

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

12. Vorlesung

Färben planarer Graphen und Planaritätstest

Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.
Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung,
falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.
Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung,
falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar.

Graphen färben

- Def.** Sei G ein Graph.
Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.
- Beob.** G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.

Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

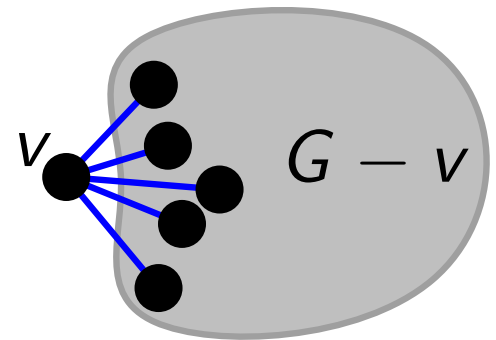
Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.

Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.



Graphen färben

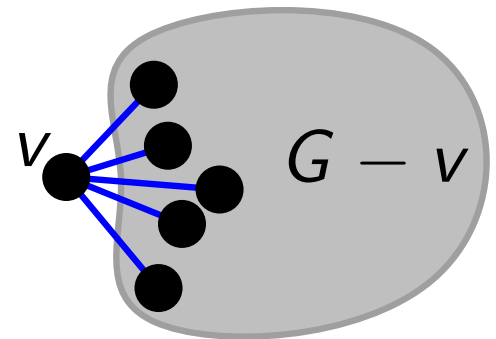
Def. Sei G ein Graph.

Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweis. G hat einen Knoten v vom Grad ≤ 5 .



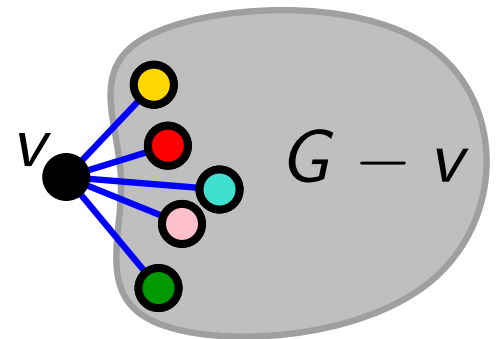
Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.
 Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung,
 falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweis. G hat einen Knoten v vom Grad ≤ 5 .
 Färbe $G - v$ induktiv.



Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.

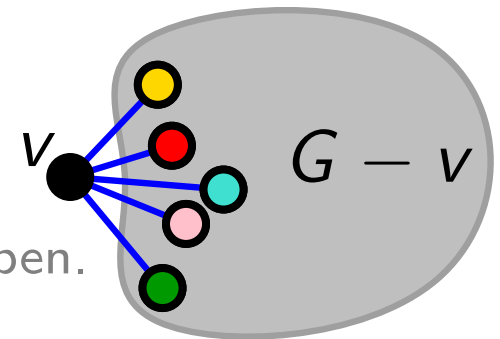
Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweis. G hat einen Knoten v vom Grad ≤ 5 .

Färbe $G - v$ induktiv. $\Rightarrow N(v)$ verwendet ≤ 5 Farben.



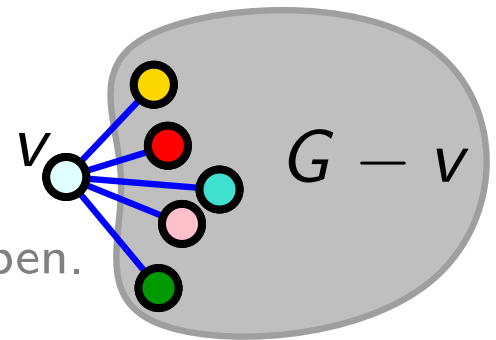
Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.
 Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung,
 falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweis. G hat einen Knoten v vom Grad ≤ 5 .
 Färbe $G - v$ induktiv. $\Rightarrow N(v)$ verwendet ≤ 5 Farben.
 Nimm sechste Farbe für v .



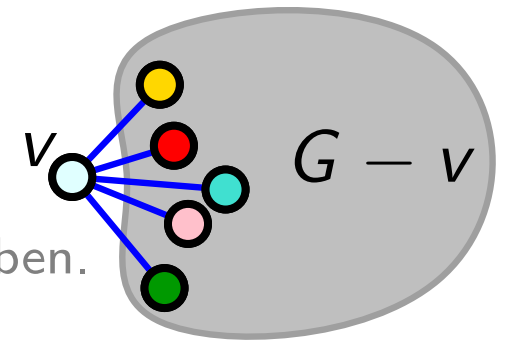
Graphen färben

Def. Sei G ein Graph.
Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ heißt k -Färbung, falls für alle $uv \in E(G)$ gilt, dass $f(u) \neq f(v)$.

Beob. G bipartit $\Leftrightarrow G$ 2-färbbar. G k -partit $\Leftrightarrow G$ k -färbbar.

Beob. Jeder planare Graph ist 6-färbbar.

Beweis. G hat einen Knoten v vom Grad ≤ 5 .
Färbe $G - v$ induktiv. $\Rightarrow N(v)$ verwendet ≤ 5 Farben.
Nimm sechste Farbe für v .

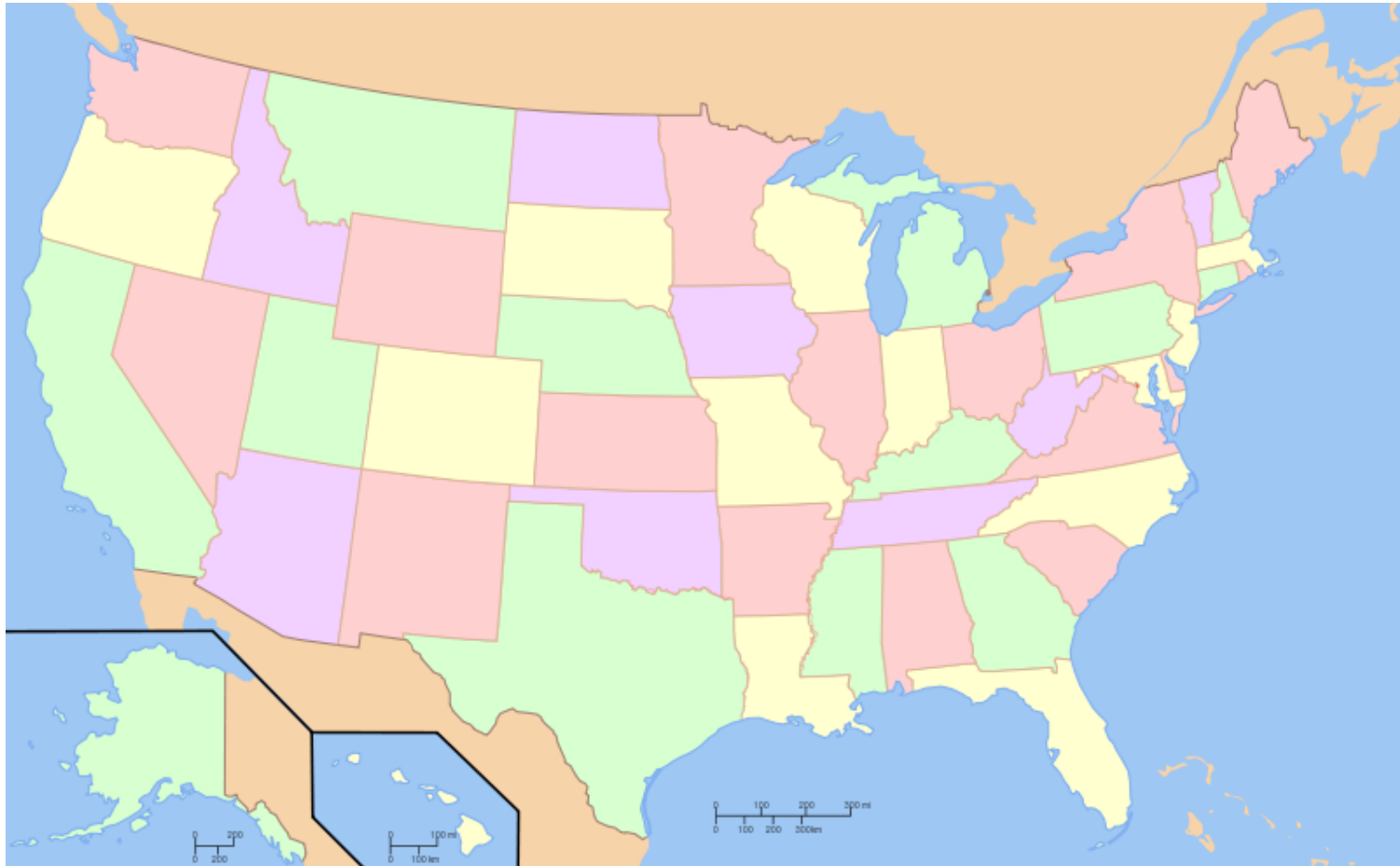


Satz. *Fünf-Farben-Satz* [Heawood 1890]
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Percy John Heawood
1861 Newport, GB
1955 Durham, GB

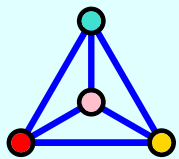


Der Vier-Farben-Satz von 1976



By User:Derfel73; User:Dbenbenn
[CC BY-SA 3.0], via Wikimedia Commons

Satz. *Vier-Farben-Satz*
Jeder planare Graph ist 4-färbbar.



[Appel & Haken 1976]

[Robertson, Sanders, Seymour, Thomas 1997]

Eine andere Art von Färbung

Def. Gegeben ein Graph G und für jeden Knoten v von G eine Liste L_v von „Farben“,

Eine andere Art von Färbung

Def. Gegeben ein Graph G und für jeden Knoten v von G eine Liste L_v von „Farben“, so ist eine *Listenfärbung* von G eine Abbildung $\lambda: V(G) \rightarrow \bigcup_v L_v$ mit

Eine andere Art von Färbung

Def. Gegeben ein Graph G und für jeden Knoten v von G eine Liste L_v von „Farben“, so ist eine *Listenfärbung* von G eine Abbildung $\lambda: V(G) \rightarrow \bigcup_v L_v$ mit

- $\lambda(v) \in L_v$ und
- $\lambda(u) \neq \lambda(v) \quad \forall uv \in E(G)$.

Eine andere Art von Färbung

Def. Gegeben ein Graph G und für jeden Knoten v von G eine Liste L_v von „Farben“, so ist eine *Listenfärbung* von G eine Abbildung $\lambda: V(G) \rightarrow \bigcup_v L_v$ mit

- $\lambda(v) \in L_v$ und
- $\lambda(u) \neq \lambda(v) \quad \forall uv \in E(G)$.

Bsp. Eine „normale“ Färbung $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ entspricht einer Listenfärbung mit $L_v = \{1, \dots, k\}$ für alle $v \in V(G)$.

Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist *k-listenfärbbar*, wenn G für *jede* Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist *k -listenfärbbar*, wenn G für *jede* Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar \Rightarrow k -färbbar.

Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist k -listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar $\not\Rightarrow$ k -färbbar.

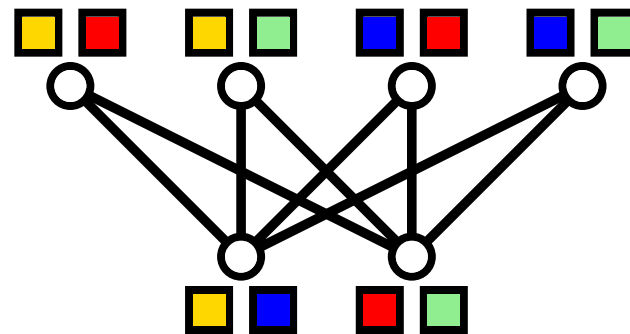
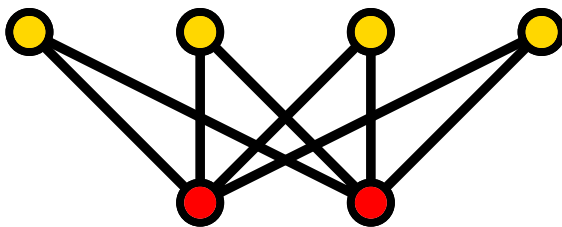
Bsp. Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar –
aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.

Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist k -listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar \Rightarrow k -färbbar.

Bsp. Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar – aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.

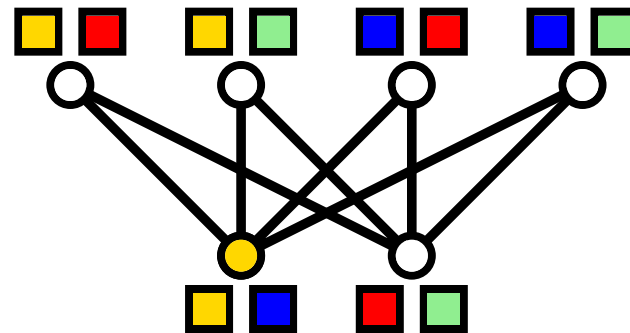
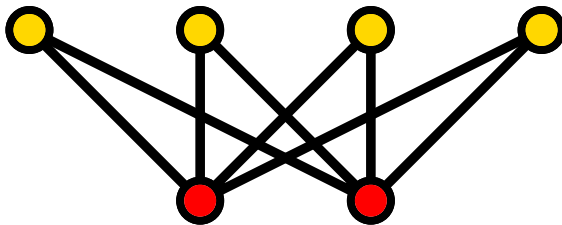


Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist k -listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar \Rightarrow k -färbbar.

Bsp. Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar –
aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.

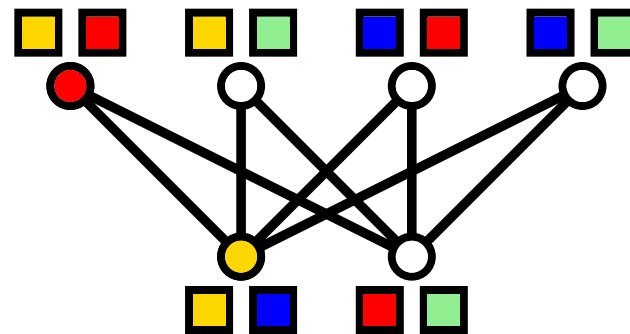
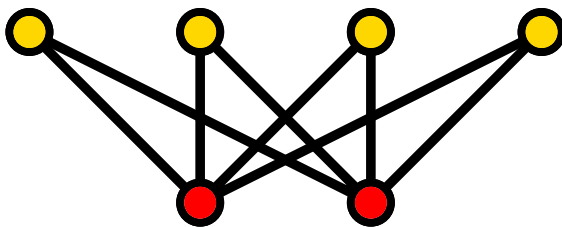


Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist k -listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar $\not\Rightarrow k$ -färbbar.

