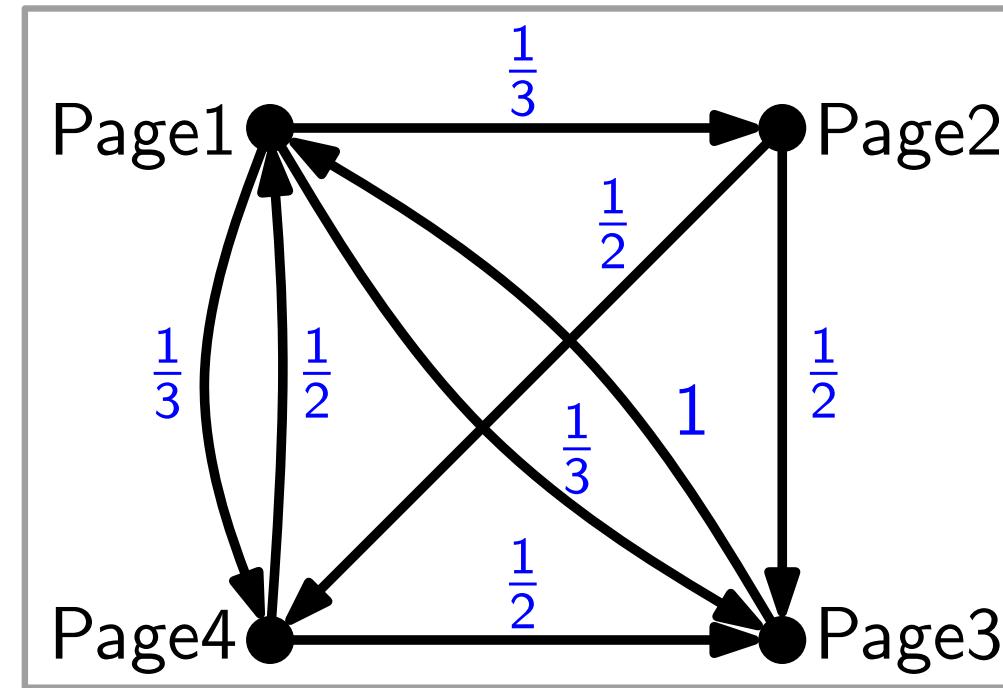
Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$



Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

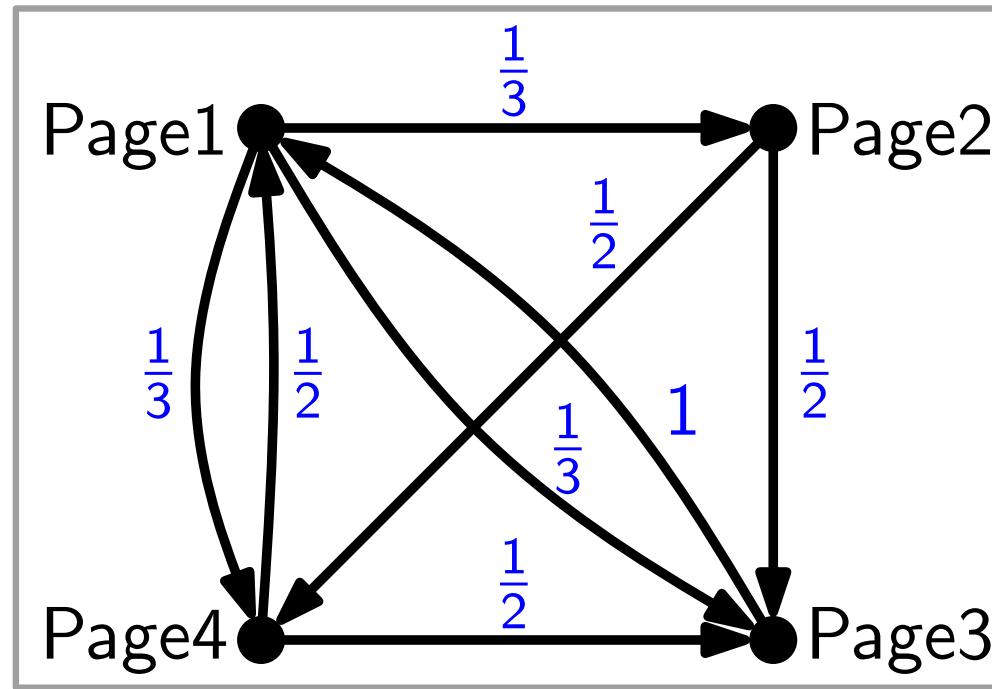
Iteriere dieses Verfahren!

$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

⋮

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$



Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

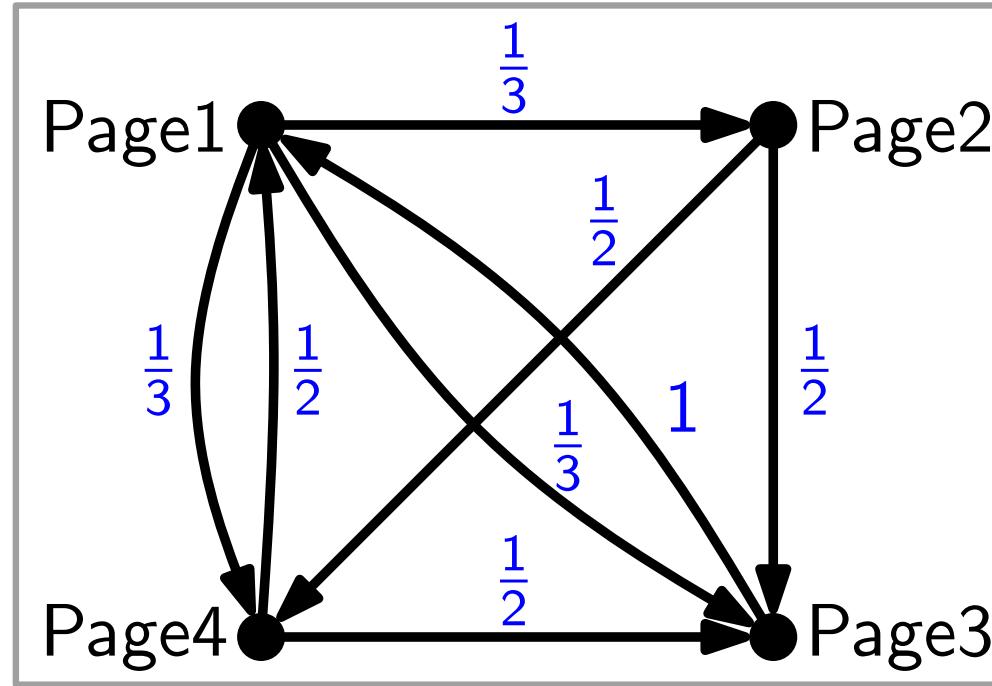
$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

⋮

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$

$$r_7 := A^7 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,12; 0,29; 0,19)^\top \approx A^8 \cdot r_0 =: r_8$$



Dynamisches System

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteriere dieses Verfahren!

