

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

12. Vorlesung

## Färben planarer Graphen und Planaritätstest

# Graphen färben

**Def.** Sei  $G$  ein Graph.

Eine Abbildung  $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  heißt  $k$ -Färbung, falls für alle  $uv \in E(G)$  gilt, dass  $f(u) \neq f(v)$ .

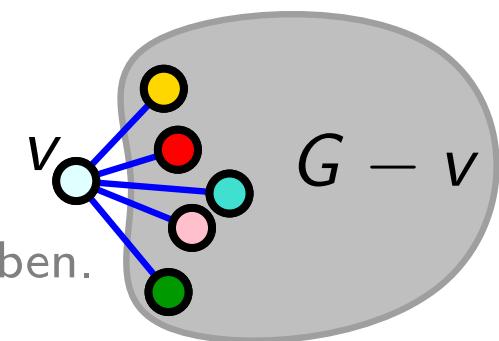
**Beob.**  $G$  bipartit  $\Leftrightarrow G$  2-färbbar.  $G$   $k$ -partit  $\Leftrightarrow G$   $k$ -färbbar.

**Beob.** Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

**Beweis.**  $G$  hat einen Knoten  $v$  vom Grad  $\leq 5$ .

Färbe  $G - v$  induktiv.  $\Rightarrow N(v)$  verwendet  $\leq 5$  Farben.

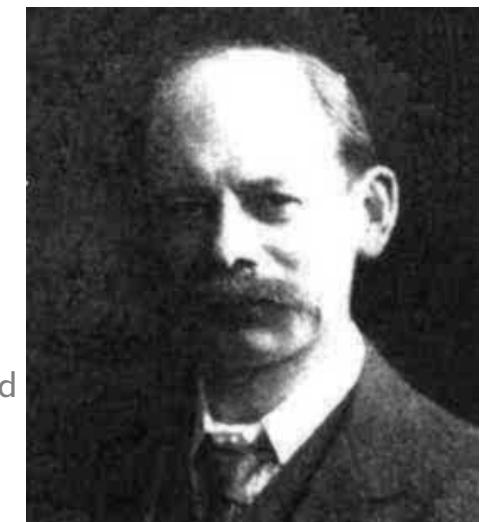
Nimm sechste Farbe für  $v$ .



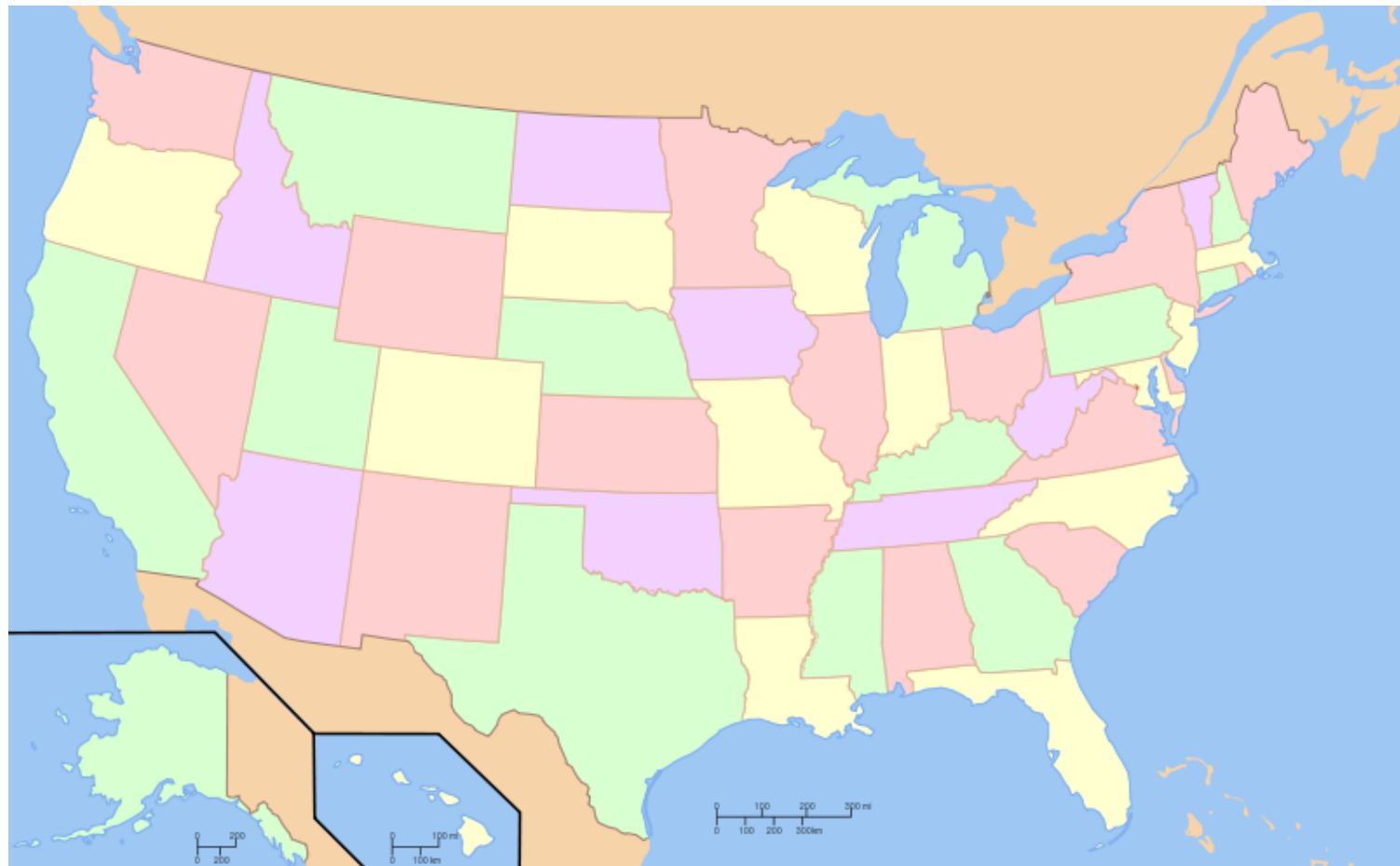
**Satz.** *Fünf-Farben-Satz* [Heawood 1890]

Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Percy John Heawood  
1861 Newport, GB  
1955 Durham, GB



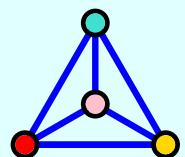
# Der Vier-Farben-Satz von 1976



**Satz.**

*Vier-Farben-Satz*

Jeder planare Graph ist 4-färbbar.