Bsp. Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar – aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.

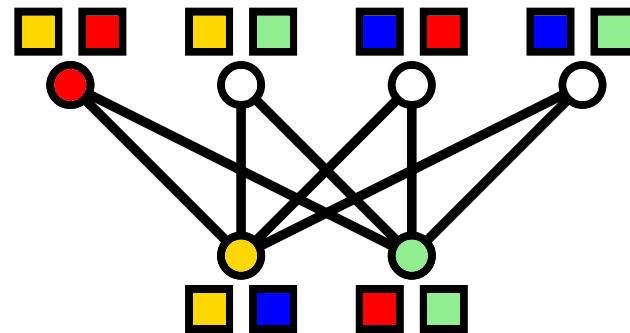
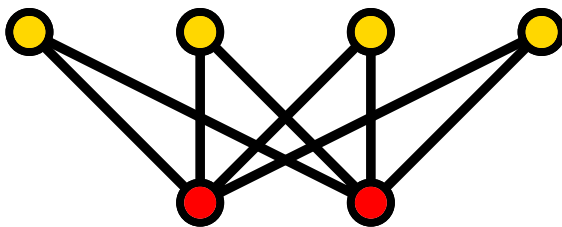


Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist k -listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar \Rightarrow k -färbbar.

Bsp. Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar – aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.

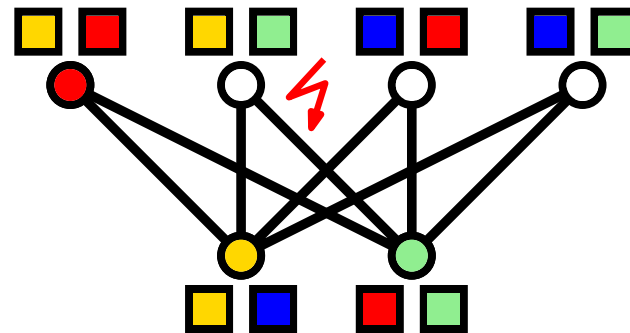
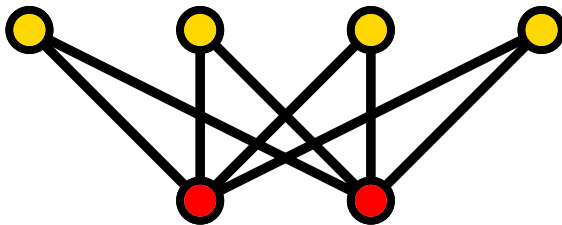


Listenfärbbarkeit

Def. Ein Graph G ist k -listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat.

Beob. G k -listenfärbbar $\not\Rightarrow k$ -färbbar.

Bsp. Jeder bipartite Graph ist 2-färbbar – aber nicht unbedingt 2-listenfärbbar.



Listenfärbbarkeit planarer Graphen

Satz. *Nicht-Vier-Farben-Satz* [Voigt, 1993]
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.



Listenfärbbarkeit planarer Graphen

Satz. *Nicht-Vier-Farben-Satz* [Voigt, 1993]
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.



Satz. Jeder planare Graph
ist 5-*listenfärbbar*. [Thomassen 1994]



Carsten Thomassen
1948 in Grindsted, DK

Listenfärbbarkeit planarer Graphen

Satz. *Nicht-Vier-Farben-Satz* [Voigt, 1993]
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.



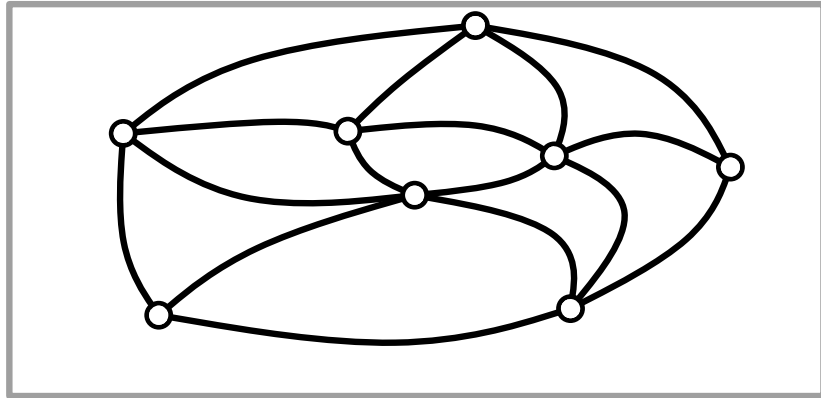
Carsten Thomassen
1948 in Grindsted, DK

Satz. Jeder planare Graph
ist 5-*listenfärbbar*. [Thomassen 1994]
(also auch 5-färbbar!)



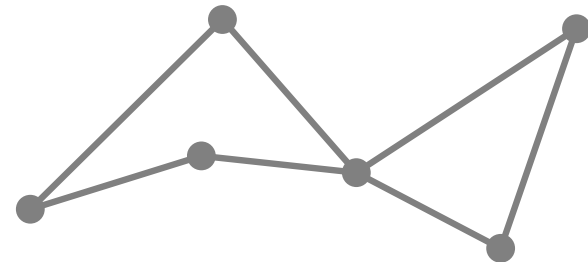
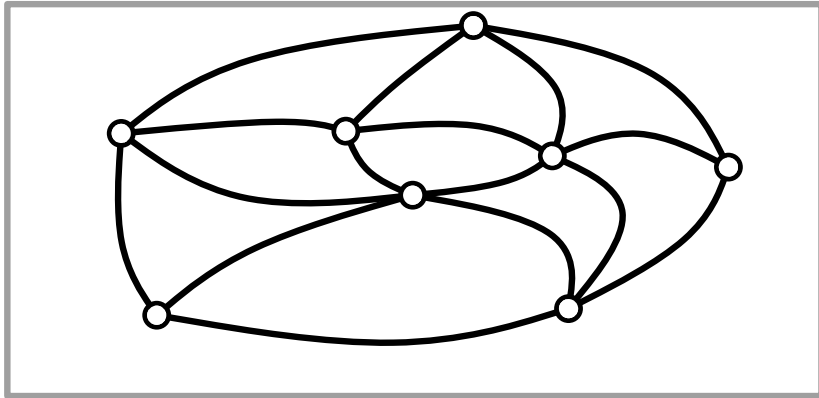
Beweis von Thomassens Satz

OBdA G *fast trianguliert*, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



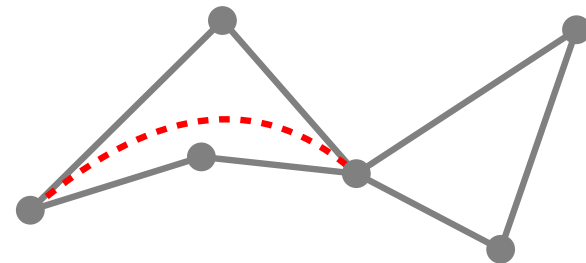
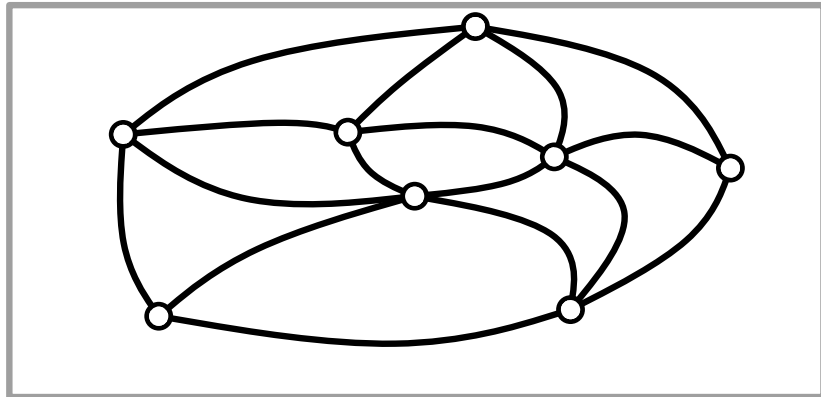
Beweis von Thomassens Satz

OBdA G *fast trianguliert*, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach. (Sonst füge solange Kanten hinzu, bis Bedingung erfüllt.)



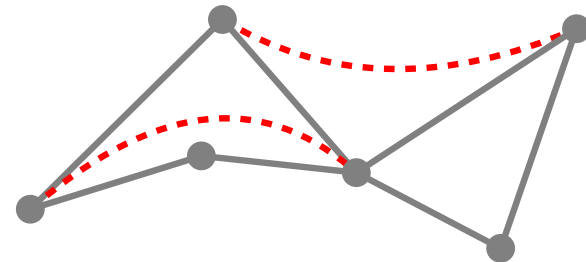
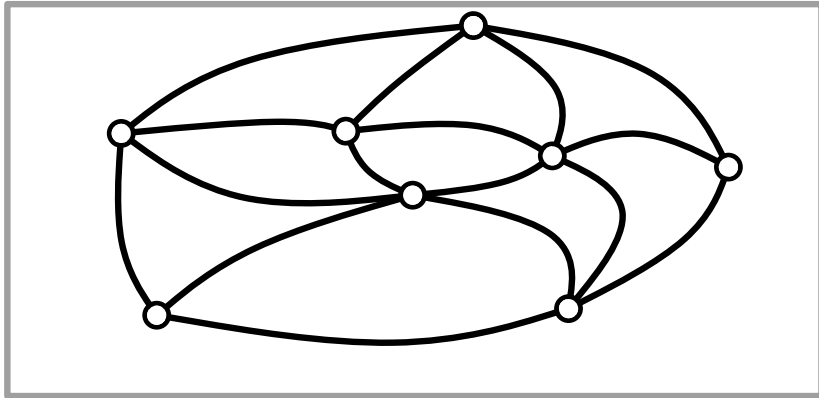
Beweis von Thomassens Satz

OBdA G *fast trianguliert*, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach. (Sonst füge solange Kanten hinzu, bis Bedingung erfüllt.)



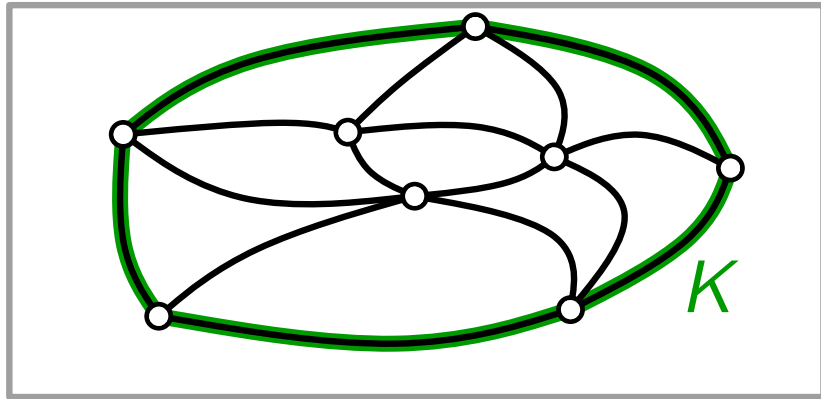
Beweis von Thomassens Satz

OBdA G *fast trianguliert*, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach. (Sonst füge solange Kanten hinzu, bis Bedingung erfüllt.)



Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.
(Sonst füge solange Kanten hinzu, bis Bedingung erfüllt.)

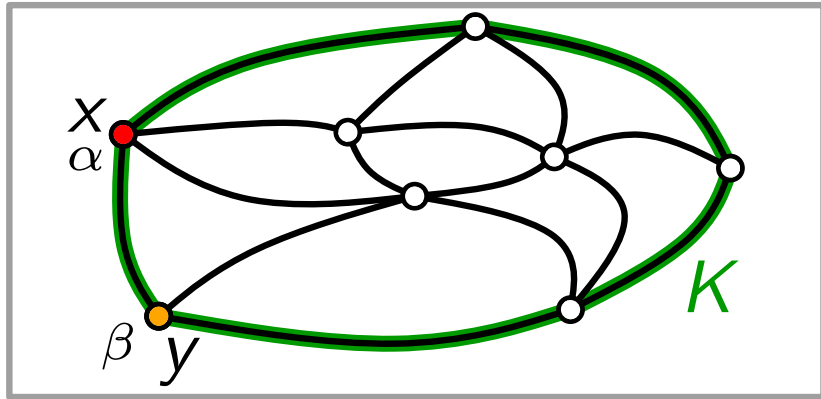


Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

$$(iii) \quad |L_v| \geq 5 \text{ für alle } v \in V(G) \setminus V(K),$$

Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.
(Sonst füge solange Kanten hinzu, bis Bedingung erfüllt.)



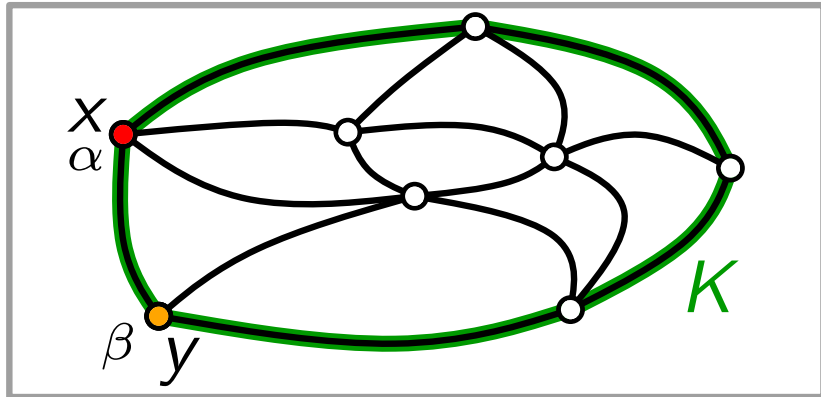
Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,

- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.
(Sonst füge solange Kanten hinzu, bis Bedingung erfüllt.)

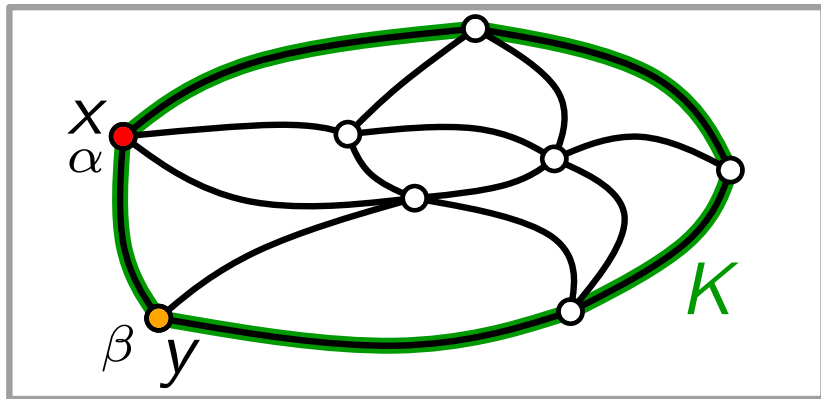


Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.
(Sonst füge solange Kanten hinzu, bis Bedingung erfüllt.)