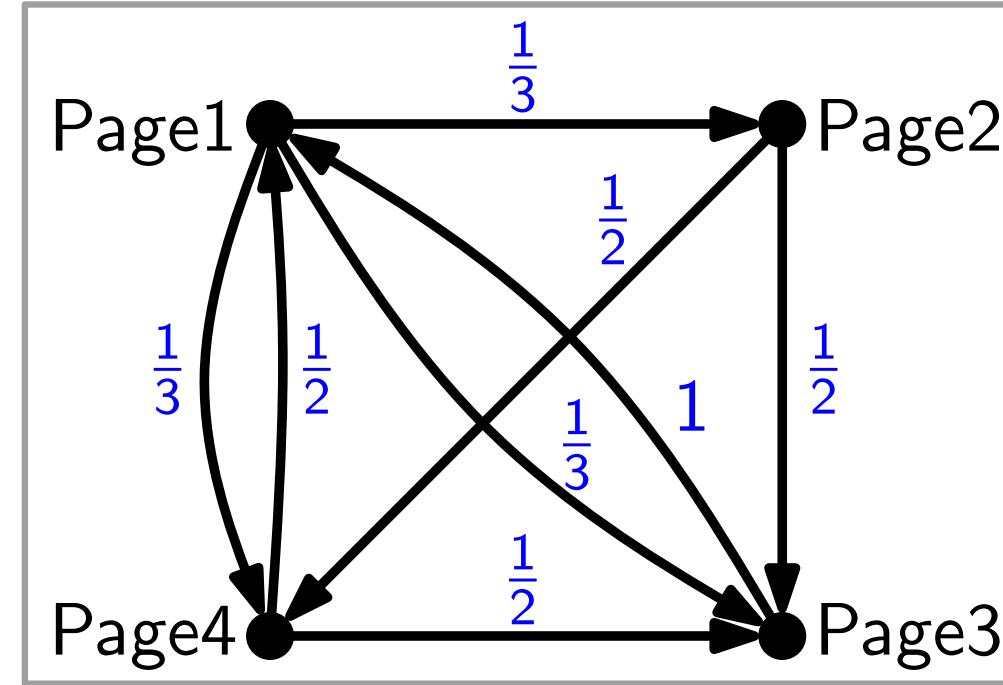
$$r_2 := A \cdot r_1 = A \cdot (A \cdot r_0) = A^2 \cdot r_0 \approx (0,43; 0,12; 0,27; 0,16)^\top$$

$$r_3 := A^3 \cdot r_0 \approx (0,35; 0,14; 0,29; 0,20)^\top$$

⋮

$$r_6 := A^6 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,13; 0,29; 0,19)^\top$$

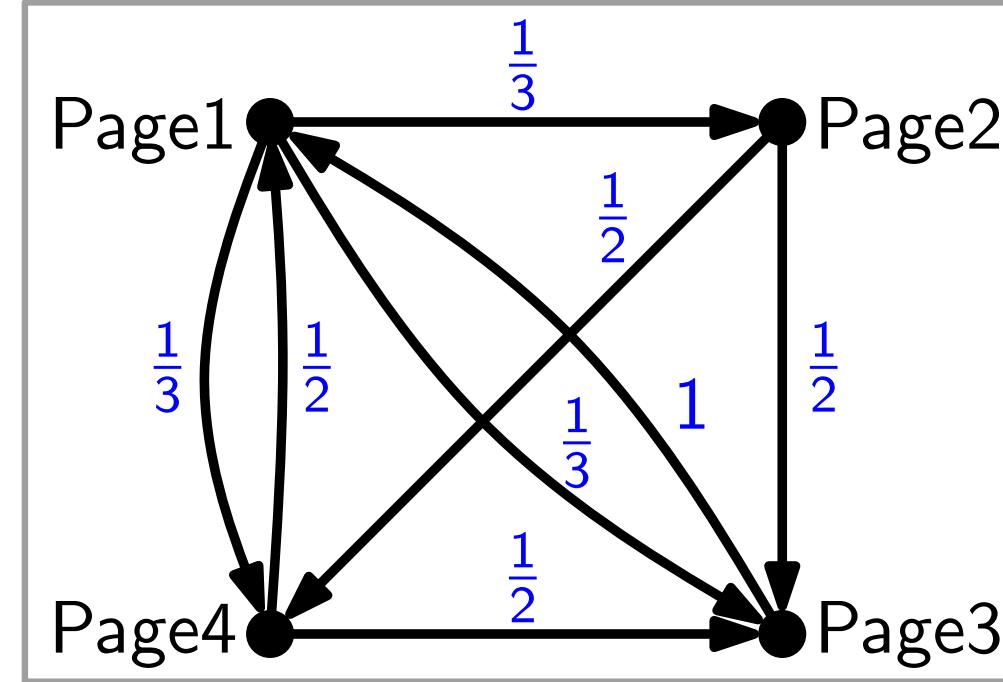
$$r_7 := A^7 \cdot r_0 \approx (0,38; 0,12; 0,29; 0,19)^\top \approx A^8 \cdot r_0 =: r_8$$



*System strebt gegen
Gleichgewichtszustand!*

Eigenvektoren

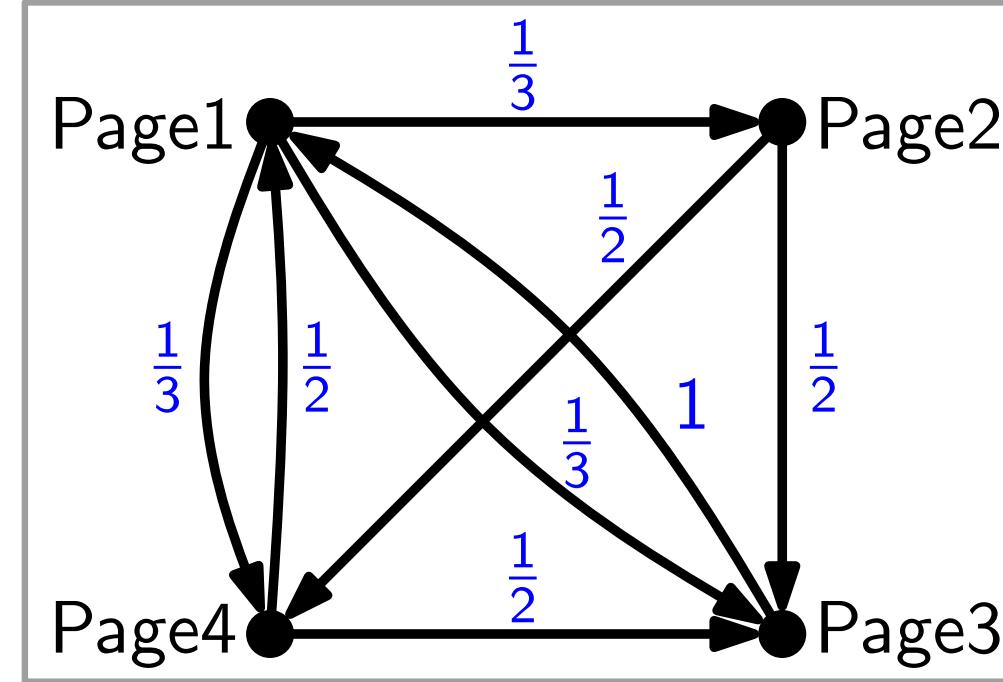
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