[Appel & Haken 1976]

[Robertson, Sanders, Seymour, Thomas 1997]

# Eine andere Art von Färbung

**Def.** Gegeben ein Graph  $G$  und für jeden Knoten  $v$  von  $G$  eine Liste  $L_v$  von „Farben“, so ist eine *Listenfärbung* von  $G$  eine Abbildung  $\lambda: V(G) \rightarrow \bigcup_v L_v$  mit

- $\lambda(v) \in L_v$  und
- $\lambda(u) \neq \lambda(v) \quad \forall uv \in E(G)$ .

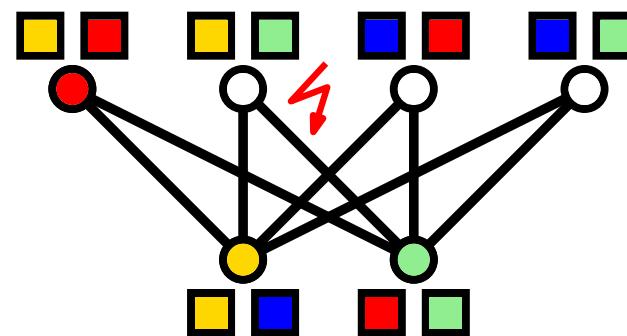
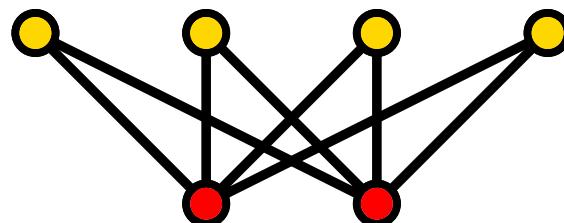
**Bsp.** Eine „normale“ Färbung  $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  entspricht einer Listenfärbung mit  $L_v = \{1, \dots, k\}$  für alle  $v \in V(G)$ .

# Listenfärbbarekeit

**Def.** Ein Graph  $G$  ist  $k$ -listenfärbbbar, wenn  $G$  für jede Wahl von Listen der Länge  $k$  eine Listenfärbung hat.

**Beob.**  $G$   $k$ -listenfärbbbar  $\overset{\text{~~iff~~}}{\Rightarrow}$   $k$ -färbbbar.

**Bsp.** Jeder bipartite Graph ist 2-färbbbar – aber nicht unbedingt 2-listenfärbbbar.



# Listenfärbbarekeit planarer Graphen

**Satz.** *Nicht-Vier-Farben-Satz* [Voigt, 1993]  
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbar.



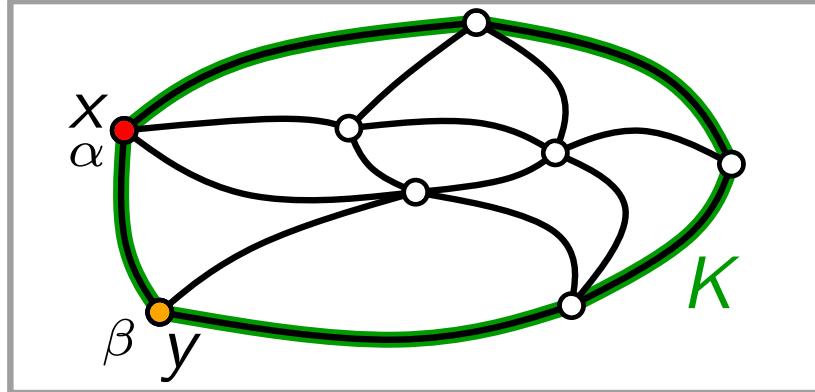
Carsten Thomassen  
1948 in Grindsted, DK



**Satz.** Jeder planare Graph  
ist 5-/listenfärbar. [Thomassen 1994]  
(also auch 5-färbar!)

# Beweis von Thomassens Satz

OBdA  $G$  fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.

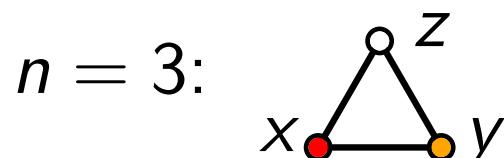


alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.

Thomassens Trick:  
*Verschärfe Aussage,  
beweise mit Induktion!*

**Beh.** Falls  $G$  fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette  $K$ ) und (i) zwei adj. Knoten  $x, y \in V(K)$  mit  $xy \in E(K)$  sind mit  $\alpha \neq \beta$  gefärbt, (ii)  $|L_v| \geq 3$  für alle  $v \in K \setminus \{x, y\}$ , (iii)  $|L_v| \geq 5$  für alle  $v \in V(G) \setminus V(K)$ , dann lässt sich die Färbung von  $x$  &  $y$  auf  $G$  fortsetzen.

**Bew.** Per Induktion über  $n = |V(G)|$ .



Färbe  $z$  mit Farbe  $\gamma \in L_z \setminus \{\dot{\alpha}, \dot{\beta}\}$ . ✓

# Induktionsschritt $n > 3$

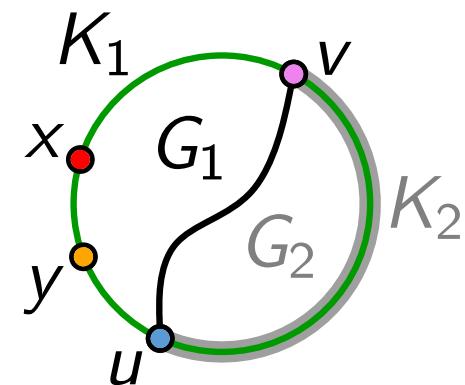
Fall 1:  $K$  hat Sehne  $uv$ .