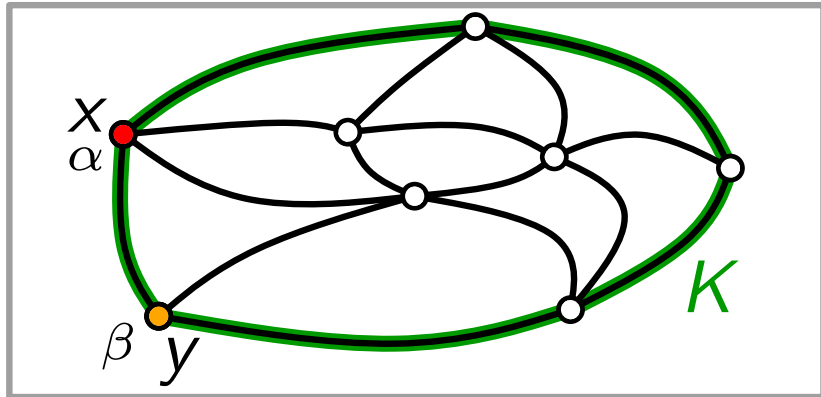
Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



Thomassens Trick:
*Verschärfe Aussage,
beweise mit Induktion!*

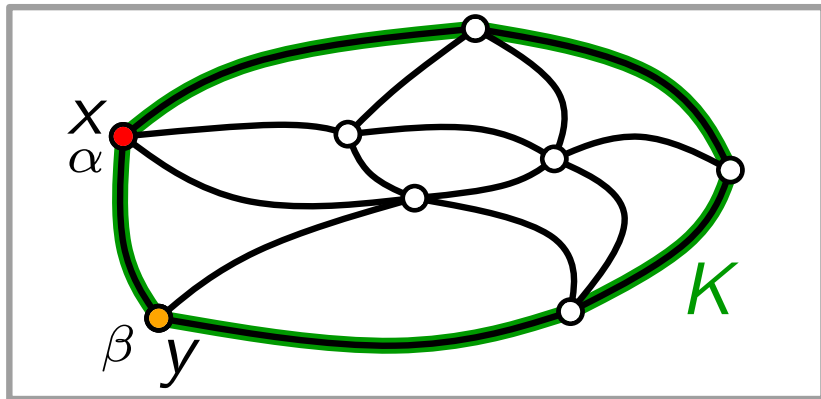
Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



Thomassens Trick:
*Verschärfe Aussage,
beweise mit Induktion!*

Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

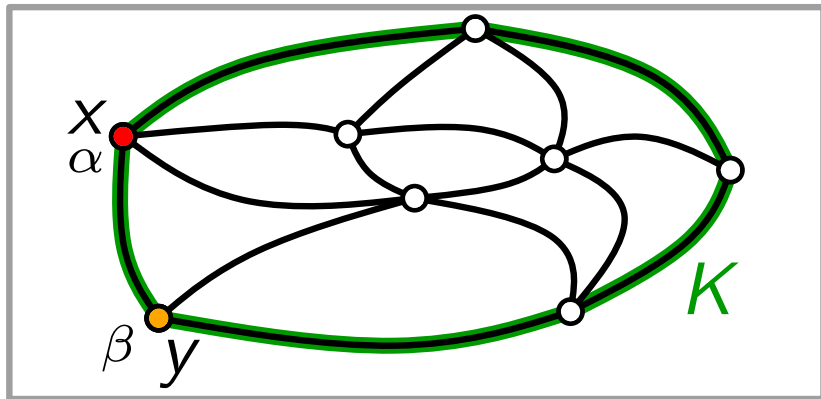
- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

Bew. Per Induktion über $n = |V(G)|$.

Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



Thomassens Trick:
*Verschärfe Aussage,
beweise mit Induktion!*

Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

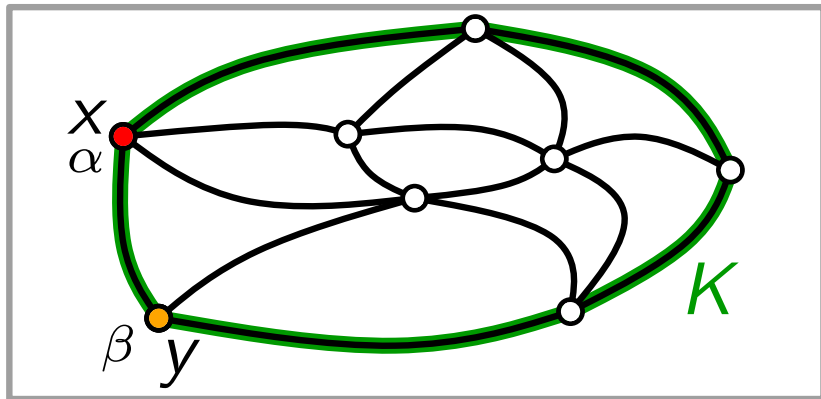
dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

Bew. Per Induktion über $n = |V(G)|$.

$n = 3$:

Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



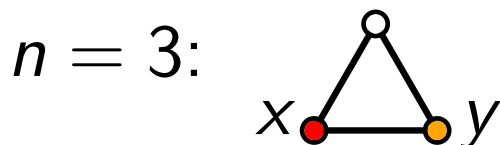
Thomassens Trick:
*Verschärfe Aussage,
beweise mit Induktion!*

Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

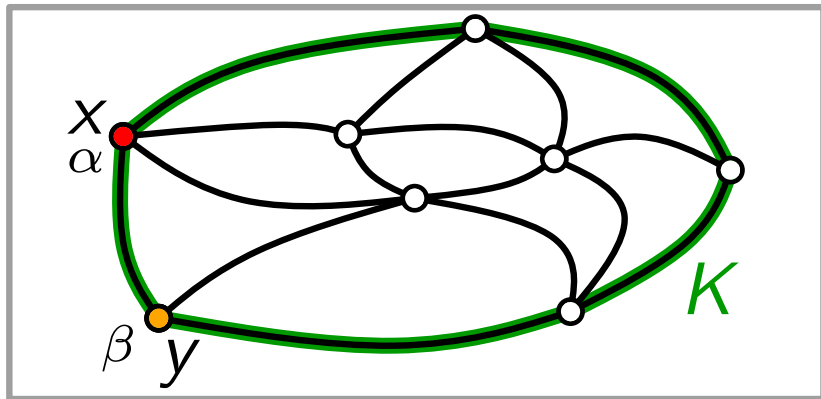
dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

Bew. Per Induktion über $n = |V(G)|$.



Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



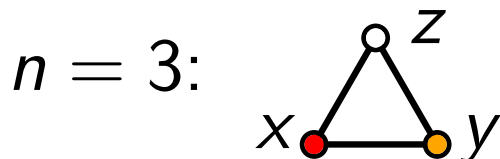
Thomassens Trick:
*Verschärfe Aussage,
beweise mit Induktion!*

Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

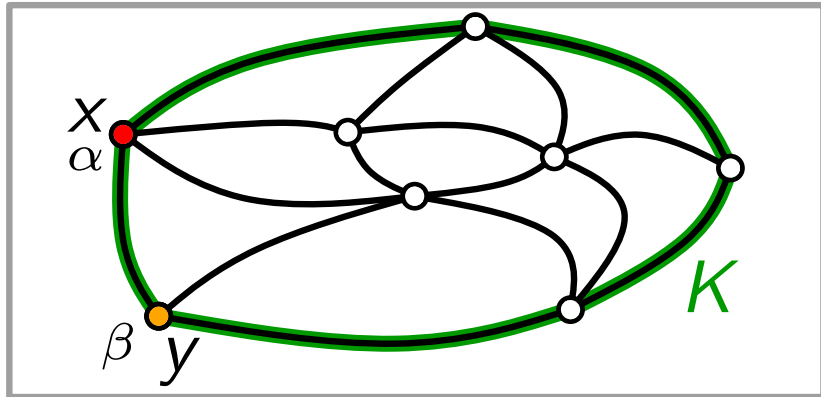
dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

Bew. Per Induktion über $n = |V(G)|$.



Beweis von Thomassens Satz

OBdA G fast trianguliert, d.h. alle Innenfacetten sind Dreiecke und der Kreis, der die Außenfacette begrenzt, ist einfach.



Thomassens Trick:
*Verschärfe Aussage,
beweise mit Induktion!*

Beh. Falls G fast trianguliert (mit einfacher Außenfacette K) und

- (i) zwei adj. Knoten $x, y \in V(K)$ mit $xy \in E(K)$ sind mit $\alpha \neq \beta$ gefärbt,
- (ii) $|L_v| \geq 3$ für alle $v \in K \setminus \{x, y\}$,
- (iii) $|L_v| \geq 5$ für alle $v \in V(G) \setminus V(K)$,

dann lässt sich die Färbung von x & y auf G fortsetzen.

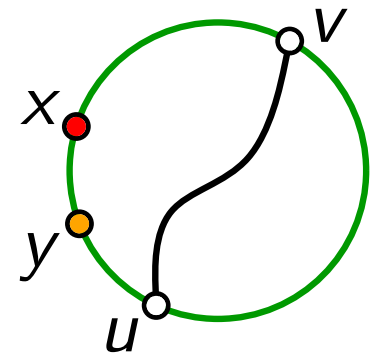
Bew. Per Induktion über $n = |V(G)|$.

$n = 3$:  Färbe z mit Farbe $\gamma \in L_z \setminus \{\alpha, \beta\}$. ✓

Induktionsschritt $n > 3$

Induktionsschritt $n > 3$

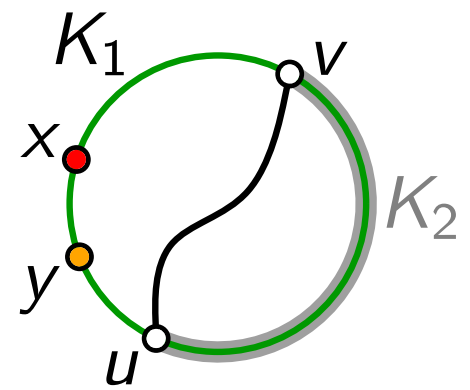
Fall 1: K hat Sehne uv .



Induktionsschritt $n > 3$

Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

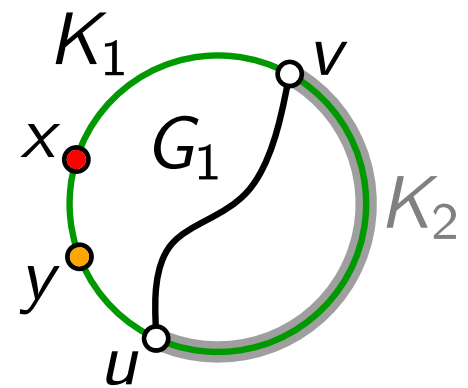


Induktionsschritt $n > 3$

Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.



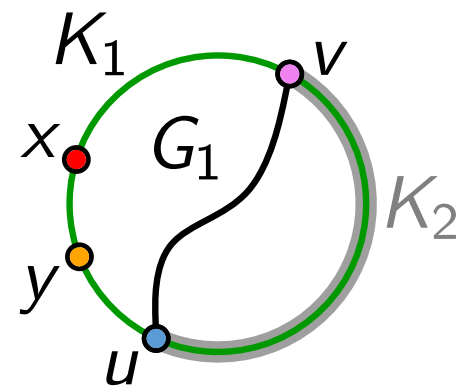
Induktionsschritt $n > 3$

Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an.



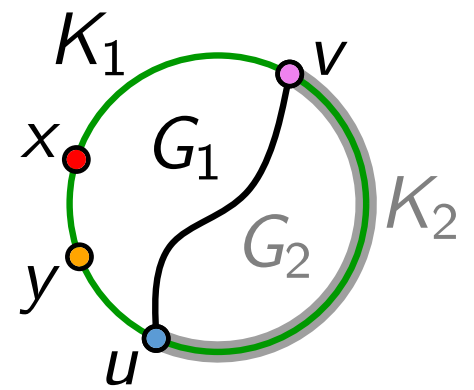
Induktionsschritt $n > 3$

Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .



Induktionsschritt $n > 3$

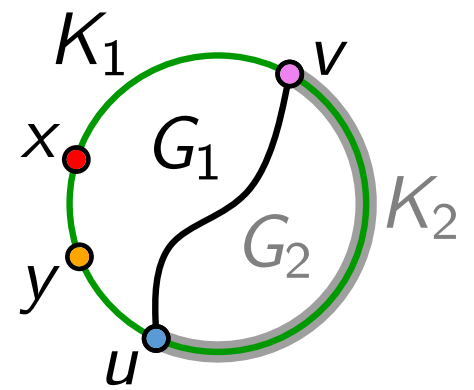
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an.



Induktionsschritt $n > 3$

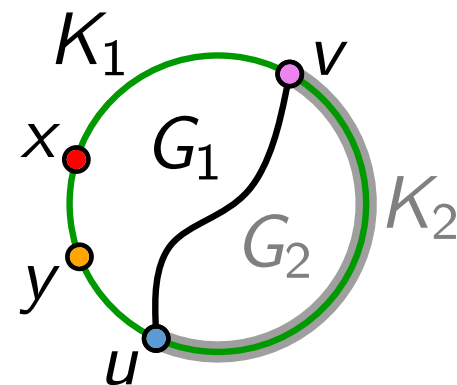
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



Induktionsschritt $n > 3$

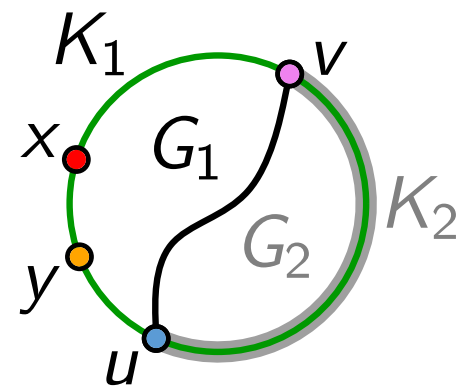
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

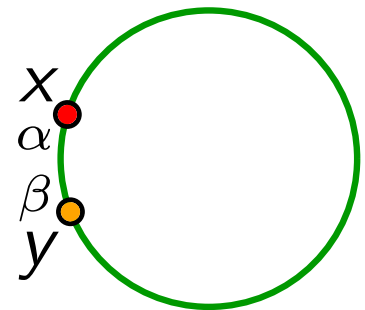
Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



Fall 2: K hat keine Sehne.