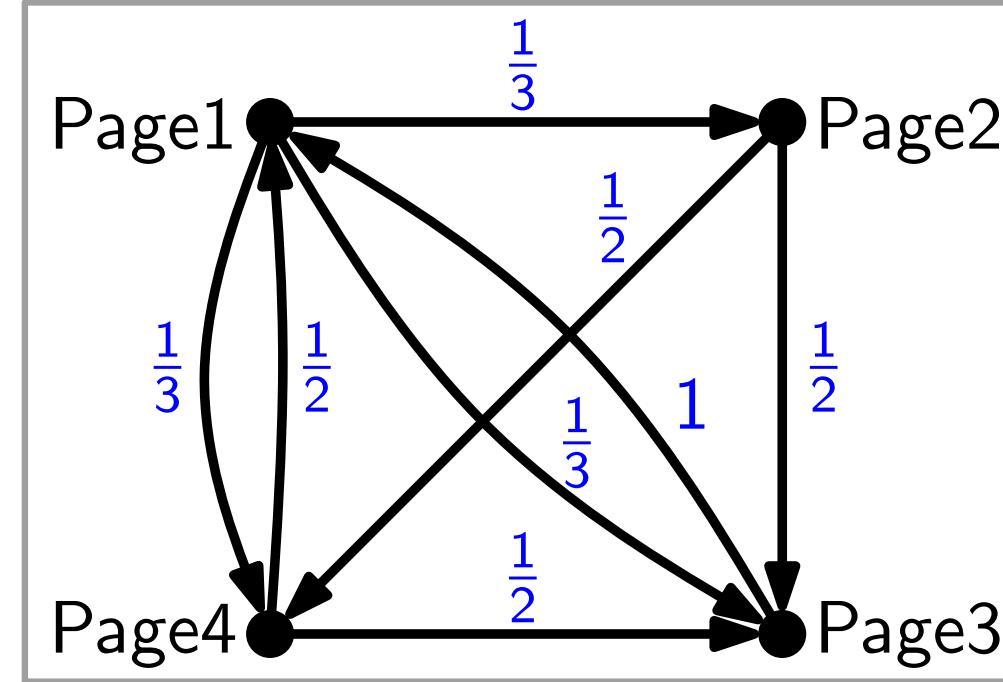


Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

D.h. r ist Eigenvektor von A für den Eigenwert 1.

Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

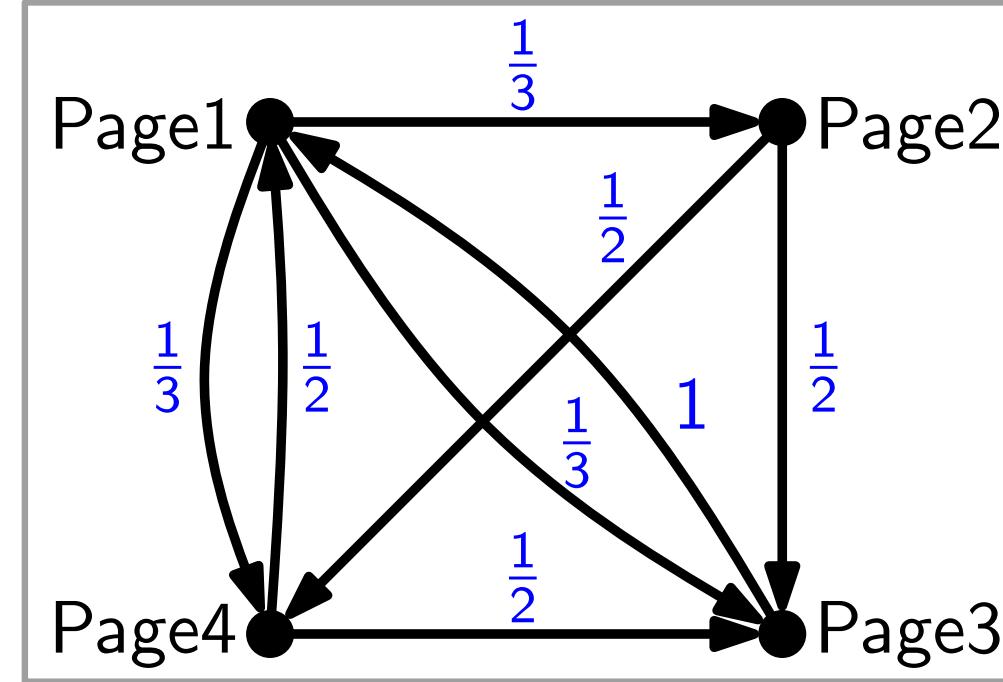
D.h. r ist Eigenvektor von A für den Eigenwert 1.

Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form $c \cdot (12, 4, 9, 6)^T$.

Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

D.h. r ist Eigenvektor von A für den Eigenwert 1.