$uv$  zerlegt  $K$  in  $K_1$  und  $K_2$ .

Sei  $G_1$  der Teilgraph von  $G$  auf und innerhalb  $K_1 + uv$ .

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf  $G_1$  an. Definiere  $G_2$ .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten  $u$  und  $v$ !) auf  $G_2$  an. ✓



Fall 2:  $K$  hat keine Sehne.

Sei  $w \neq y$  Nachbar von  $x$  auf  $K$ .

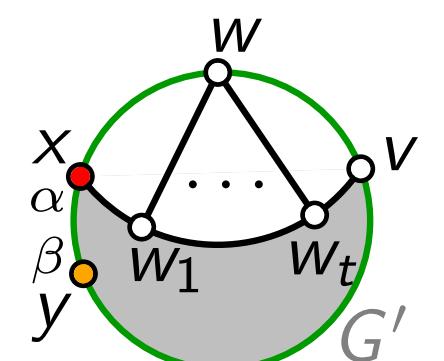
Sei  $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$  Nachbarschaft von  $w$ .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$ .  $G' = G - w$  ist fast trianguliert.

$\Rightarrow G'$  mit Listen  $L'$  erfüllt IV  $\Rightarrow$  5-Listenfärbung von  $G'$

Färbe  $w$  mit  $\{\gamma, \delta\} \setminus \text{Farbe}(v)$   $\Rightarrow$  5-Listenfärbung von  $G$  ✓ □



# Planaritätstest

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.



John Edward Hopcroft  
\*1939, Seattle, WA, U.S.A.



Robert Endre Tarjan  
\*1948 Pomona, CA, USA

Ziemlich kompliziert!  $\Rightarrow$   
Wir behandeln einfacheren Algorithmus mit Laufzeit  $O(n^3)$ .

# Planaritätstest

**Satz.** [Auslander & Parter 1961]

Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n^3)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

## Beobachtung.

$G$  planar  $\Leftrightarrow$  jede Zusammenhangskomponente von  $G$  ist planar.

Also können wir uns auf Algorithmen für zusammenhängende Graphen beschränken.

# Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge  $K \subseteq V(G)$ ,  
für die  $G[K]$  zweifach zusammenhängend ist

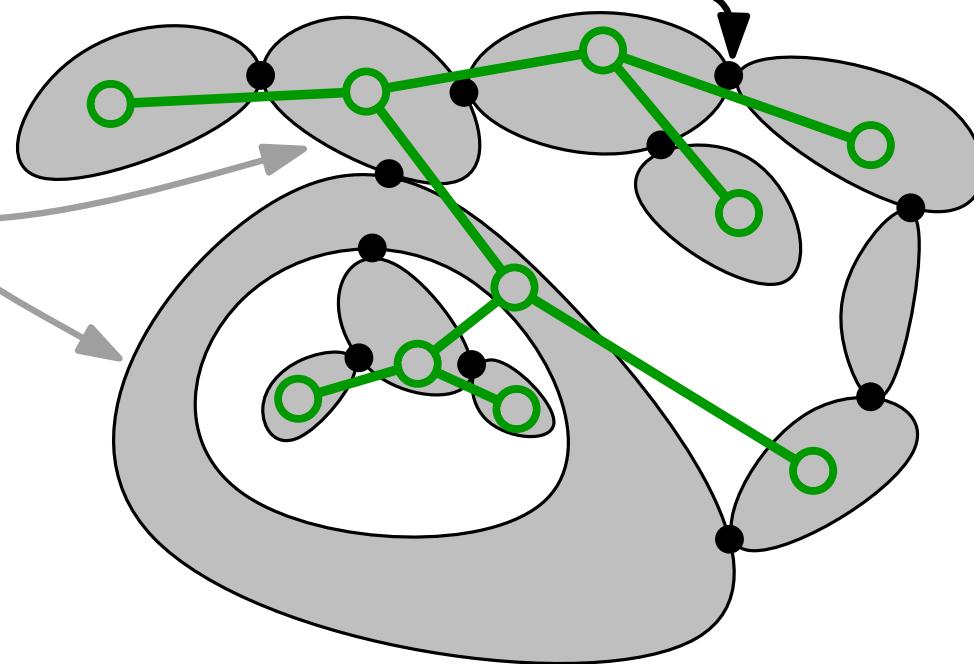
**Behauptung.**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$   
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente  
(ZZK) von  $G$  ist planar.

# Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge  $K \subseteq V(G)$ ,  
für die  $G[K]$  zweifach zusammenhängend ist

**Behauptung.**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$   
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente  
(ZZK) von  $G$  ist planar.

ZZKs sind über Schnittknoten verbunden und bilden den sog.  
**Zwei-Block-Baum**, der in Linearzeit berechnet werden kann.