Induktionsschritt $n > 3$

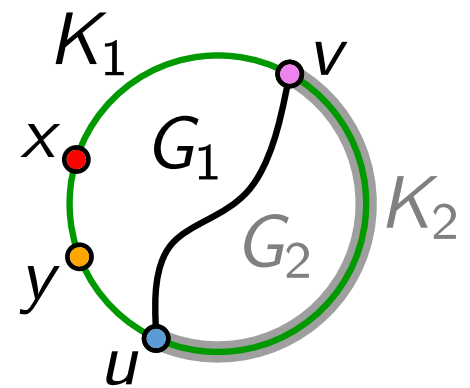
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

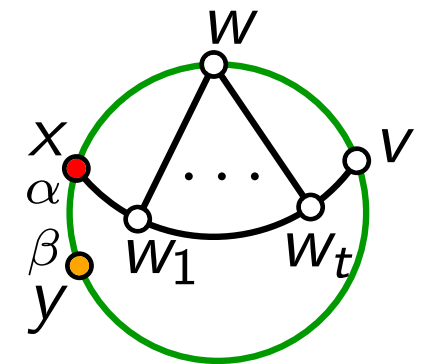
Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



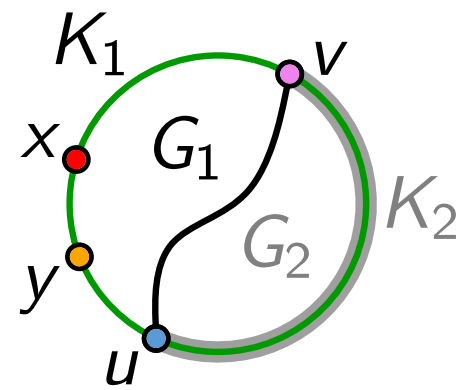
Fall 2: K hat keine Sehne.

Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .



Induktionsschritt $n > 3$



Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

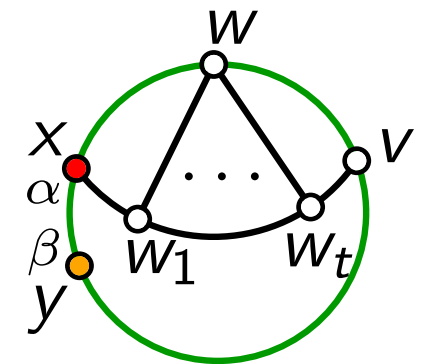
Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓

Fall 2: K hat keine Sehne.

Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$$


Induktionsschritt $n > 3$

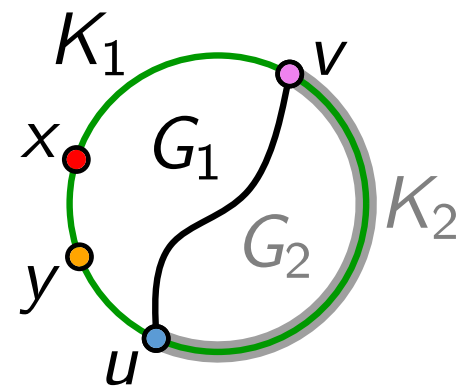
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



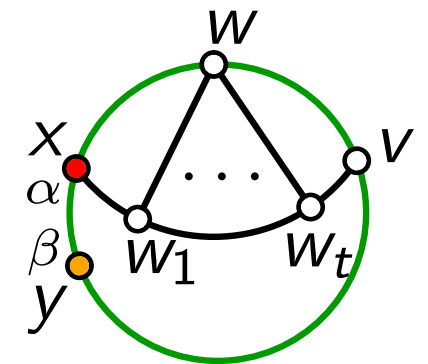
Fall 2: K hat keine Sehne.

Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$.



Induktionsschritt $n > 3$

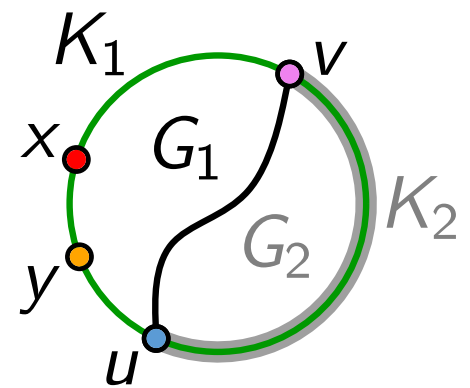
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



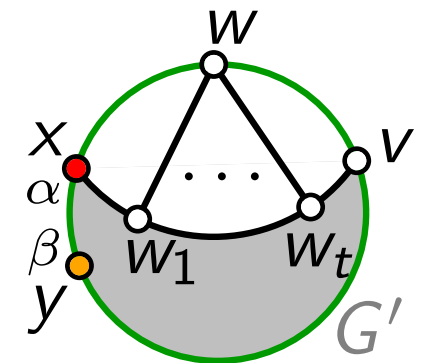
Fall 2: K hat keine Sehne.

Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$. $G' = G - w$ ist fast trianguliert.



Induktionsschritt $n > 3$

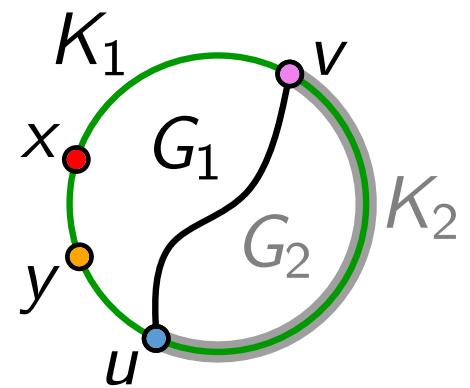
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



Fall 2: K hat keine Sehne.

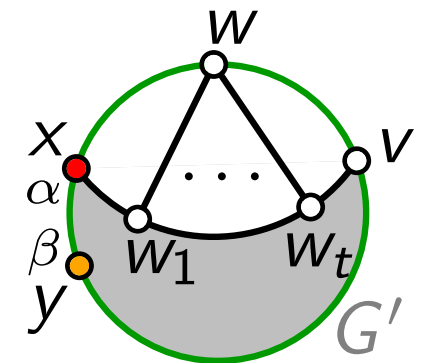
Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$. $G' = G - w$ ist fast trianguliert.

$\Rightarrow G'$ mit Listen L' erfüllt IV



Induktionsschritt $n > 3$

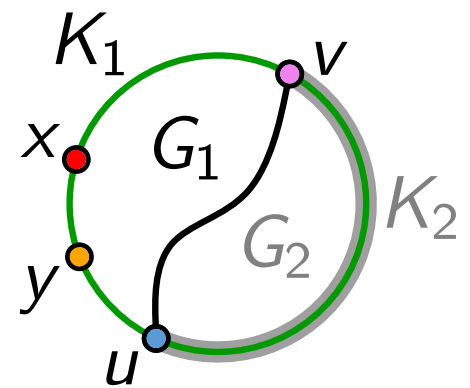
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



Fall 2: K hat keine Sehne.

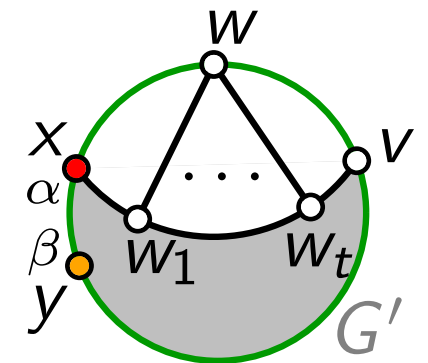
Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$. $G' = G - w$ ist fast trianguliert.

$\Rightarrow G'$ mit Listen L' erfüllt IV \Rightarrow 5-Listenfärbung von G'



Induktionsschritt $n > 3$

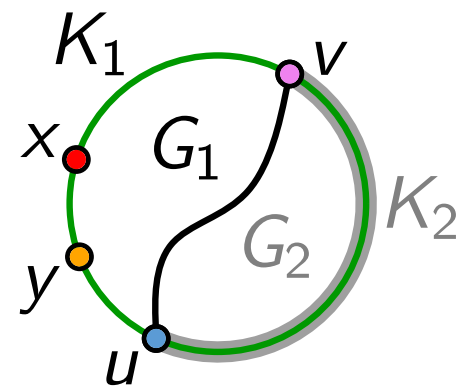
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



Fall 2: K hat keine Sehne.

Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

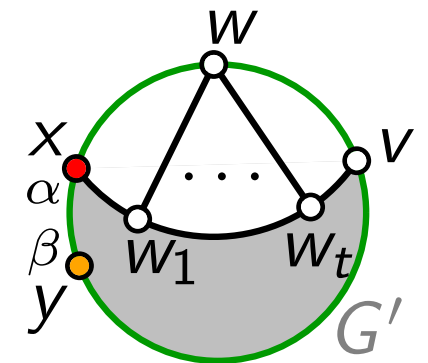
Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$. $G' = G - w$ ist fast trianguliert.

$\Rightarrow G'$ mit Listen L' erfüllt IV \Rightarrow 5-Listenfärbung von G'

Färbe w mit $\{\gamma, \delta\} \setminus \text{Farbe}(v)$



Induktionsschritt $n > 3$

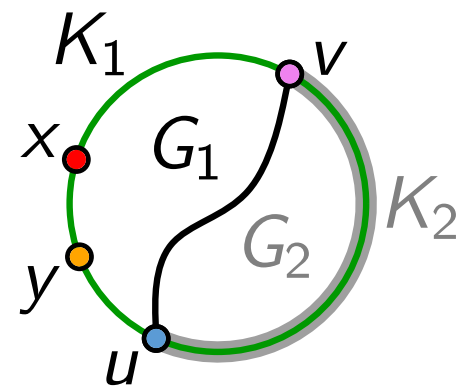
Fall 1: K hat Sehne uv .

uv zerlegt K in K_1 und K_2 .

Sei G_1 der Teilgraph von G auf und innerhalb $K_1 + uv$.

Wende Induktionsvoraussetzung (IV) auf G_1 an. Definiere G_2 .

Wende IV (mit schon gefärbten Knoten u und v !) auf G_2 an. ✓



Fall 2: K hat keine Sehne.

Sei $w \neq y$ Nachbar von x auf K .

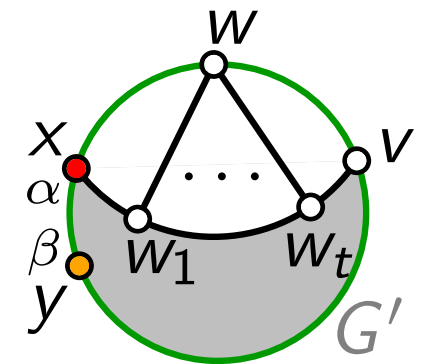
Sei $N(w) = \{x, w_1, \dots, w_t, v\}$ Nachbarschaft von w .

$|L_w| \geq 3 \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in L_w \setminus \{\alpha\}$

$L'_{w_i} := L_{w_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$. $G' = G - w$ ist fast trianguliert.

$\Rightarrow G'$ mit Listen L' erfüllt IV \Rightarrow 5-Listenfärbung von G'

Färbe w mit $\{\gamma, \delta\} \setminus \text{Farbe}(v) \Rightarrow$ 5-Listenfärbung von G ✓ □



Planaritätstest

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.



John Edward Hopcroft
*1939, Seattle, WA, U.S.A.



Robert Endre Tarjan
*1948 Pomona, CA, USA

Planaritätstest

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.



John Edward Hopcroft
*1939, Seattle, WA, U.S.A.



Robert Endre Tarjan
*1948 Pomona, CA, USA

Ziemlich kompliziert! \Rightarrow

Wir behandeln einfacheren Algorithmus mit Laufzeit $O(n^3)$.

Planaritätstest

Satz. [Auslander & Parter 1961]

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n^3)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Planaritätstest

Satz. [Auslander & Parter 1961]

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n^3)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Beobachtung.

G planar \Leftrightarrow jede Zusammenhangskomponente von G ist planar.

Planaritätstest

Satz. [Auslander & Parter 1961]

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n^3)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Beobachtung.

G planar \Leftrightarrow jede Zusammenhangskomponente von G ist planar.

Also können wir uns auf Algorithmen für zusammenhängende Graphen beschränken.

Zweifacher Knotenzusammenhang

Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

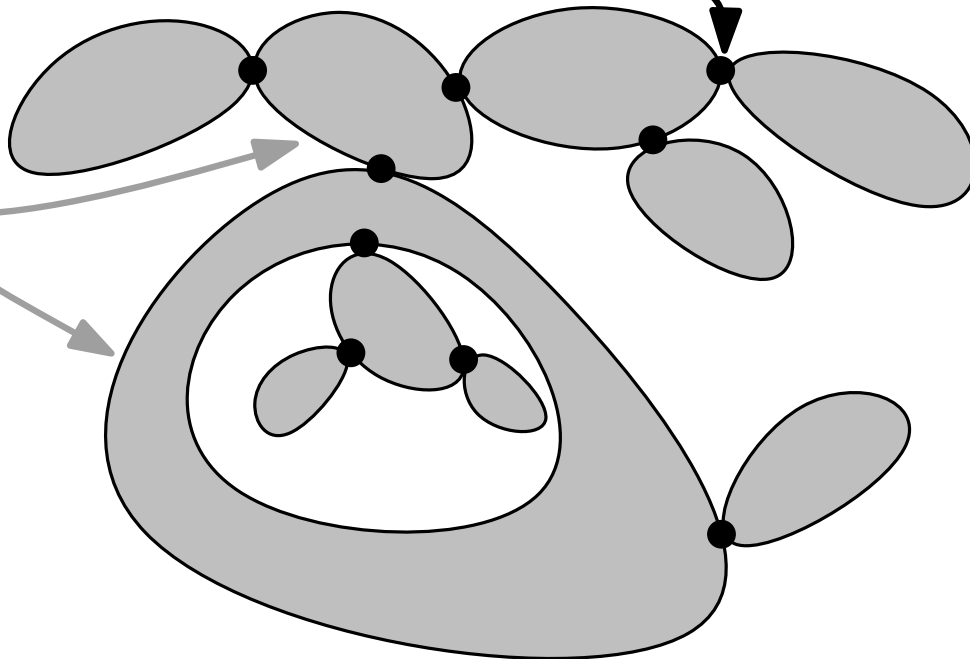
Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.