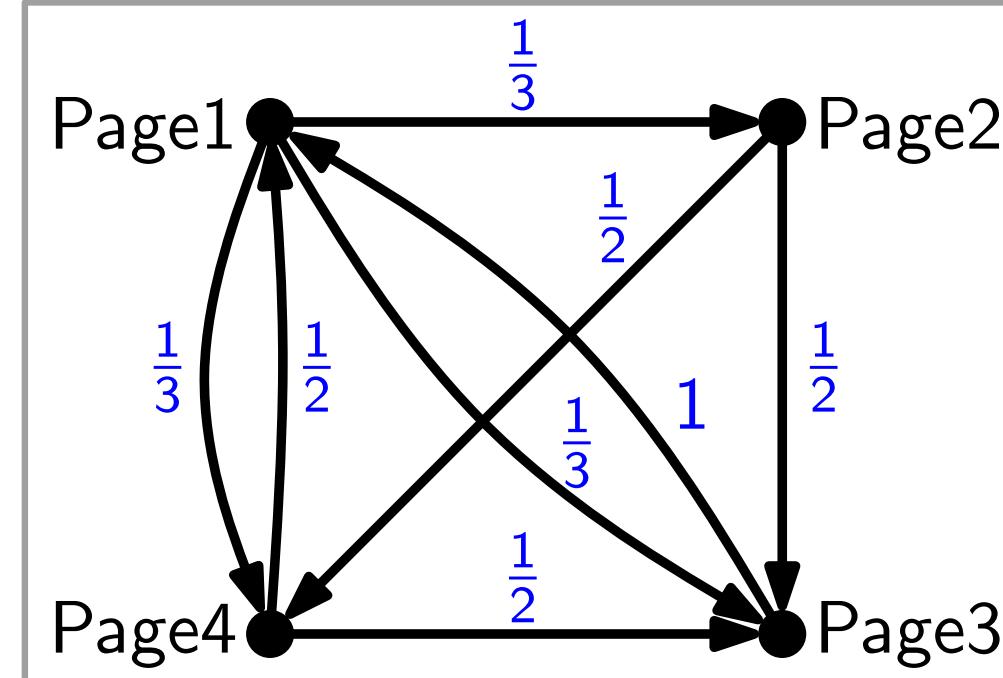
Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form $c \cdot (12, 4, 9, 6)^T$.

Normiere: Einträge von r summieren sich zu 1.
(probabilistischer Eigenvektor).

Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

Seitenrangvektor

D.h. r ist Eigenvektor von A für den Eigenwert 1.

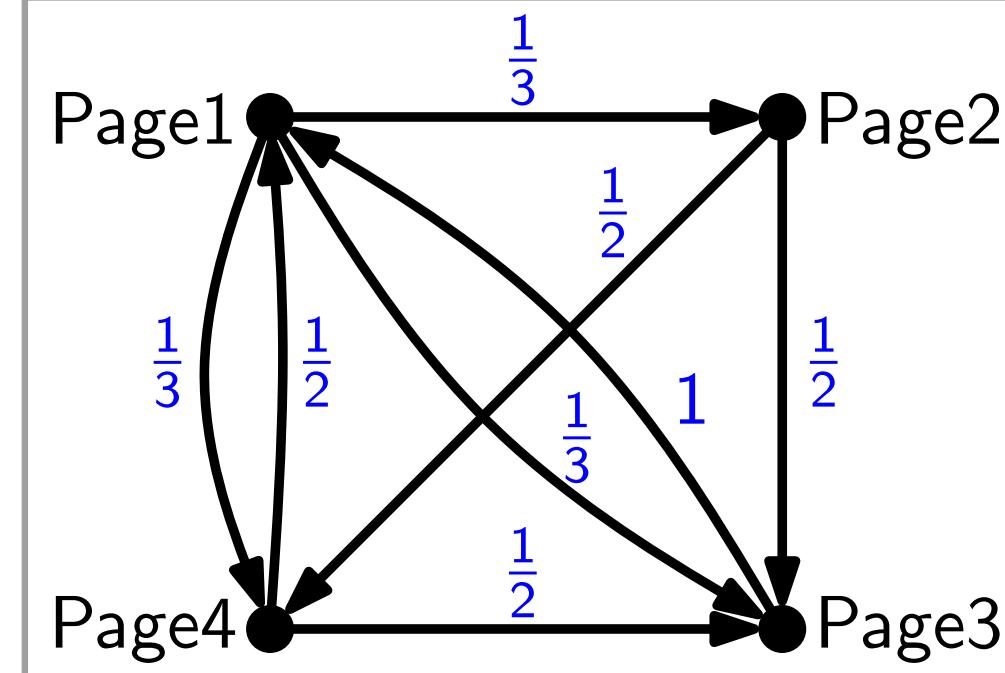
Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form $c \cdot (12, 4, 9, 6)^T$.

Normiere: Einträge von r summieren sich zu 1.
(probabilistischer Eigenvektor).

Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Im Gleichgewicht gilt $A \cdot r = r$.

Seitenrangvektor

D.h. r ist Eigenvektor von A für den Eigenwert 1.

Lineare Algebra (Lineares Gleichungssystem lösen!):

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben Form $c \cdot (12, 4, 9, 6)^\top$.

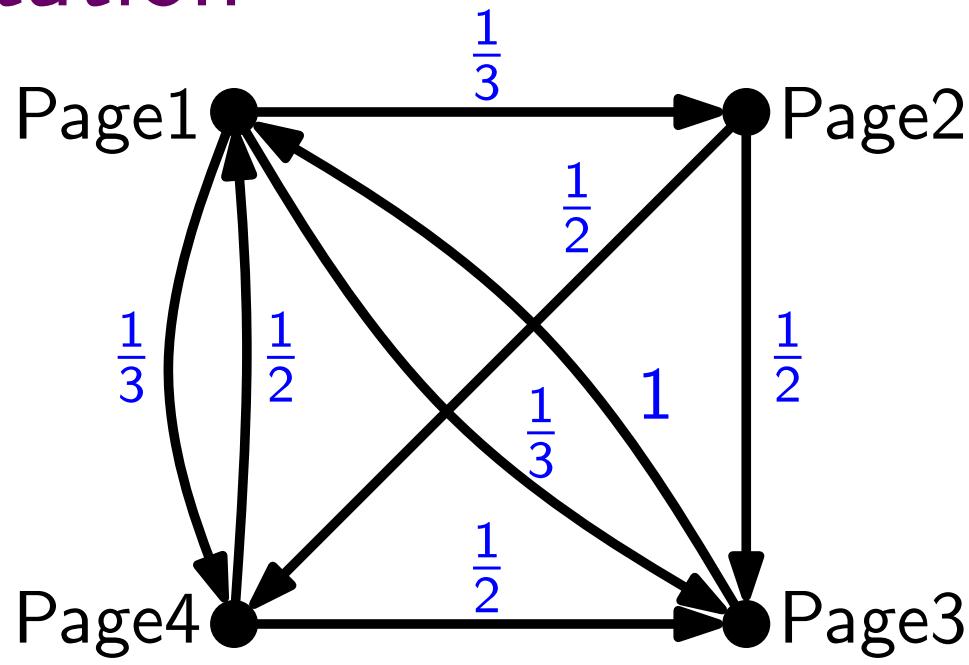
Normiere: Einträge von r summieren sich zu 1.
(probabilistischer Eigenvektor).