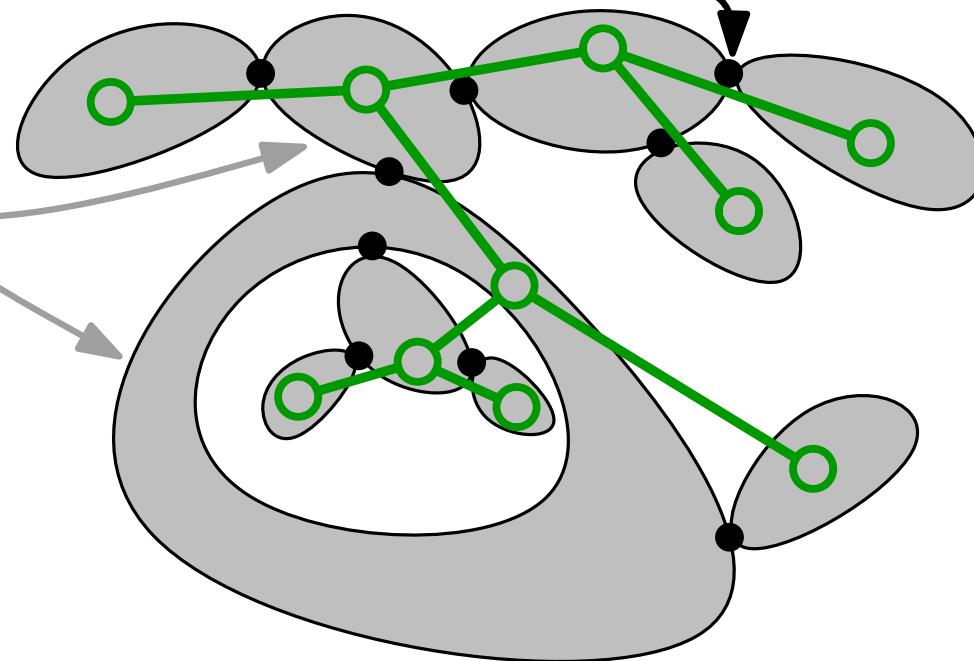
# Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge  $K \subseteq V(G)$ ,  
für die  $G[K]$  zweifach zusammenhängend ist

## Behauptung.

$G$  planar  $\Leftrightarrow$   
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente  
(ZZK) von  $G$  ist planar.

ZZKs sind über Schnittknoten verbunden und bilden den sog.  
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.



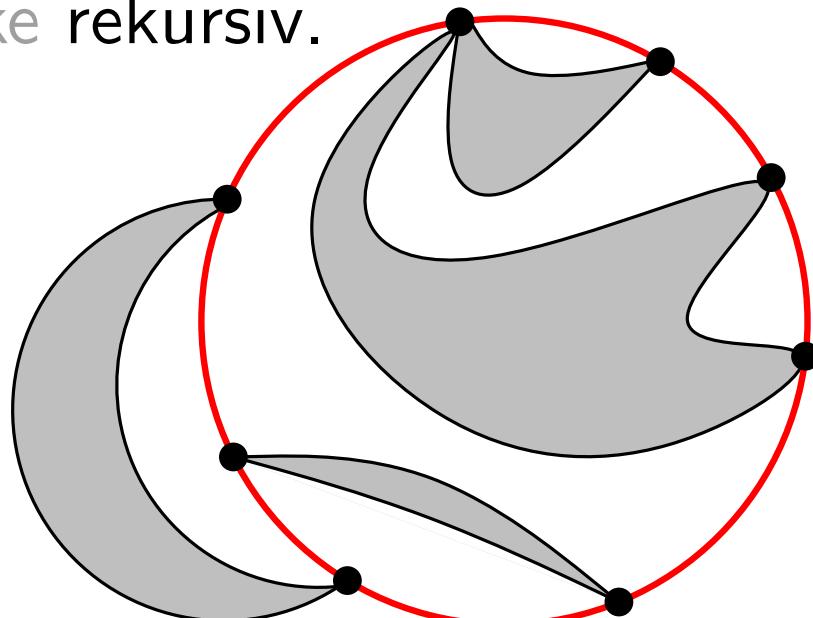
Es genügt, zweifach  
zusammenhängende  
Graphen zu betrachten.

# Ziel und Strategie

**Ziel:** Planaritätstest für zweifach zusammenhängende Graphen.

## Strategie:

- Berechne separierenden **Kreis** und zerlege Graph in sogenannte Teilstücke.
- Untersuche Grobstruktur der Teilstücke.
- Teste Teilstücke rekursiv.

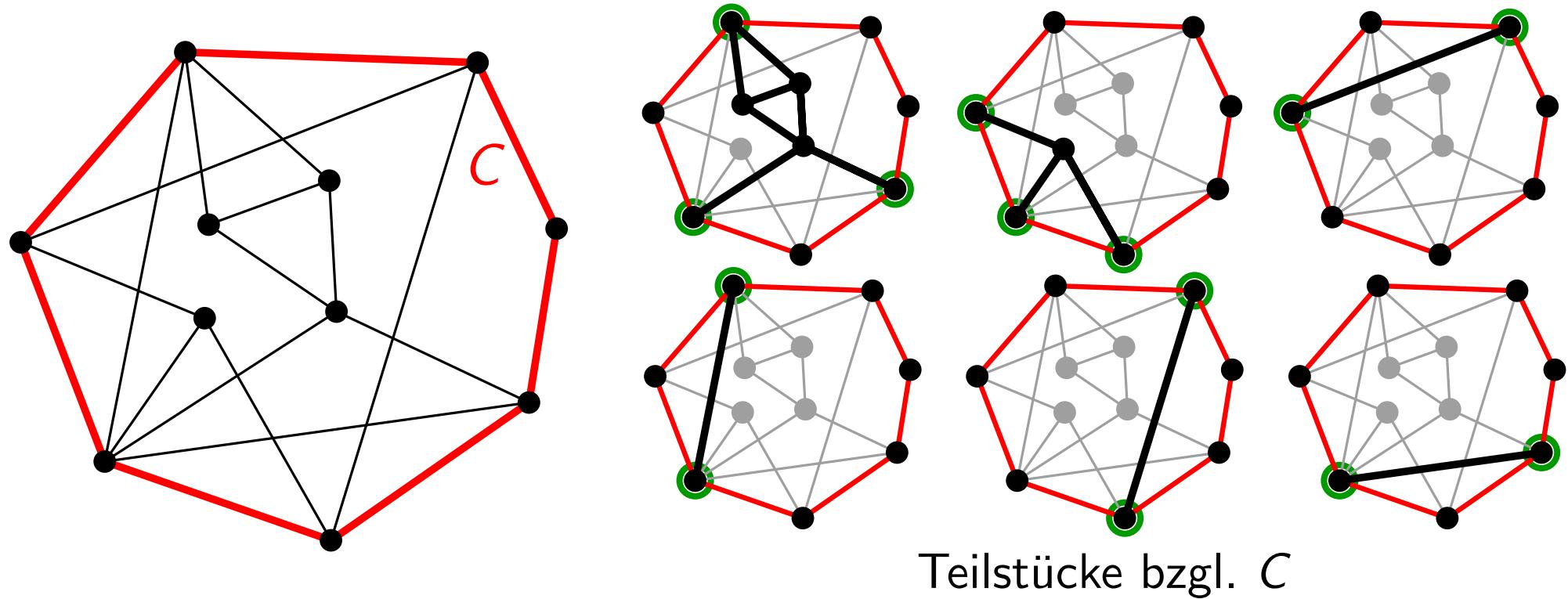


# Teilstück

**Def.** Sei  $C$  ein Kreis und seien  $e, e' \notin C$  Kanten.

Dann heißen  $e$  und  $e'$  äquivalent (bezüglich  $C$ ), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der  $C$  nicht berührt.