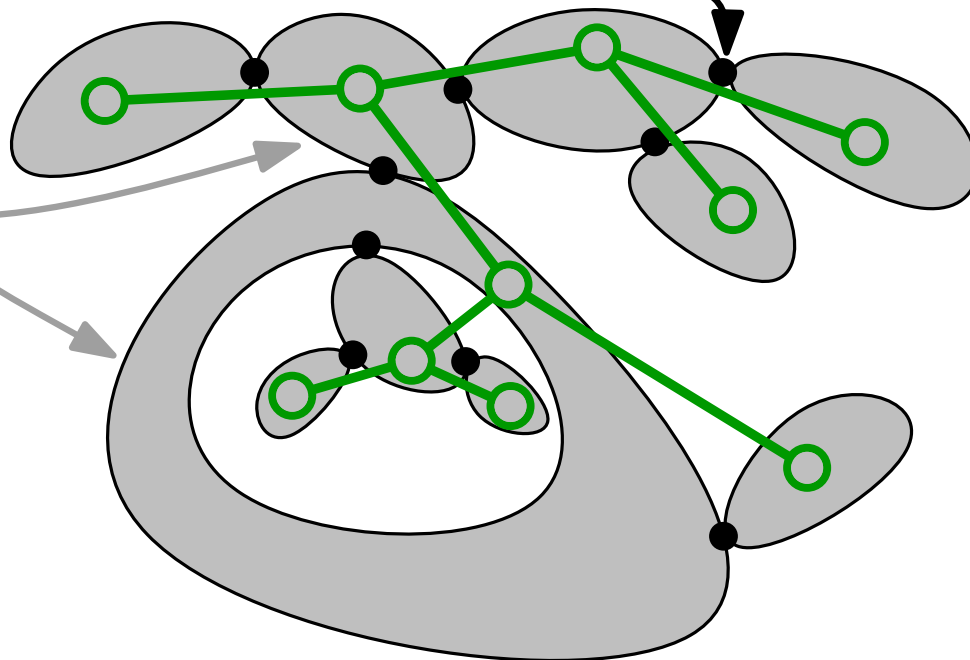


Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.

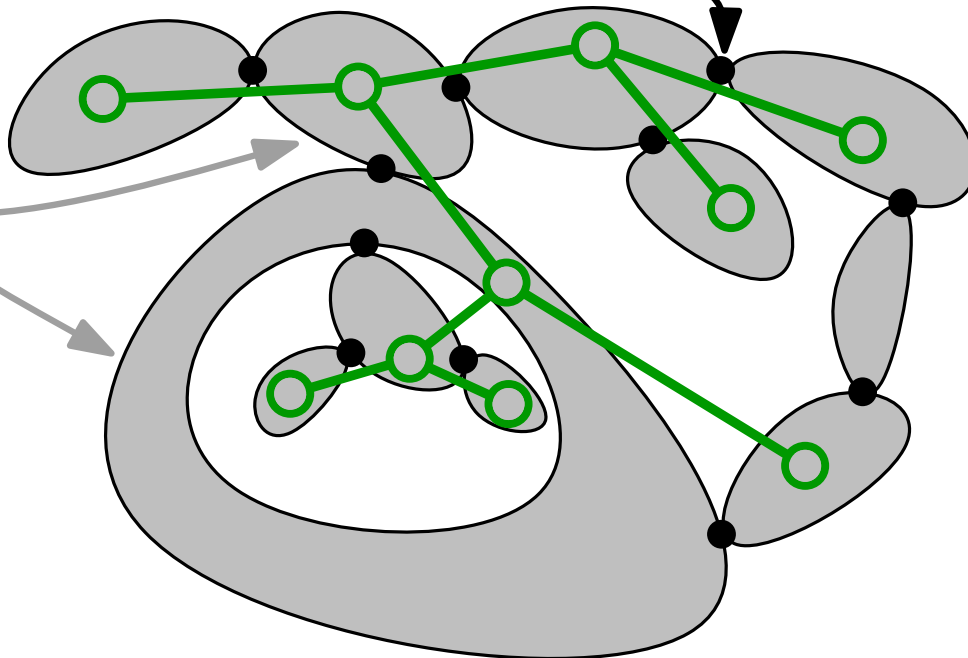


Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.

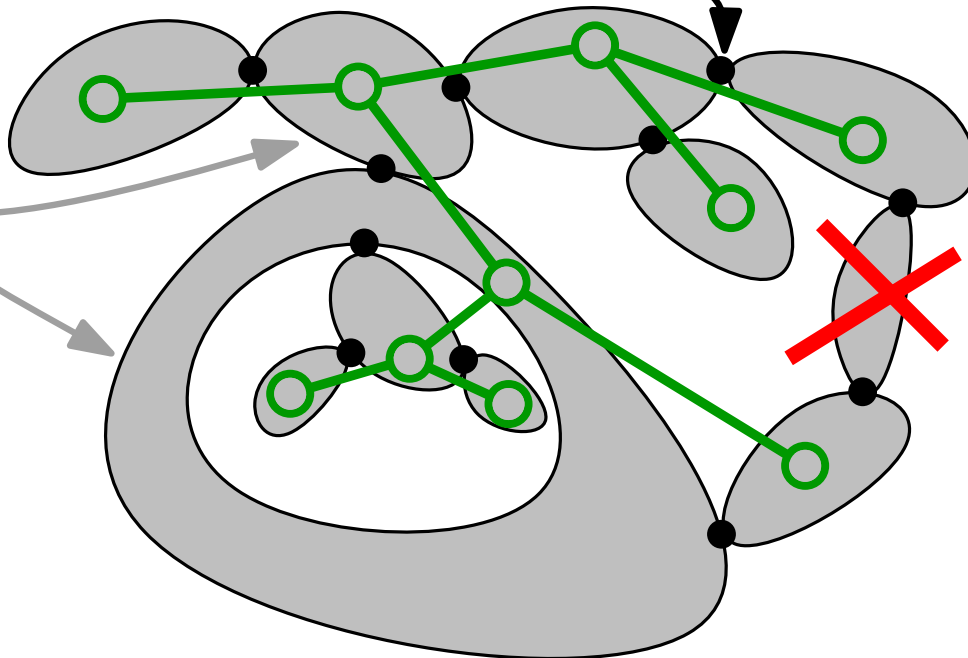


Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.

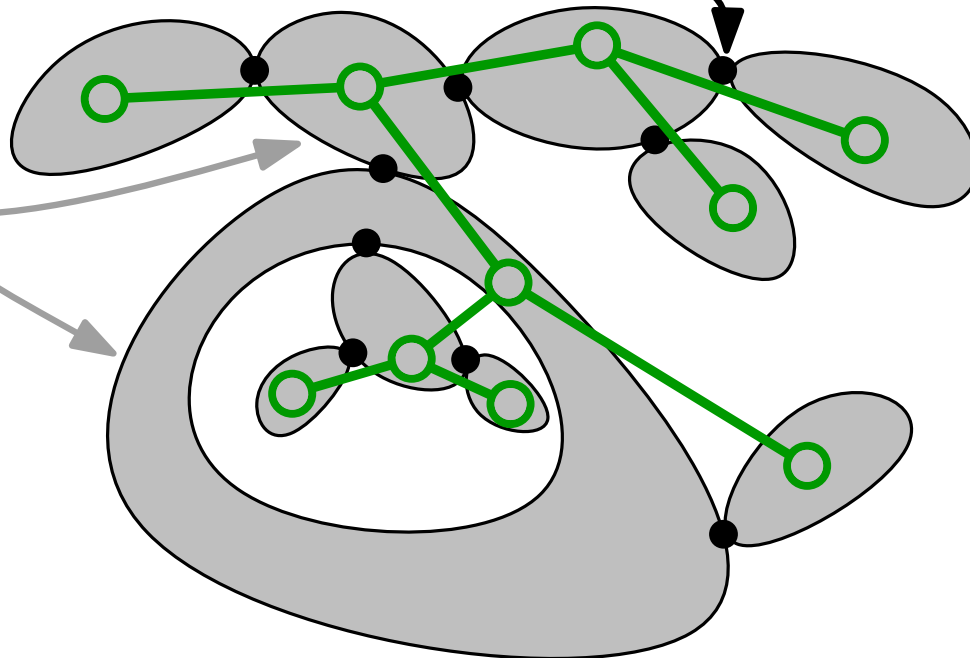


Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.



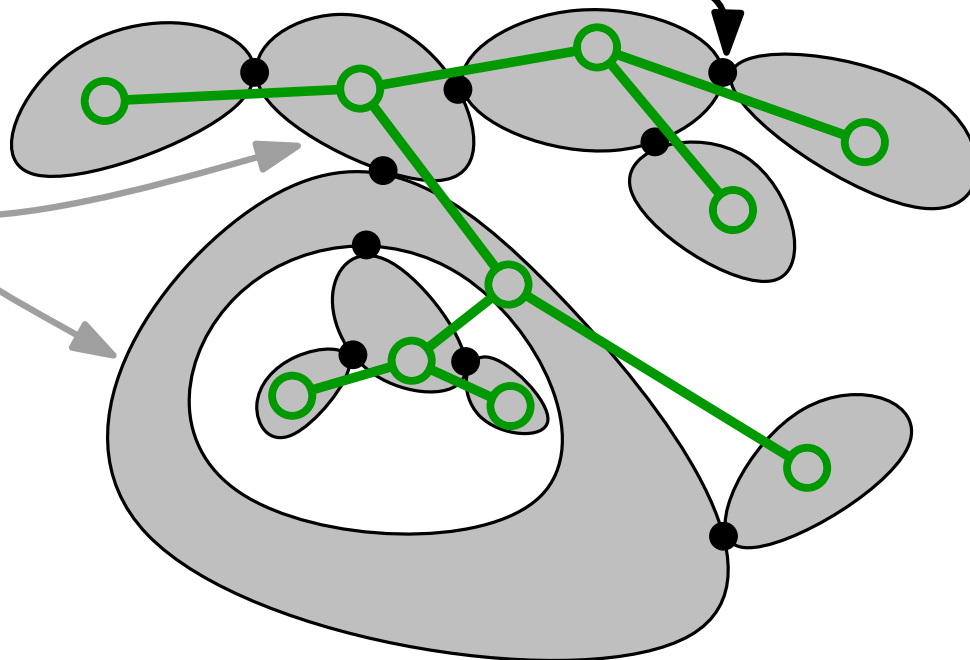
Es genügt, zweifach
zusammenhängende
Graphen zu betrachten.

Zweifacher Knotenzusammenhang

bzgl. Inklusion maximale Knotenmenge $K \subseteq V(G)$,
für die $G[K]$ zweifach zusammenhängend ist

Behauptung. G planar \Leftrightarrow
jede Zweifach-Zusammenhangskomponente
(ZZK) von G ist planar.

ZZKs sind über *Schnittknoten* verbunden und bilden den sog.
Zwei-Block-Baum, der in Linearzeit berechnet werden kann.



Es genügt, zweifach
zusammenhängende
Graphen zu betrachten.

(Wegen der Beh. können wir bei einem
einfach zusammenhängenden Graphen seine
ZZK berechnen und jede einzeln testen.)

Ziel und Strategie

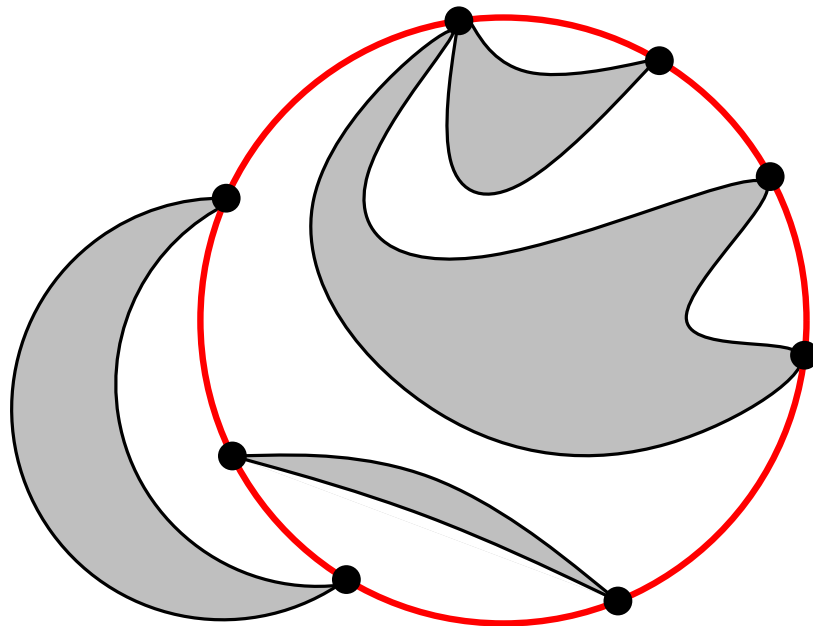
Ziel: Planaritätstest für zweifach zusammenhängende Graphen.

Ziel und Strategie

Ziel: Planaritätstest für zweifach zusammenhängende Graphen.

Strategie:

- Berechne separierenden **Kreis** und zerlege Graph in sogenannte Teilstücke.

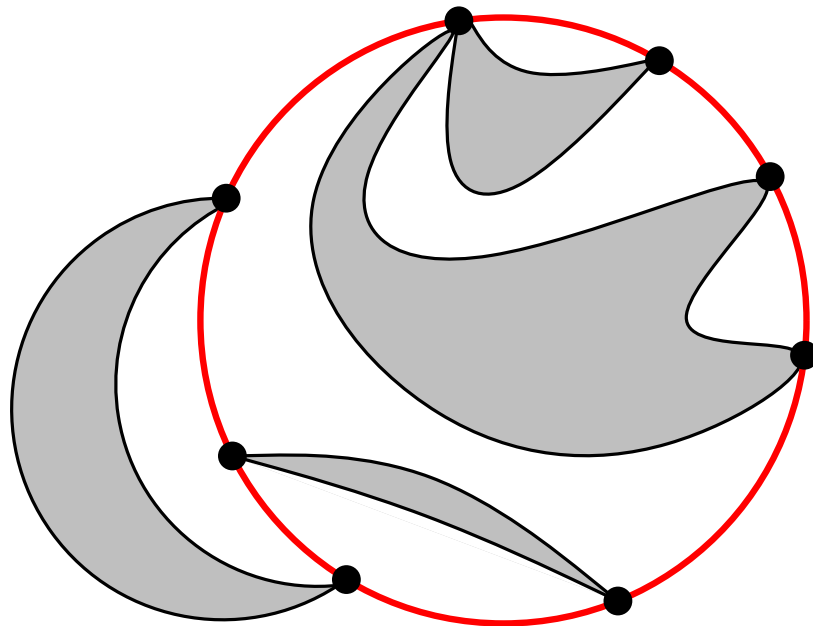


Ziel und Strategie

Ziel: Planaritätstest für zweifach zusammenhängende Graphen.