$$\Rightarrow r = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

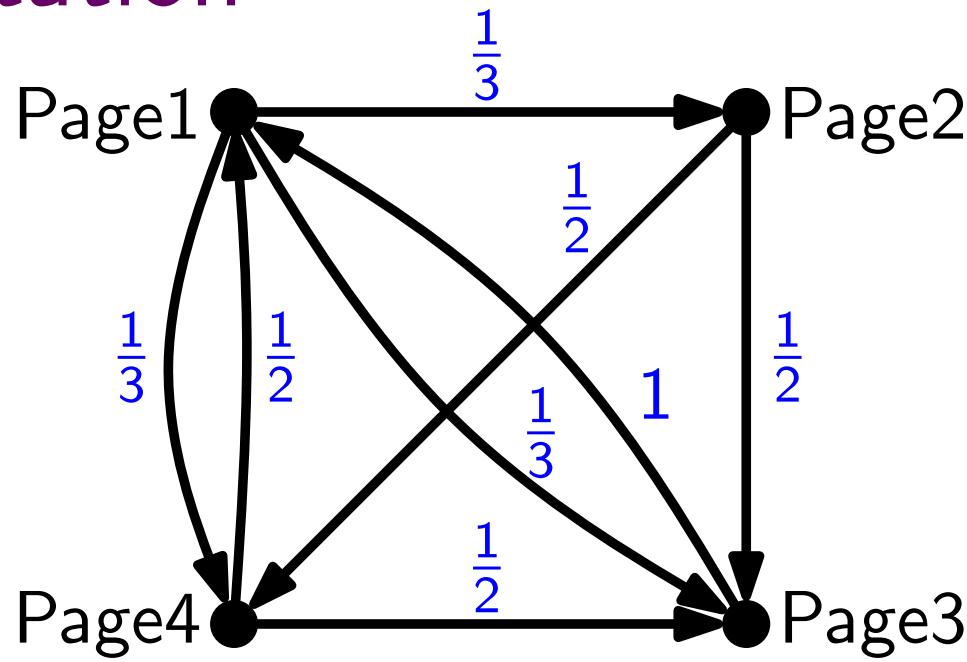


Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

\Rightarrow Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.



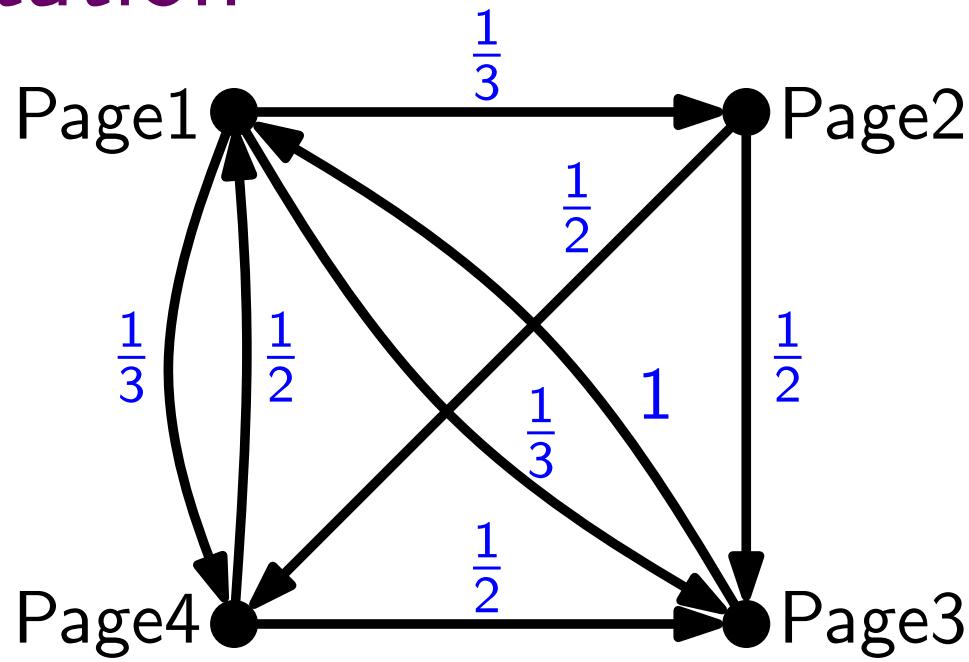
Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.

In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.



Probabilistische Interpretation

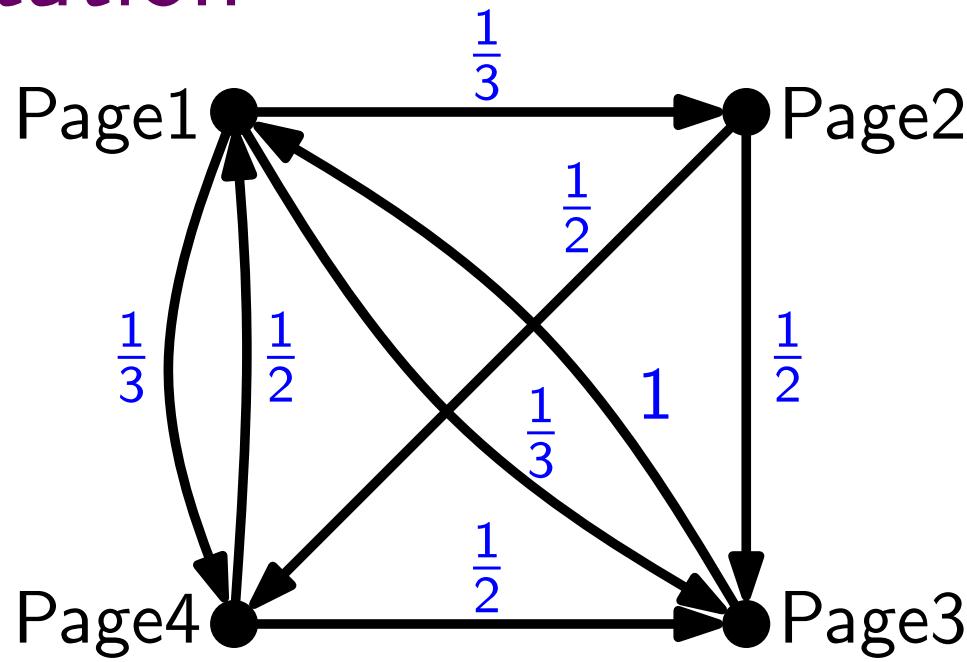
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.

In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration i ist $r_i = A^i \cdot r_0$.



Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

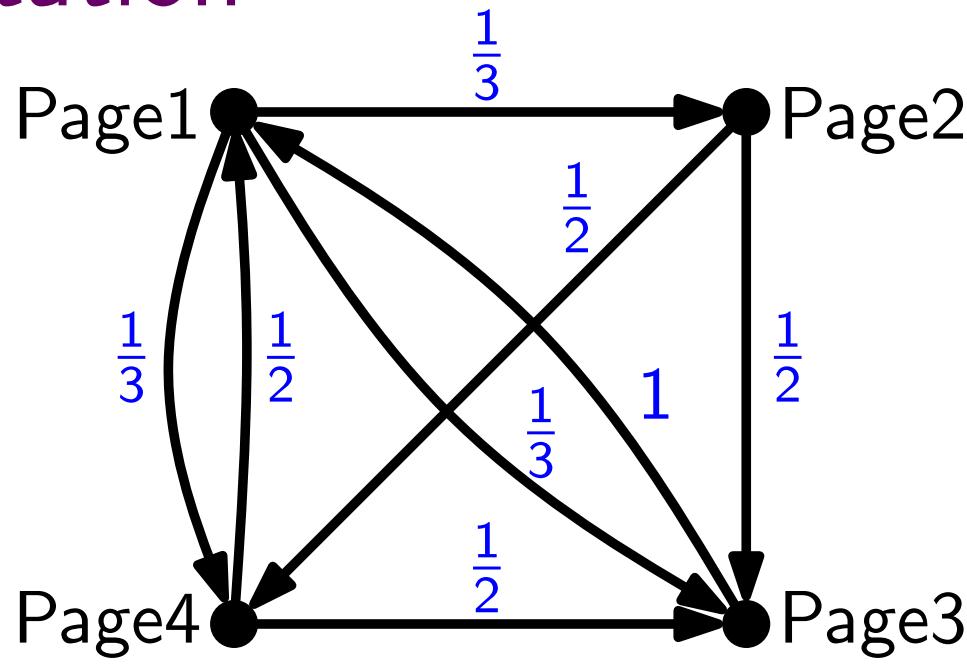
Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.

In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration i ist $r_i = A^i \cdot r_0$.

⇒ Stationäre Verteilung ist probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1



Probabilistische Interpretation

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

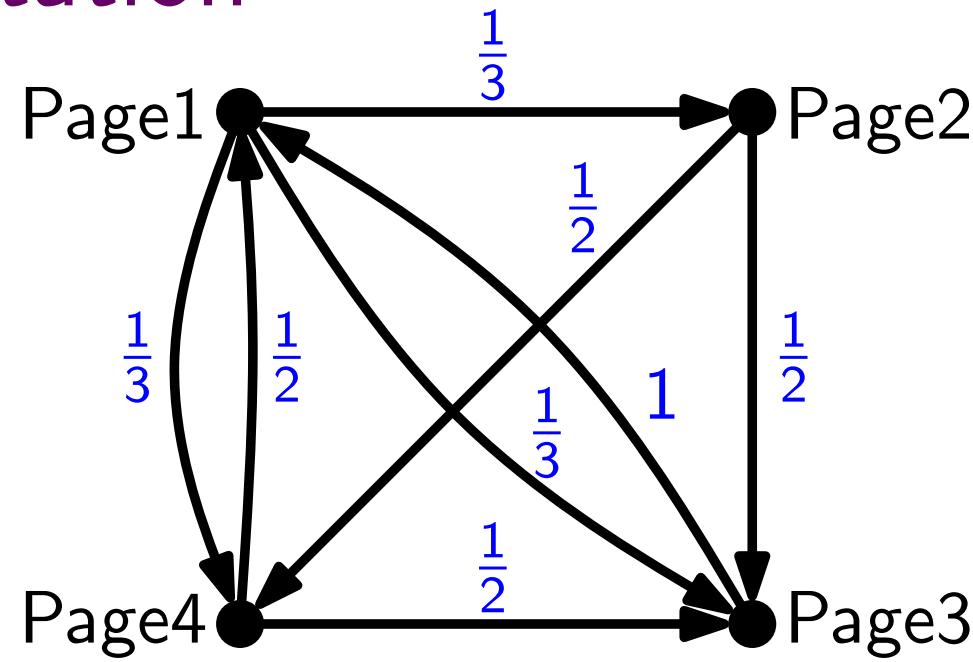
Ein „zufälliger“ Surfer startet gleichverteilt auf zufälliger Seite.

⇒ Start-Wahrscheinlichkeitsverteilung $r_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.

In jeder Iteration klickt der Surfer zufällig und gleichverteilt auf einen ausgehenden Link der Seite.

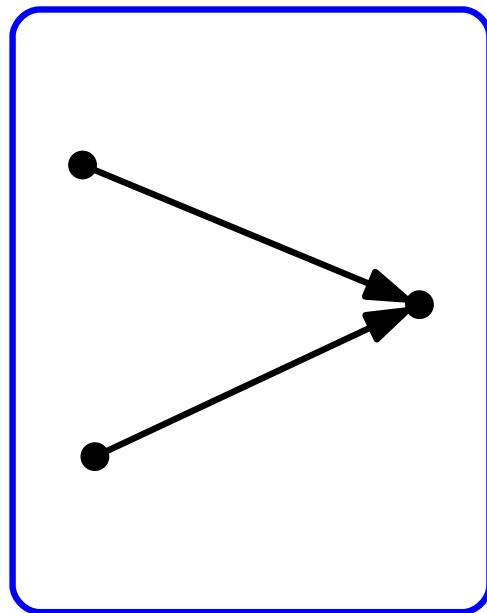
⇒ Wahrscheinlichkeitsverteilung in Iteration i ist $r_i = A^i \cdot r_0$.

⇒ Stationäre Verteilung ist probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1, also hier $r = \frac{1}{31}(12, 4, 9, 6)^\top$.



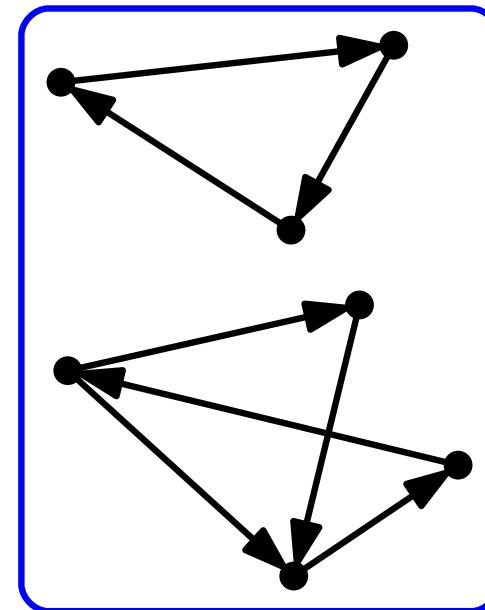
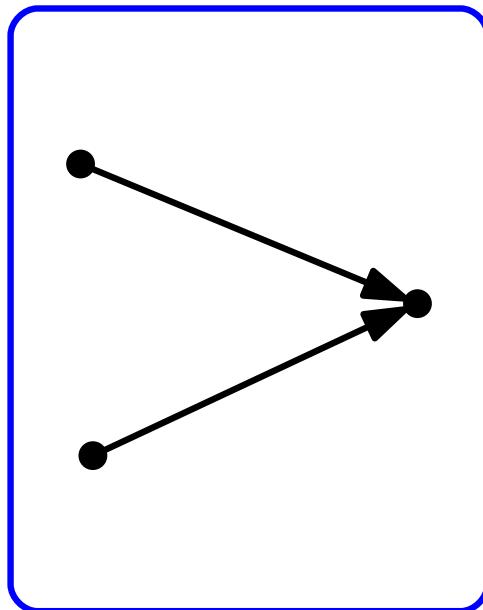
Probleme