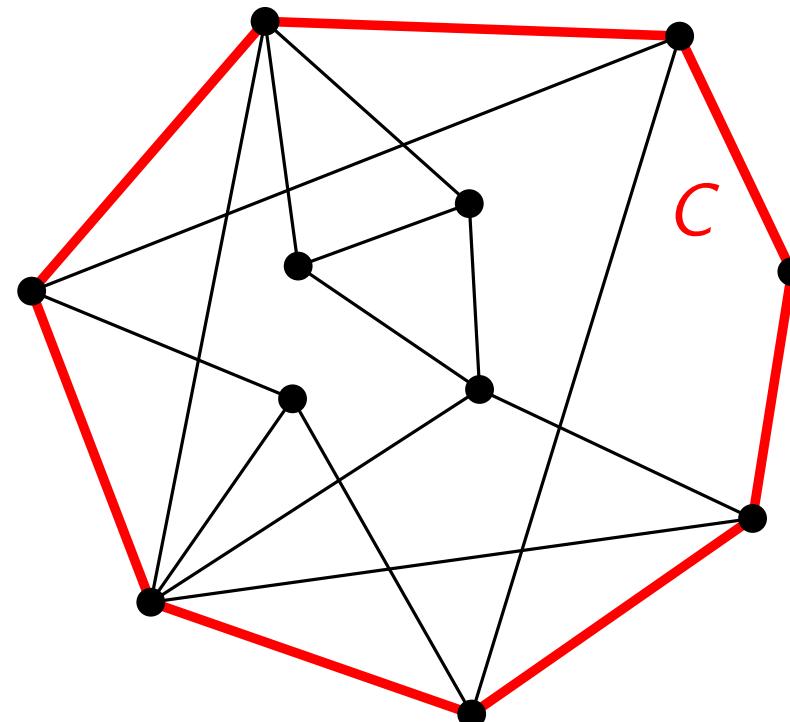
Die resultierenden Äquivalenzklassen heißen *Teilstücke* (bezüglich  $C$ ). Jedes Teilstück hat  $\geq 2$  *Anknüpfpunkte*.



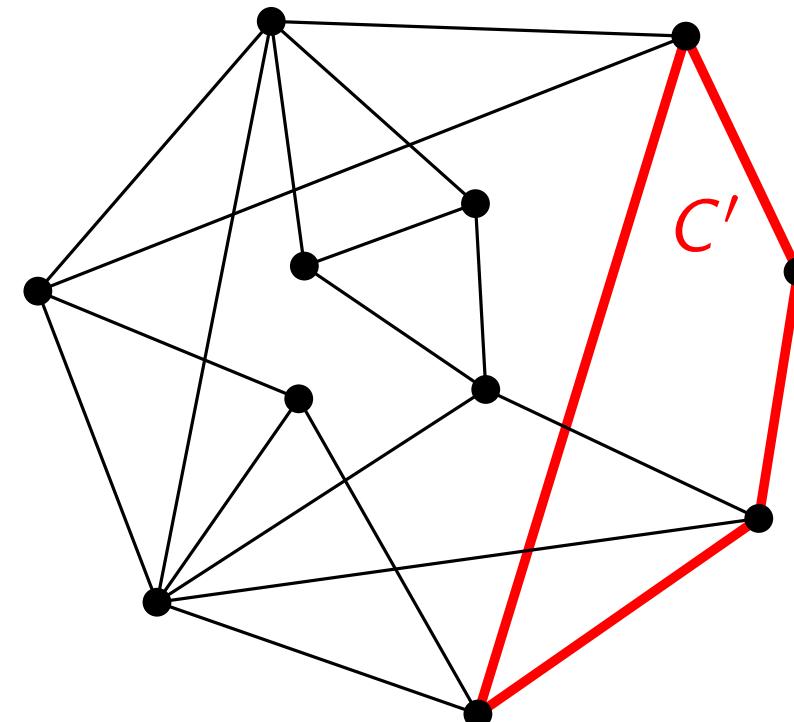
# Separierender Kreis

**Def.** Ein Kreis heißt *separierend*, wenn er mindestens zwei Teilstücke induziert.

separierend



nicht separierend



# Existenz separierender Kreis

**Lem 1.** Sei  $C$  ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück  $P$ .

Falls  $P$  kein Pfad ist, dann besitzt  $G$  einen separierenden Kreis  $C'$ , der aus einem Teilpfad von  $C$  und einem Pfad in  $P$  zwischen zwei Anknüpfunkten von  $P$  besteht.

## Beweis.

Seien  $u$  und  $v$  aufeinanderfolgende Anknüpfunkte von  $P$  in der zyklischen Reihenfolge von  $C$ .