Strategie:

- Berechne separierenden **Kreis** und zerlege Graph in sogenannte **Teilstücke**.
- Untersuche Grobstruktur der **Teilstücke**.

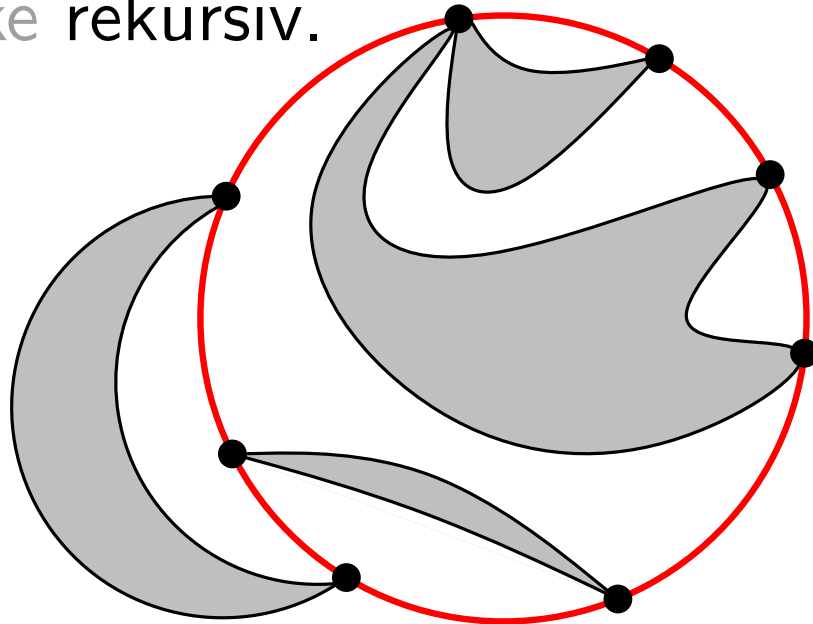


Ziel und Strategie

Ziel: Planaritätstest für zweifach zusammenhängende Graphen.

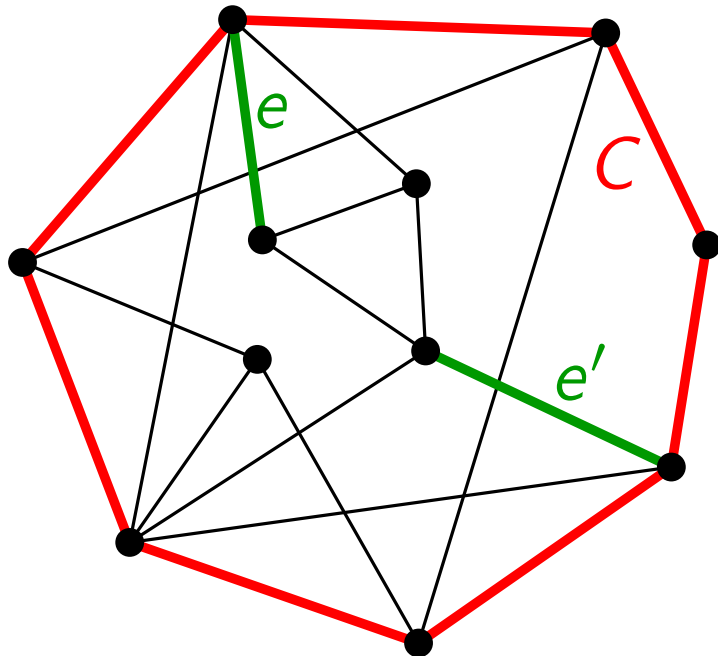
Strategie:

- Berechne separierenden **Kreis** und zerlege Graph in sogenannte **Teilstücke**.
- Untersuche Grobstruktur der **Teilstücke**.
- Teste **Teilstücke** rekursiv.



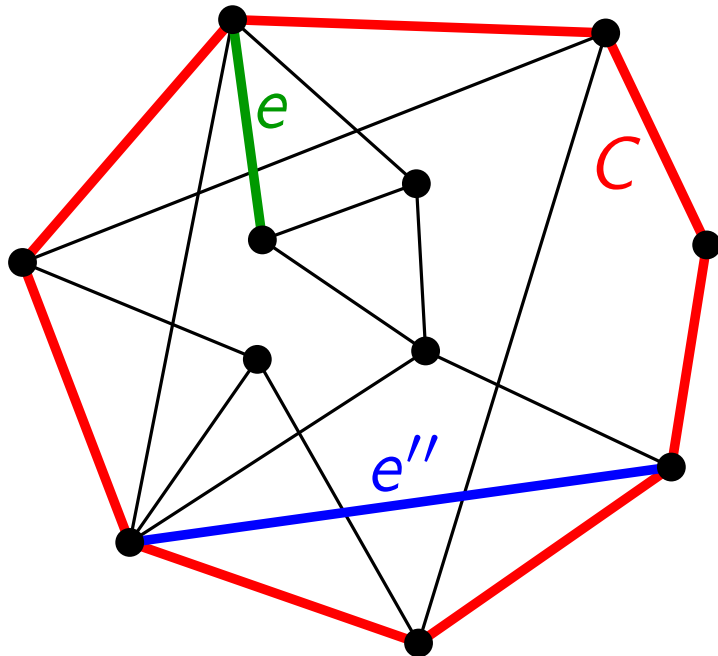
Teilstück

Def. Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten.
Dann heißen e und e' *äquivalent* (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt.



Teilstück

Def. Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten.
Dann heißen e und e' *äquivalent* (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt.

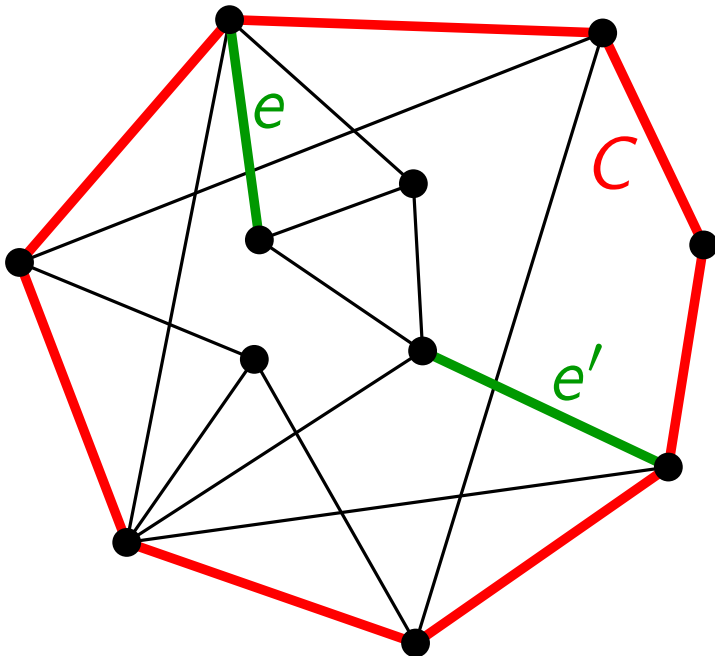


Teilstück

Def. Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten.

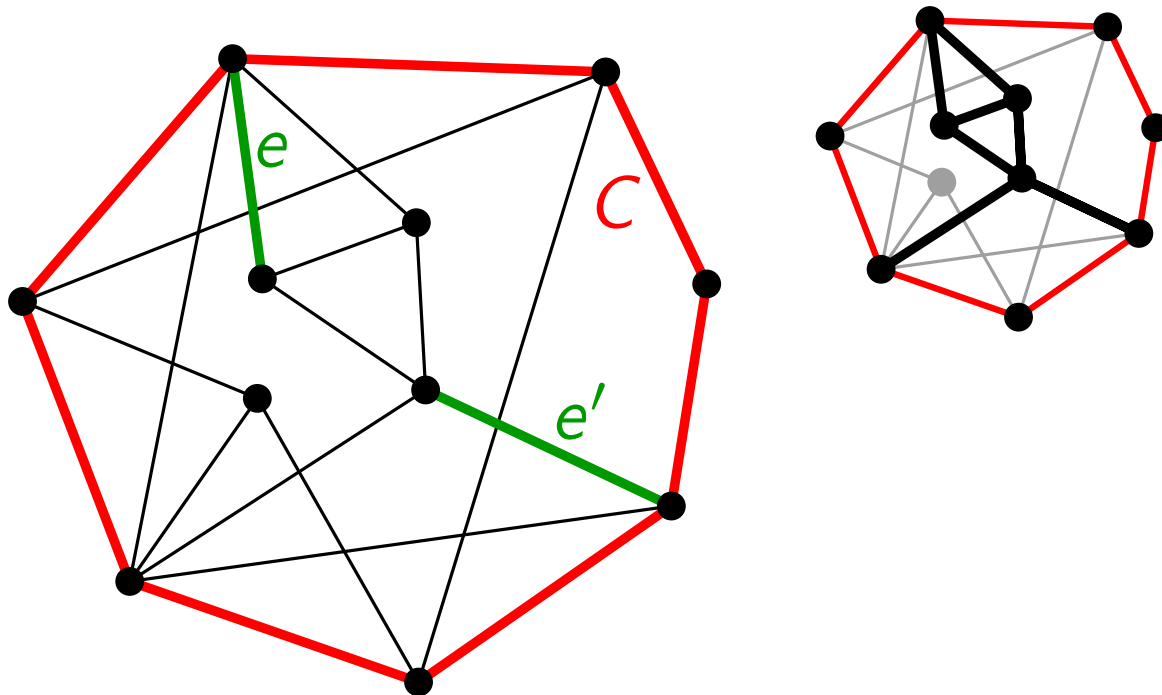
Dann heißen e und e' *äquivalent* (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt.

Die resultierenden Äquivalenzklassen heißen *Teilstücke* (bezüglich C).



Teilstück

Def. Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten.
 Dann heißen e und e' *äquivalent* (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt.
 Die resultierenden Äquivalenzklassen heißen *Teilstücke* (bezüglich C).

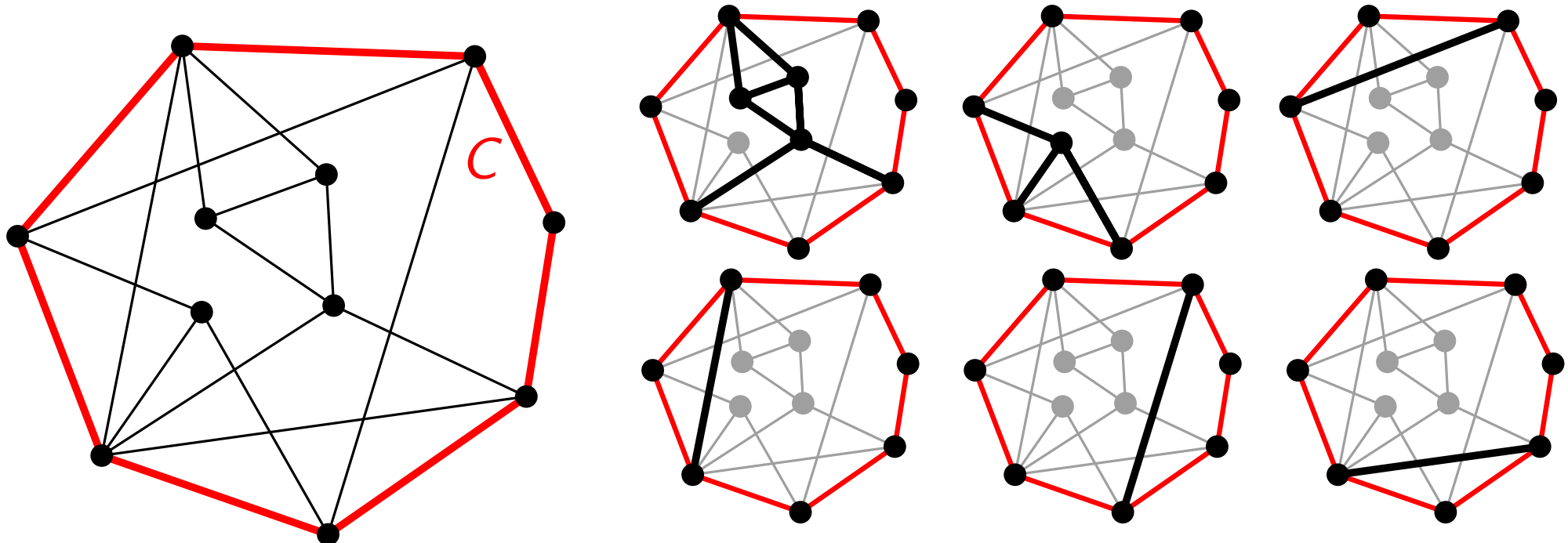


Teilstück

Def. Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten.

Dann heißen e und e' *äquivalent* (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt.