- Gewicht „verschwindet“ in Knoten ohne ausgehende Kanten (nur „Eigenvektor“ 0).



Probleme

- Gewicht „verschwindet“ in Knoten ohne ausgehende Kanten (nur „Eigenvektor“ 0).
- Falls Graph nicht zusammenhängend, existieren unendlich viele probabilistische Eigenvektoren zum Eigenwert 1 (Linearkombination der Eigenvektoren der ZK).



Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

Sei $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

Sei $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

- M hat nur positive Einträge.

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

Sei $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

- M hat nur positive Einträge.
(Also ist M positiv.)

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

Sei $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

- M hat nur positive Einträge.
(Also ist M positiv.)
- Alle Spaltensummen von M sind 1

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



(c) Wikipedia 2008

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

Sei $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

- M hat nur positive Einträge.
(Also ist M positiv.)
- Alle Spaltensummen von M sind 1, da dies für A u. B gilt.

Lösung von Page und Brin

Verbinde jede Senke mit allen anderen Knoten.



Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p (Dämpfungsfaktor, beispielsweise $p = 0,15$) „teleportiert“ sich der Surfer auf eine zufällig und gleichverteilt gewählte Seite.

Dadurch werden Senken entfernt \rightsquigarrow „Zusammenhang“ erreicht.

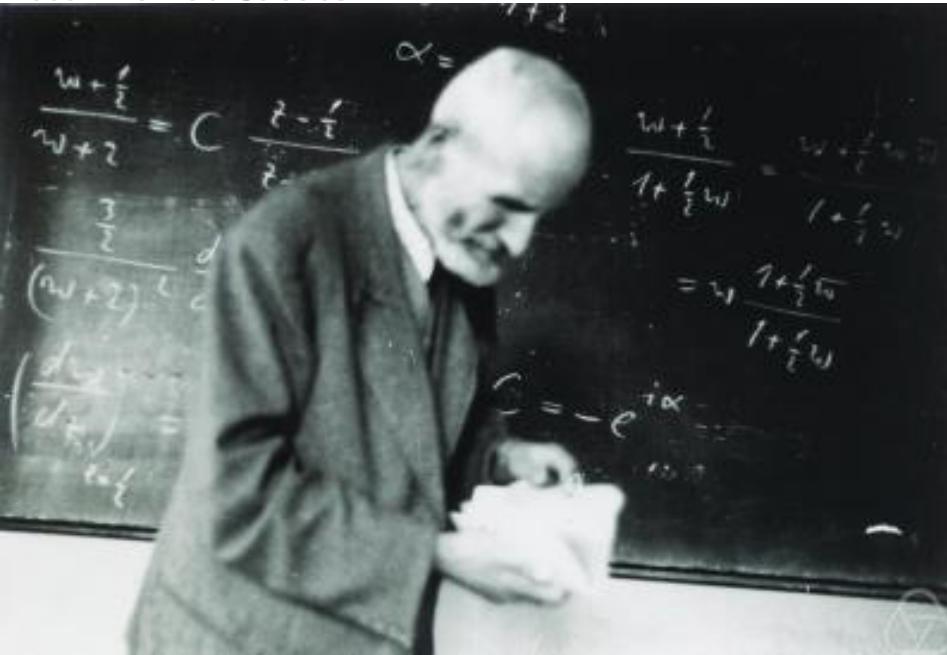
Sei $B = (1/n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Die neue Übergangsmatrix $M = (1 - p) \cdot A + p \cdot B$ hat folgende Eigenschaften:

- M hat nur positive Einträge.
(Also ist M positiv.)
- Alle Spaltensummen von M sind 1, da dies für A u. B gilt.
(Also ist M spalten-stochastisch.)

Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron
(Frankenthal 1880
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



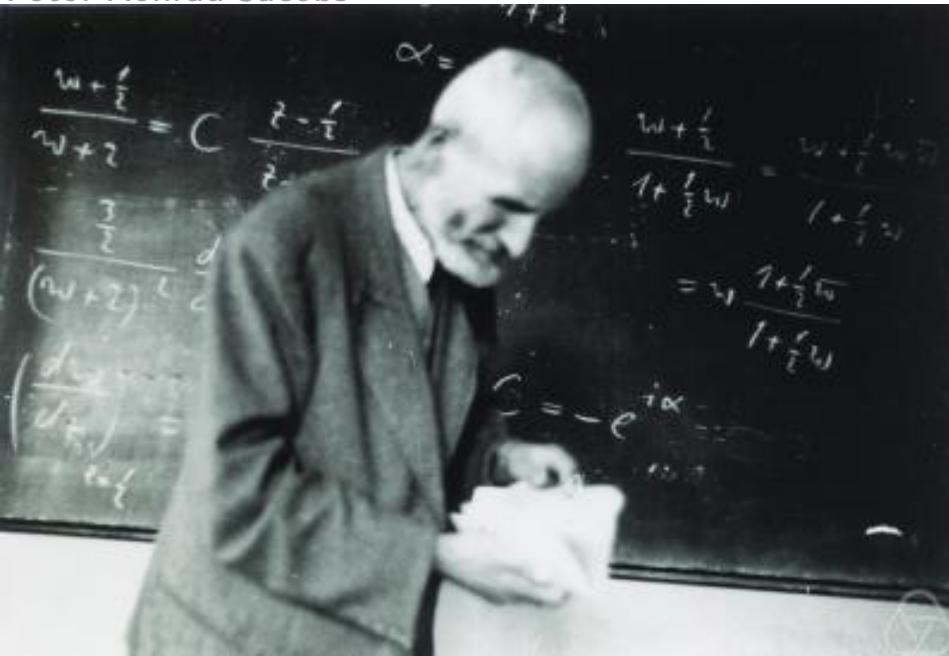
Ferdinand Georg Frobenius
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