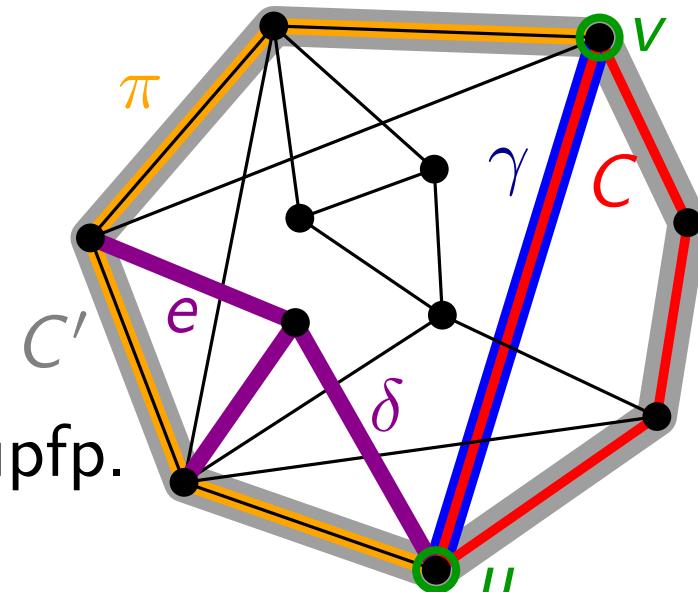
Betr.  $u-v$ -Pfad  $\gamma$  auf  $C$  ohne innere Anknüpf.

Sei  $\pi$  ein  $u-v$ -Pfad in  $P$ .

Betrachte Kreis  $C' := C + \pi - \gamma \Rightarrow \gamma$  ist Teilstück bzgl.  $C'$ .

Falls  $P$  kein Pfad ist, existiert eine Kante  $e \in E(P) \setminus E(\pi)$ .

Teilstück  $\delta$ , das  $e$  enthält, ist verschieden von  $\gamma \Rightarrow C'$  sep.  $\square$

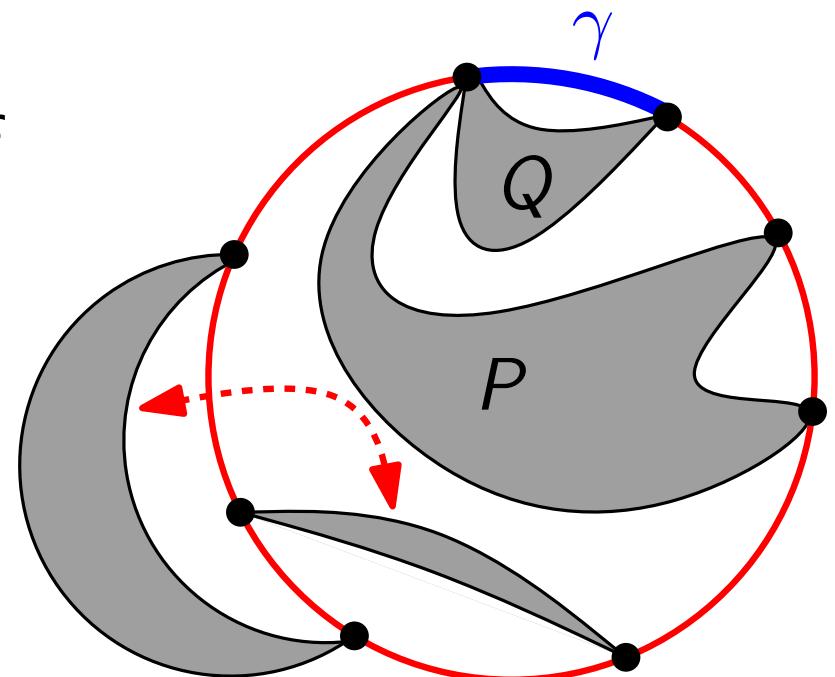


# Einander störende Teilstücke

$G$  planar  $\Rightarrow$  jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von  $C$  eingebettet.

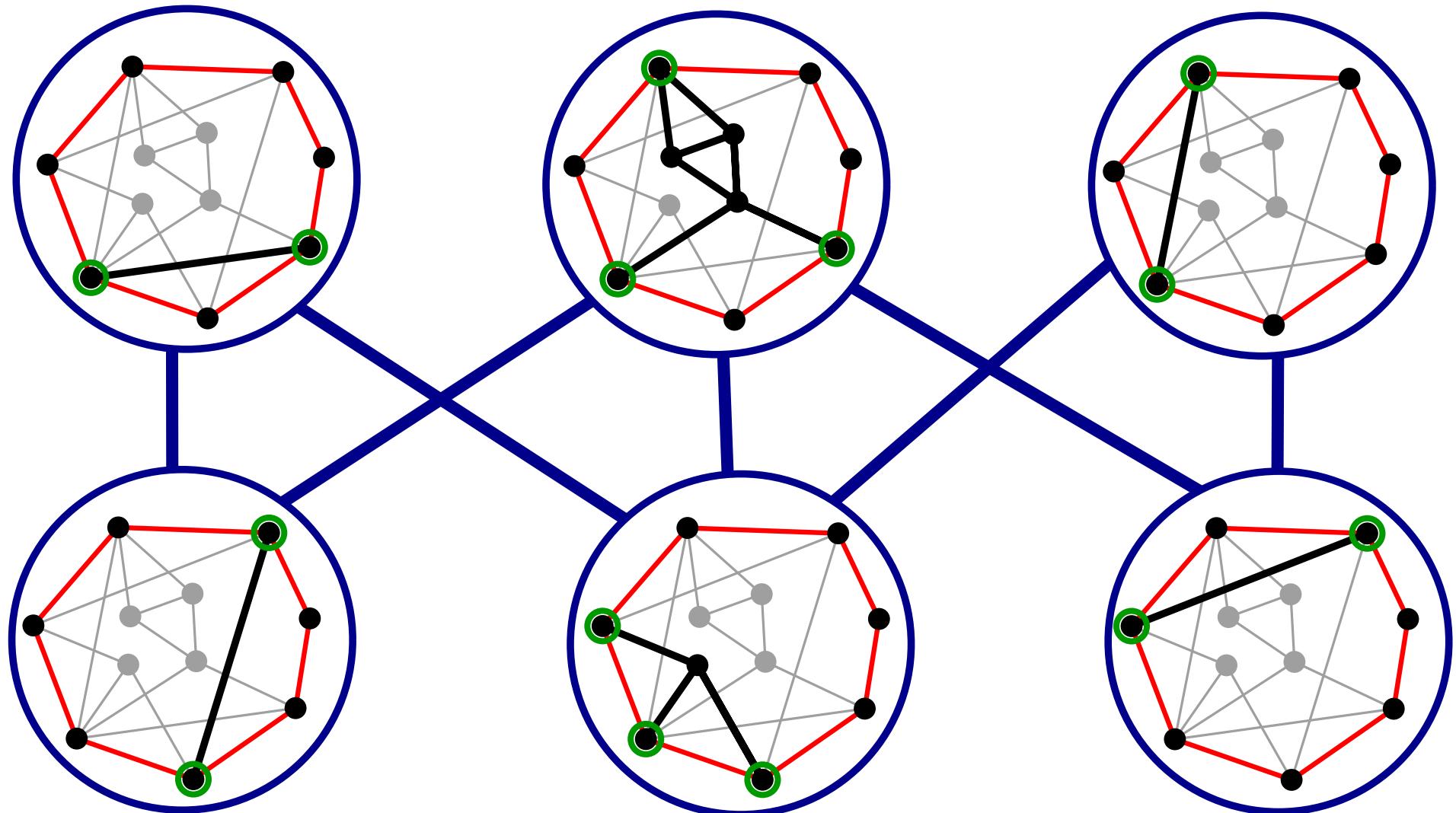
**Beob.** Zwei Teilstücke  $P \neq Q$  können auf der gleichen Seite von  $C$  eingebettet werden  $\Leftrightarrow$  es existiert ein Teilpfad  $\gamma$  von  $C$ , so dass  $\gamma$  alle Anküpfpunkte von  $Q$  enthält, aber kein innerer Knoten von  $\gamma$  Anknüpfpunkt von  $P$  ist.