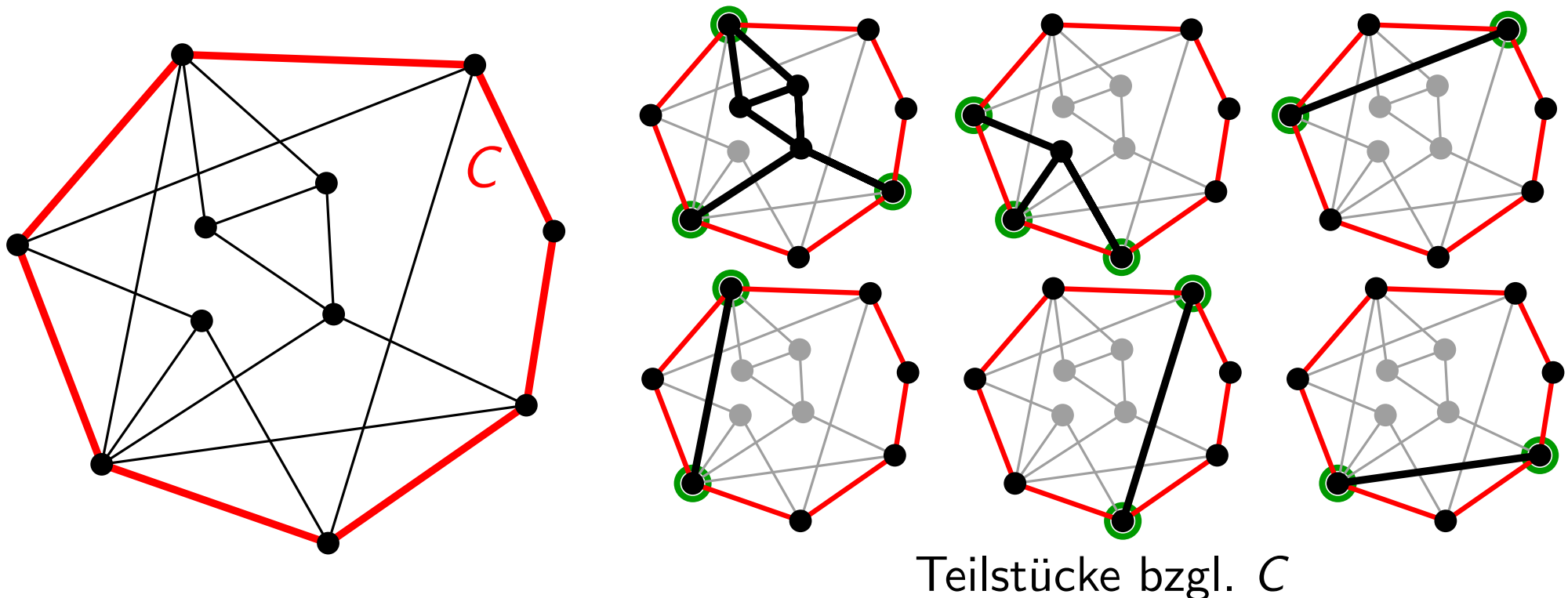
Die resultierenden Äquivalenzklassen heißen *Teilstücke* (bezüglich C).



Teilstücke bzgl. C

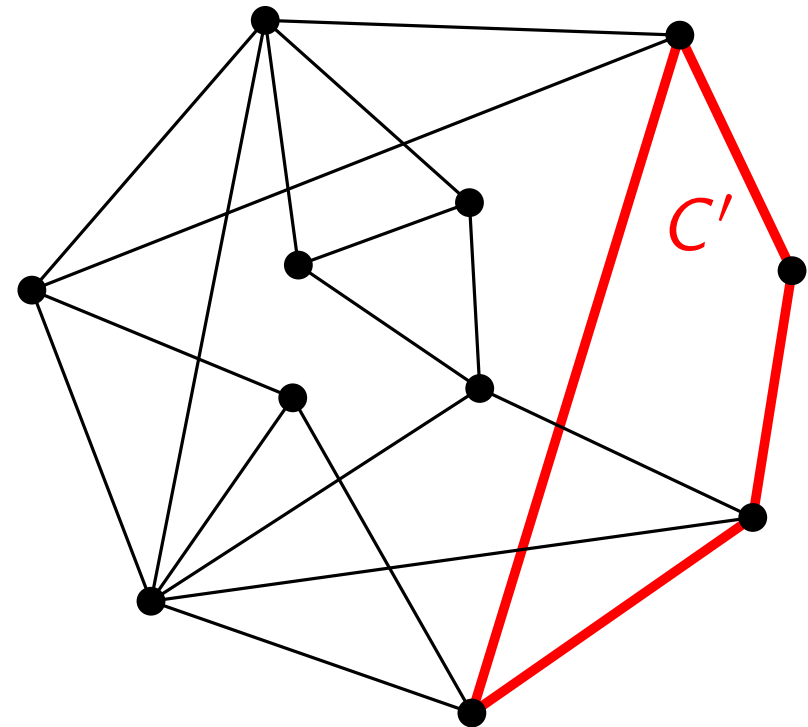
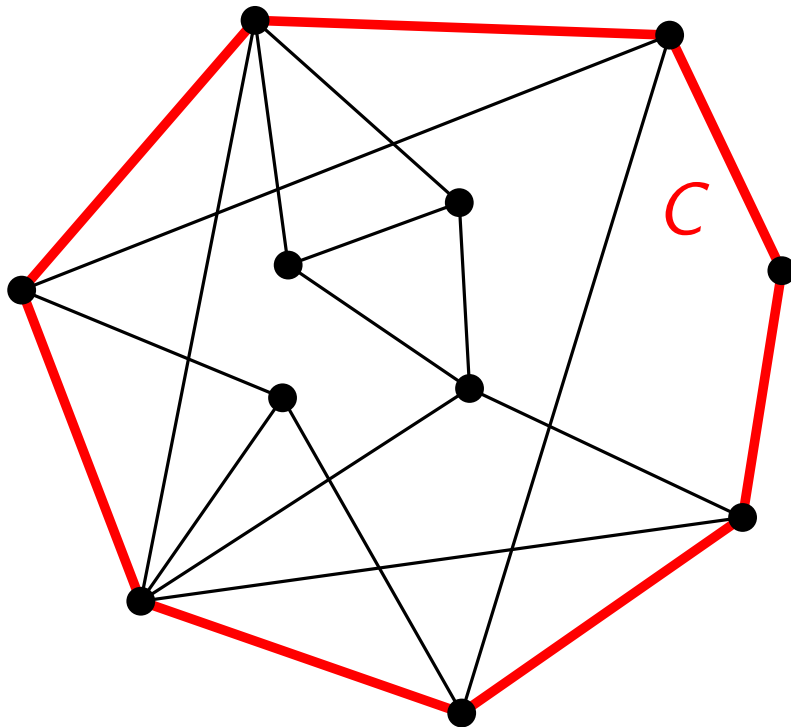
Teilstück

Def. Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten. Dann heißen e und e' *äquivalent* (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt. Die resultierenden Äquivalenzklassen heißen *Teilstücke* (bezüglich C). Jedes Teilstück hat ≥ 2 *Anknüpfungspunkte*.



Separierender Kreis

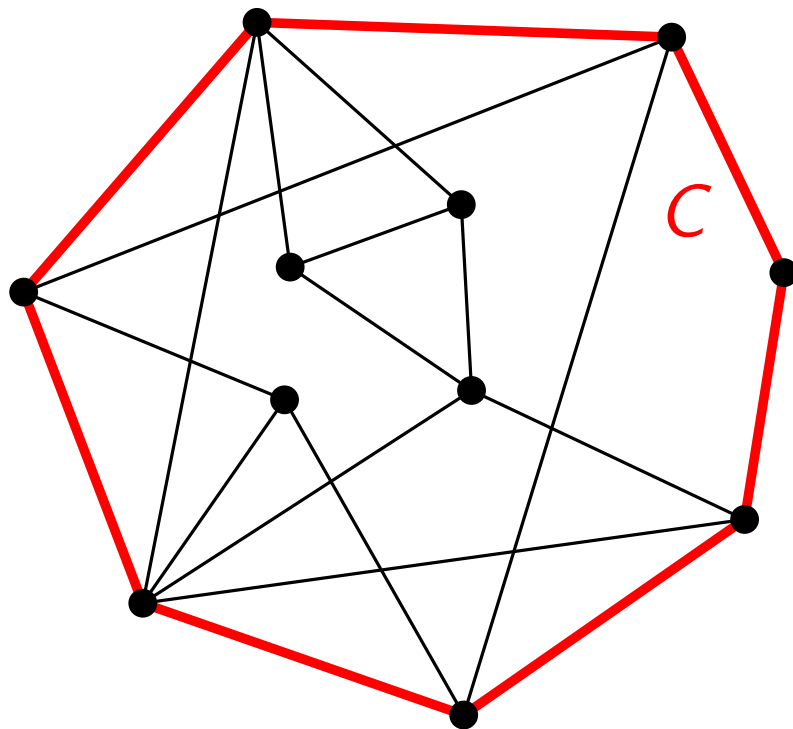
Def. Ein Kreis heißt *separierend*, wenn er mindestens zwei Teilstücke induziert.



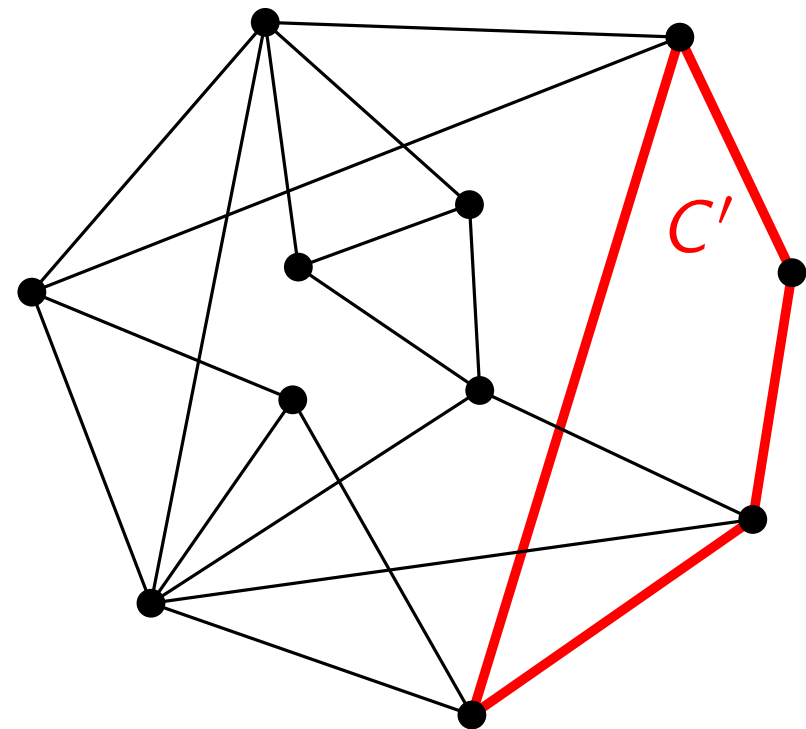
Separierender Kreis

Def. Ein Kreis heißt *separierend*, wenn er mindestens zwei Teilstücke induziert.

separierend



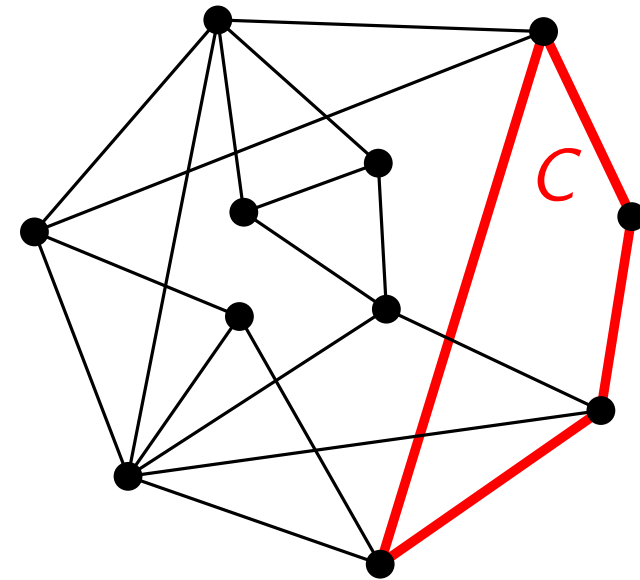
nicht separierend



Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

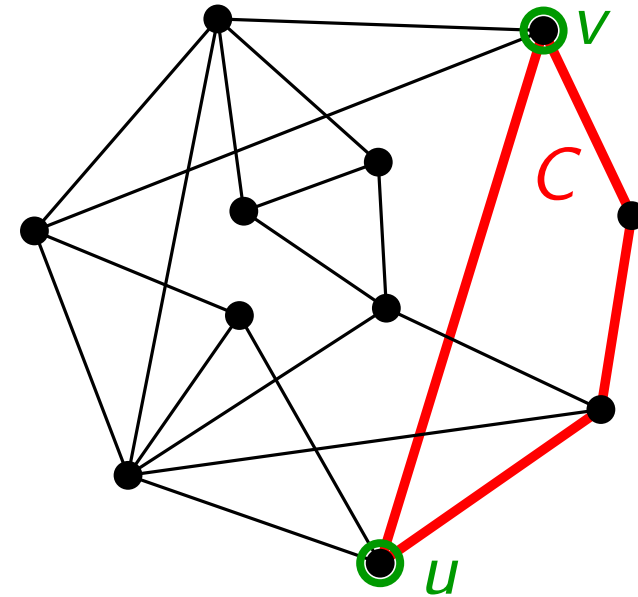


Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
 Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .



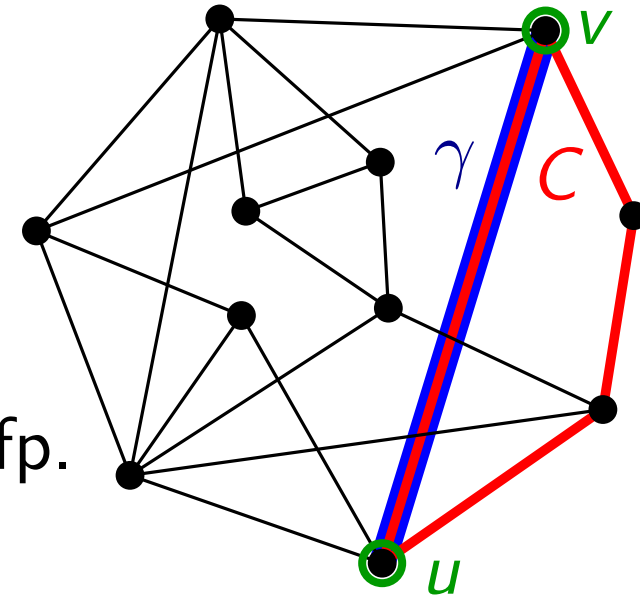
Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
 Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfungsp.



Existenz separierender Kreis

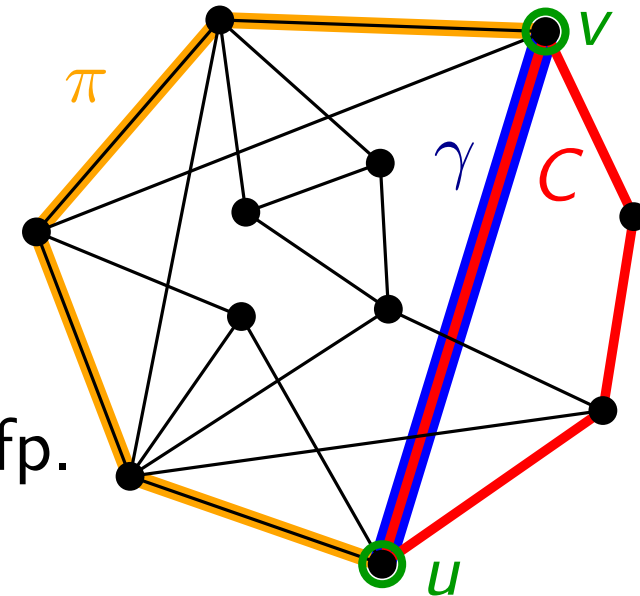
Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfungsp.