- (i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron
(Frankenthal 1880
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



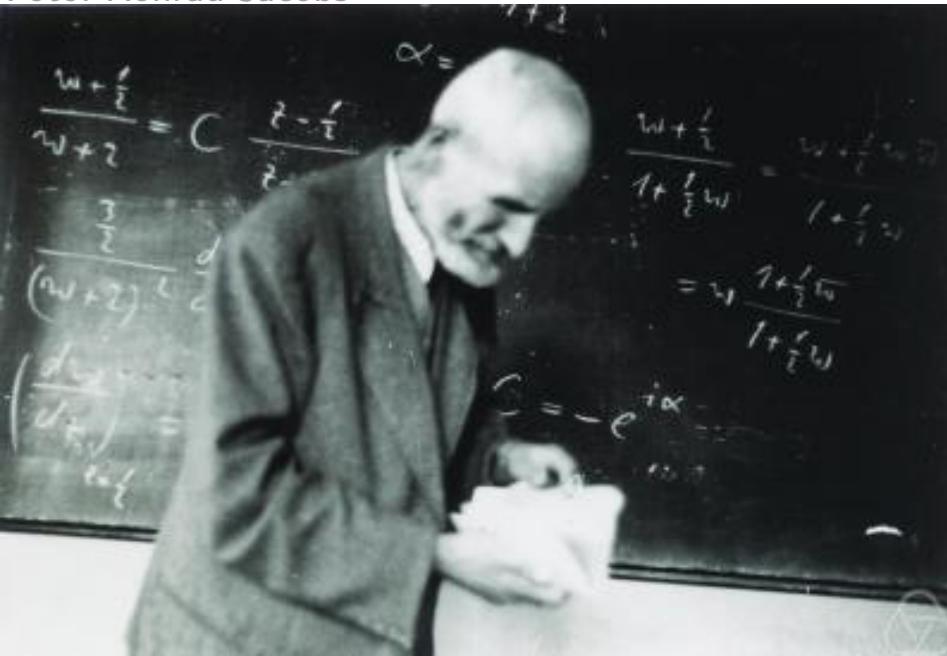
Ferdinand Georg Frobenius
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

- (i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,
- (ii) 1 ist der größte Eigenwert,

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron
(Frankenthal 1880
– 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



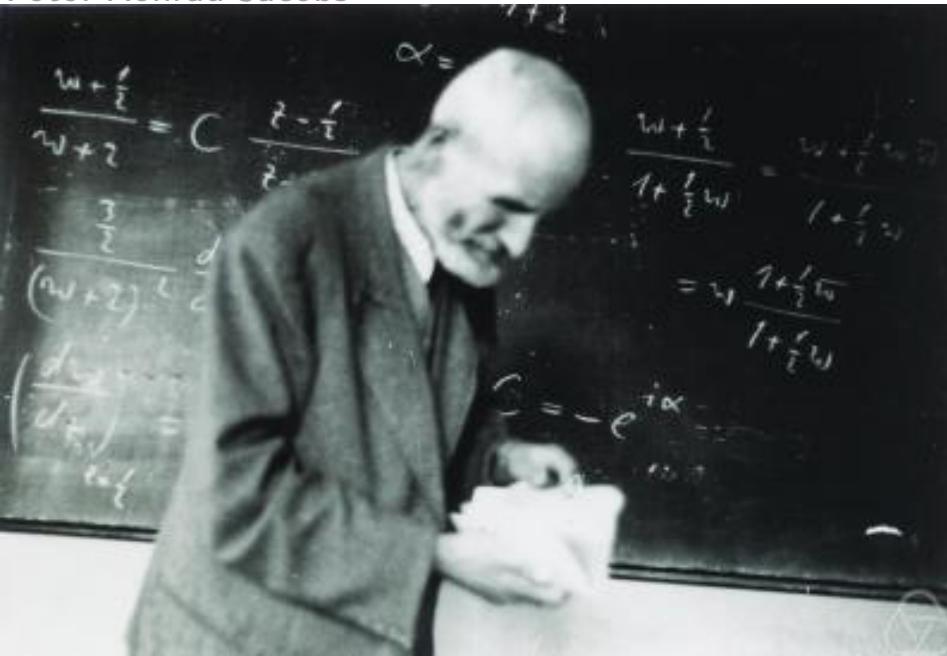
Ferdinand Georg Frobenius
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

Satz von Perron-Frobenius (1907/1912)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische Matrix. Dann:

- (i) 1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit 1,
- (ii) 1 ist der größte Eigenwert,
- (iii) es gibt einen eindeutigen Eigenvektor r zum Eigenwert 1, dessen Einträge sich zu 1 summieren (probabilistischer Eigenvektor); alle Einträge von r sind positiv.

Foto: Konrad Jacobs



Oskar Perron
(Frankenthal 1880 – 1975 München)

Foto: Oberwolfach Photo Collection



Ferdinand Georg Frobenius
(Berlin 1849 – 1917 Berlin)

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix.

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix.
Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1.

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix. Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei r_0 ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle $1/n$ sind.

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix. Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei r_0 ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle $1/n$ sind. Dann konvergiert die Folge $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^kr_0, \dots$ gegen den Vektor r .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix. Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei r_0 ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle $1/n$ sind. Dann konvergiert die Folge $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^kr_0, \dots$ gegen den Vektor r .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor r für $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$ mit
– Übergangsmatrix A (Web-Graph!) und
– Dämpfungsfaktor p
kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix. Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei r_0 ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle $1/n$ sind. Dann konvergiert die Folge $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^kr_0, \dots$ gegen den Vektor r .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor r für $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$ mit
– Übergangsmatrix A (Web-Graph!) und
– Dämpfungsfaktor p
kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Dies ist häufig schneller als die exakte Berechnung.

Potenzmethode (Von-Mises-Iteration)

Satz. Sei M eine positive spalten-stochastische $n \times n$ Matrix. Sei r ihr probabilistischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Sei r_0 ein Spaltenvektor, dessen Einträge alle $1/n$ sind. Dann konvergiert die Folge $r_0, Mr_0, M^2r_0, \dots, M^kr_0, \dots$ gegen den Vektor r .

von Mises & Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9, 152–164 (1929)

Der Seitenrangvektor r für $M = (1-p) \cdot A + p \cdot B$ mit
– Übergangsmatrix A (Web-Graph!) und
– Dämpfungsfaktor p
kann mit Hilfe obiger Folge approximiert werden.

Dies ist häufig schneller als die exakte Berechnung.

Man muss dabei ausnutzen, dass in A fast alle Einträge 0 sind.