**Def.** Zwei Teilstücke, die nicht auf der gleichen Seite von  $C$  eingebettet werden können, *stören* einander.



# Störgraph

**Def.** Der *Störgraph*  $I$  (bezüglich  $C$ ) hat als Knoten die Teilstücke. Zwei Teilstücke sind adjazent genau dann, wenn sie einander stören.

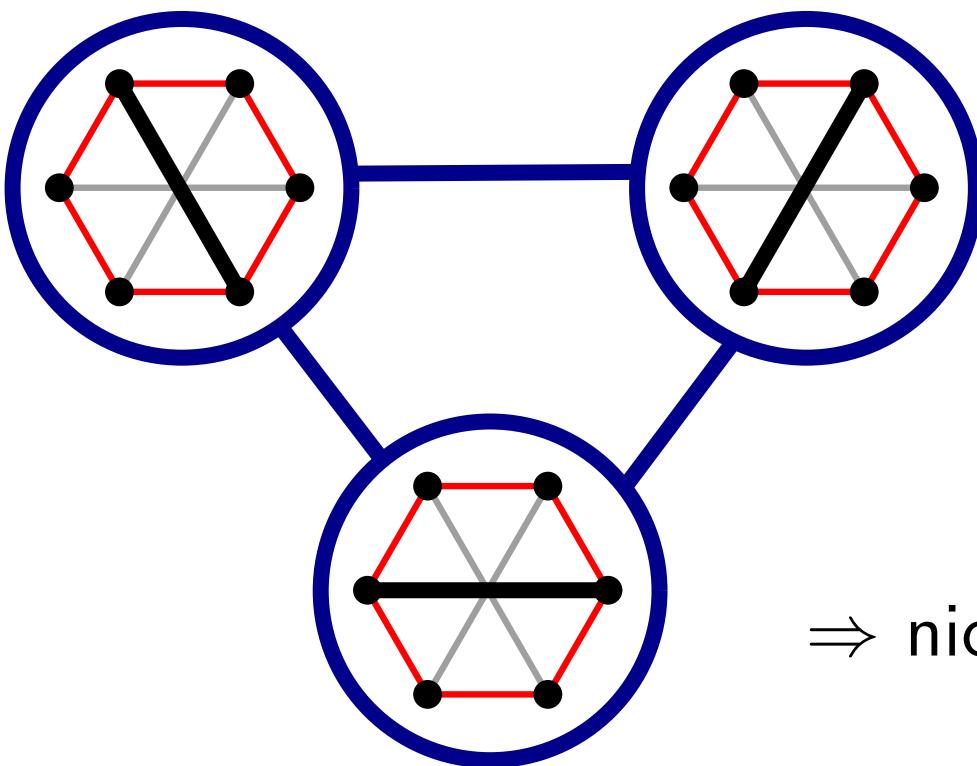
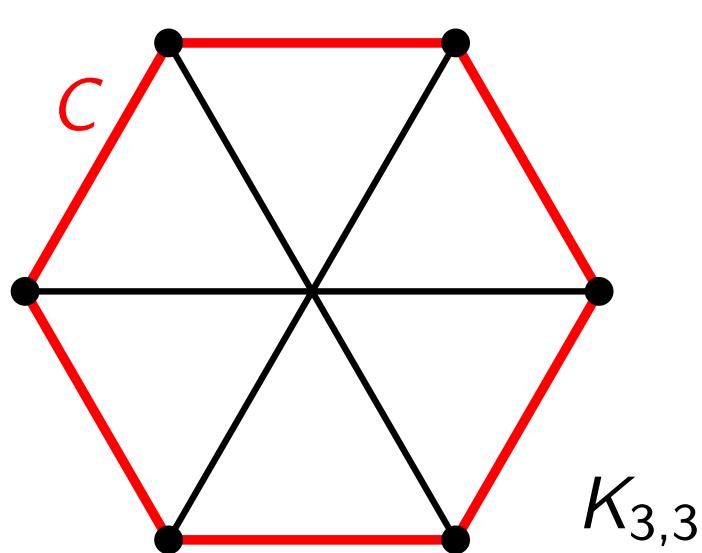


# Bipartiter Störgraph

**Lem<sub>2</sub>.** Sei  $G$  ein Graph mit separierendem Kreis  $C$  und Störgraphen  $I$ . Der Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück  $P$  der Graph  $C + P$  planar und
- (ii) der Störgraph  $I$  bipartit ist.

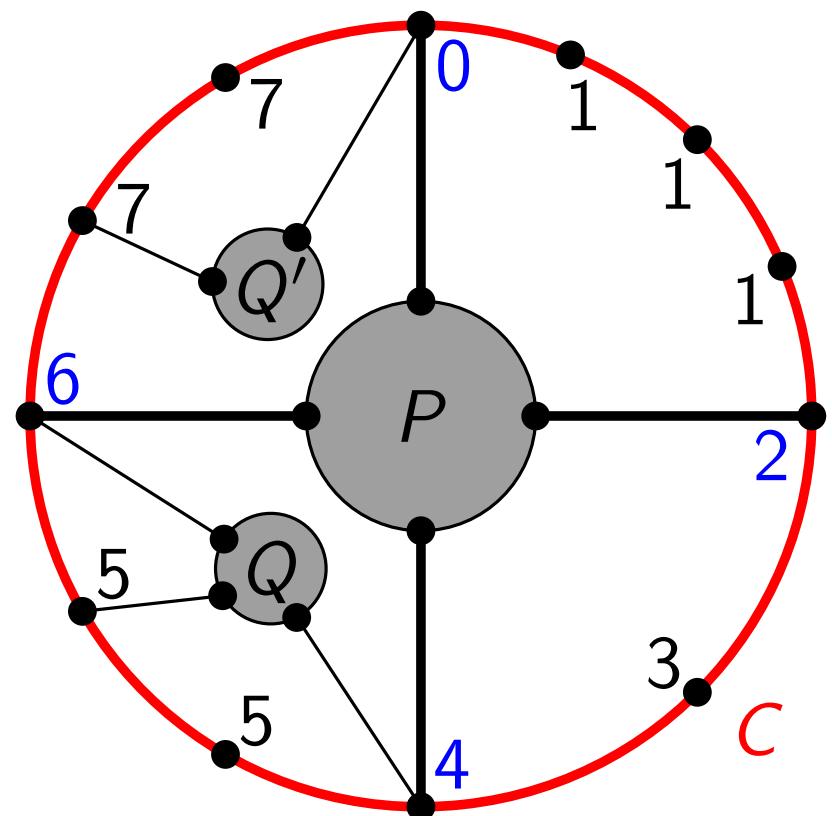
**Beweis.** Übung.



# Berechnung Störgraph

**Beob.** Die Nachbarn eines Teilstücks  $P$  im Störgraphen lassen sich in  $O(n)$  Zeit bestimmen, wenn die Teilstücke bekannt sind.

Der Störgraph lässt sich so in  $O(n^2)$  Zeit aufbauen.



Nummeriere Knoten von  $C$  mit Nummern  $\{0, \dots, 2k - 1\}$  wie abgebildet.

Teilstück  $Q$  stört  $P$  nicht  $\Leftrightarrow$  alle Anknüpfpunkte von  $Q$  liegen in einem Intervall der Art

$$[2i, 2i + 2 \bmod (2k + 2)]$$

# Planaritätstest

Übung:

Falls  $G$  keinen separierenden Kreis hat, ist  $G$  planar.

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph  $G$ , separ. Kreis  $C$ )

Berechne Teilstücke bzgl.  $C$

**foreach** Teilstück  $P$ , das **kein** Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$  wie in Lem<sub>1</sub>

**if** PlanarityTest( $G'$ ,  $C'$ ) == false **then**

**return** false

Übung:

$G'$  ist zweifach zusammenhängend.

Baut nicht-sep. Kreis  $C$  in sep. Kreis  $C'$  um.

Berechne Störgraphen /

**if** / bipartit **then**

**return** true

**else**

**return** false

Sei  $G$  ein Graph mit sep. Kreis  $C$  und Störgraphen  $/$ . Dann ist  $G$  planar  $\Leftrightarrow$   
 (i) für jedes Teilstück  $P$  ist  $C + P$  planar,  
 (ii)  $/$  ist bipartit.

Korrektheit? Per Induktion über  $|E(G)|$  mit Hilfe von Lem<sub>2</sub>.

# Laufzeit

Falls  $G$  mehr als  $3n - 6$  Kanten hat, ist  $G$  nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass  $G$   $O(n)$  Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in  $O(n)$  Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf  $C$  werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in  $O(n^2)$  Zeit.

⇒ Jeder Aufruf (ohne Rek.) in  $O(n^2)$  Zeit.

**Beh.** Anz. der Aufrufe (nicht nur der Teilstücke!) ist  $\leq |E(G)|$ .

*Beweis* folgt auf der nächsten Folie!

⇒ Gesamlaufzeit  $O(n^3)$



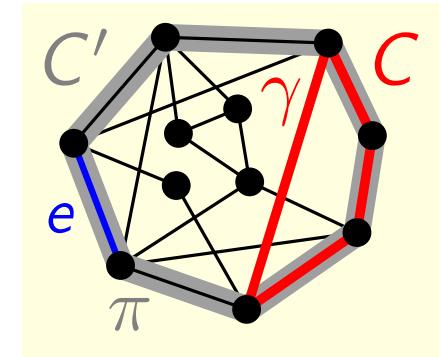
# Anzahl der rekursiven Aufrufe

**Beh.** Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens  $|E(G)|$ .

**Beweis.** Assoziiere mit Aufruf  $(G', C')$  eine Kante  $e \in C' - C$ .

Zeige: Keine Kante wird  $2 \times$  assoziiert!

```
PlanarityTest( $G, C$ )
...
foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
    ...
}
```



1. Beob.  $e_P \in \pi \subset P$   
 $\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$  für jedes Teilstück  $P' \neq P$  von  $G$ .
2. Beob.  $e$  liegt immer auf dem *neuen* Stück  $\pi$  des sep. Kreises  
Frühere Kanten  $e$  liegen auf  $C \cap C'$  oder auf  $\gamma$ .

Altes Stück des sep. Kreises!

Kein Teilstück –  
wird in Rekursion ignoriert!