Sei π ein u - v -Pfad in P .



Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

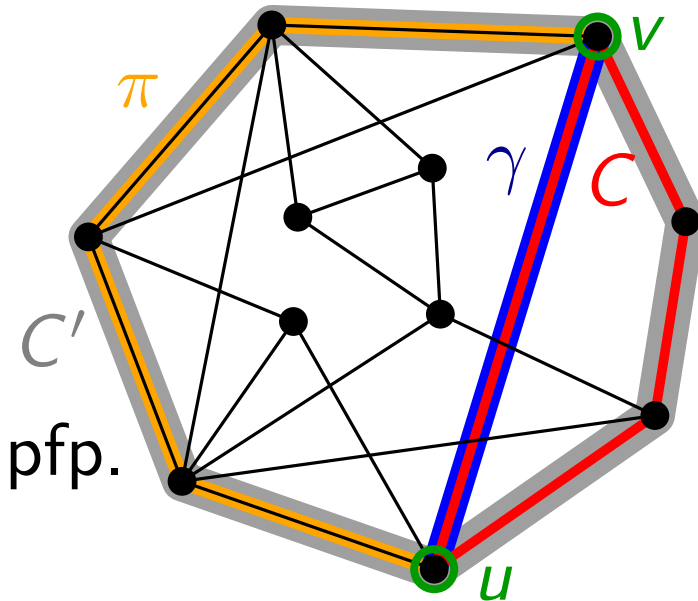
Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfungsp.

Sei π ein u - v -Pfad in P .

Betrachte Kreis $C' := C + \pi - \gamma$



Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

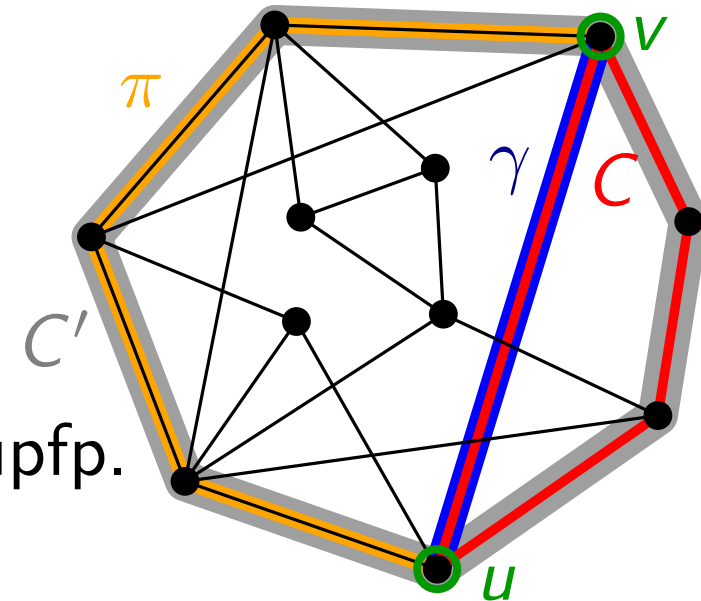
Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfungsp.

Sei π ein u - v -Pfad in P .

Betrachte Kreis $C' := C + \pi - \gamma \Rightarrow \gamma$ ist Teilstück bzgl. C' .



Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

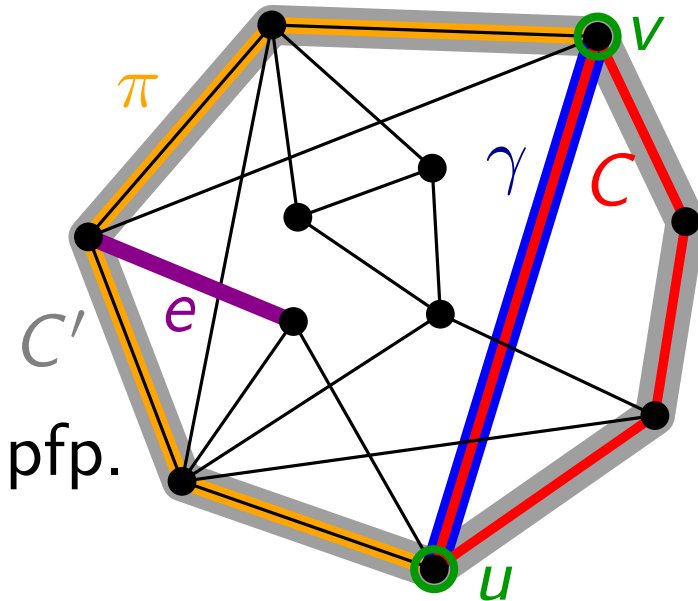
Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfungsp.

Sei π ein u - v -Pfad in P .

Betrachte Kreis $C' := C + \pi - \gamma \Rightarrow \gamma$ ist Teilstück bzgl. C' .

Falls P kein Pfad ist, existiert eine Kante $e \in E(P) \setminus E(\pi)$.



Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

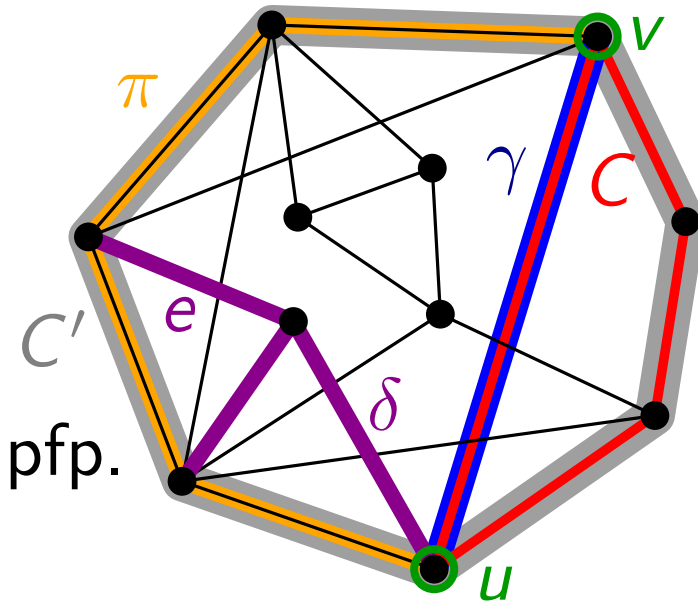
Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfp.

Sei π ein u - v -Pfad in P .

Betrachte Kreis $C' := C + \pi - \gamma \Rightarrow \gamma$ ist Teilstück bzgl. C' .

Falls P kein Pfad ist, existiert eine Kante $e \in E(P) \setminus E(\pi)$.

Teilstück δ , das e enthält, ist verschieden von γ



Existenz separierender Kreis

Lem₁. Sei C ein *nicht-separierender* Kreis mit Teilstück P .
Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis C' , der aus einem Teilpfad von C und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfungspunkten von P besteht.

Beweis.

Seien u und v aufeinanderfolgende Anknüpfungspunkte von P in der zyklischen Reihenfolge von C .

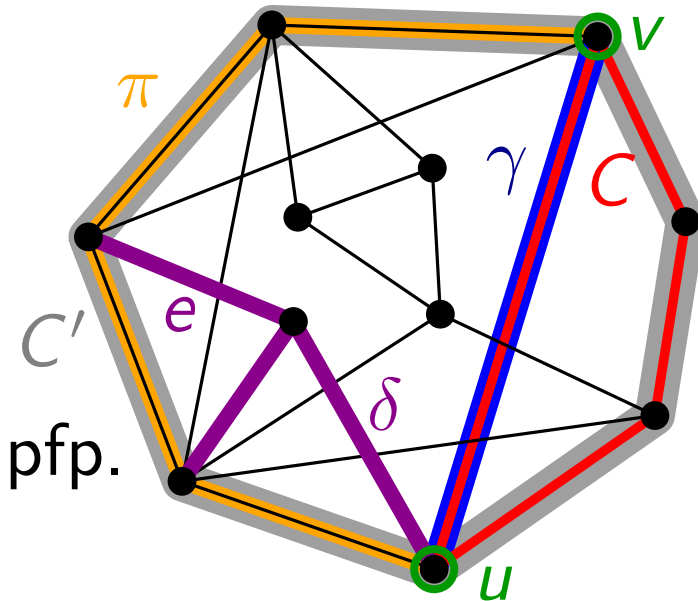
Betr. u - v -Pfad γ auf C ohne innere Anknüpfungsp.

Sei π ein u - v -Pfad in P .

Betrachte Kreis $C' := C + \pi - \gamma \Rightarrow \gamma$ ist Teilstück bzgl. C' .

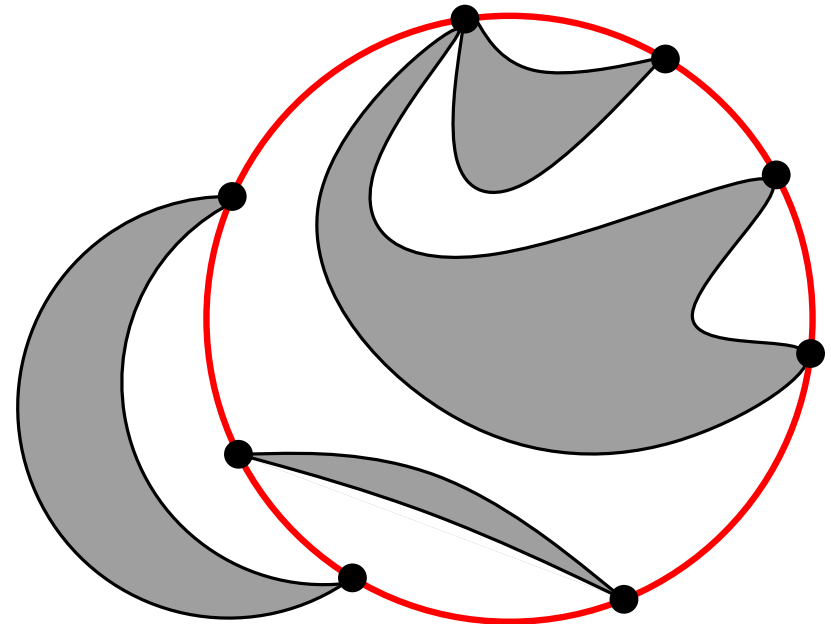
Falls P kein Pfad ist, existiert eine Kante $e \in E(P) \setminus E(\pi)$.

Teilstück δ , das e enthält, ist verschieden von $\gamma \Rightarrow C'$ sep. \square



Einander störende Teilstücke

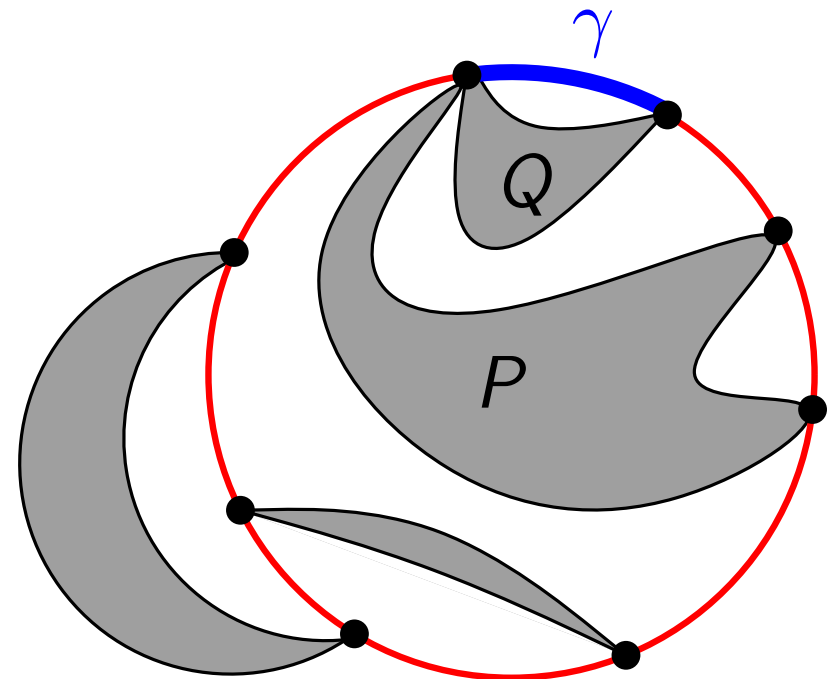
G planar \Rightarrow jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C eingebettet.



Einander störende Teilstücke

G planar \Rightarrow jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C eingebettet.

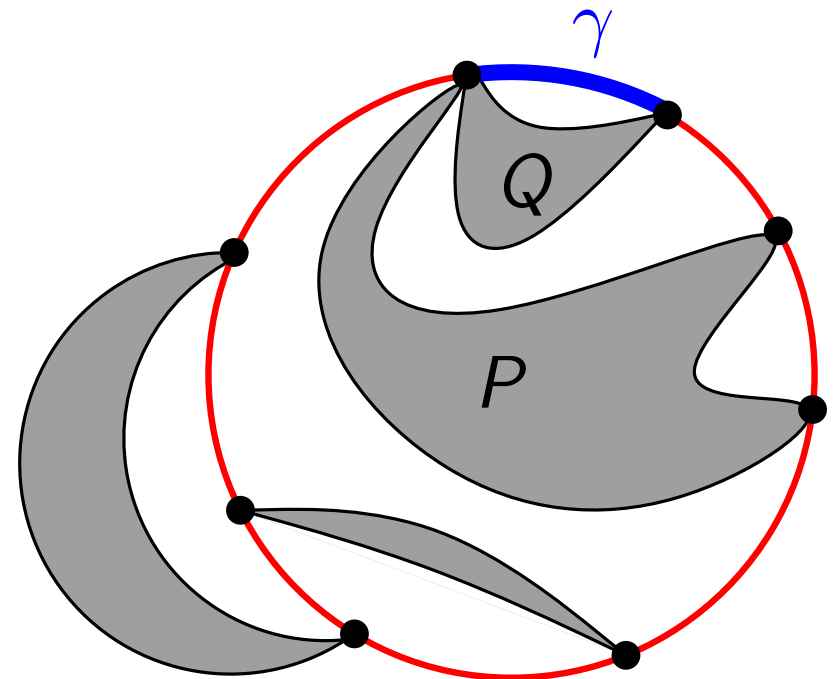
Beob. Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden \Leftrightarrow



Einander störende Teilstücke

G planar \Rightarrow jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C eingebettet.

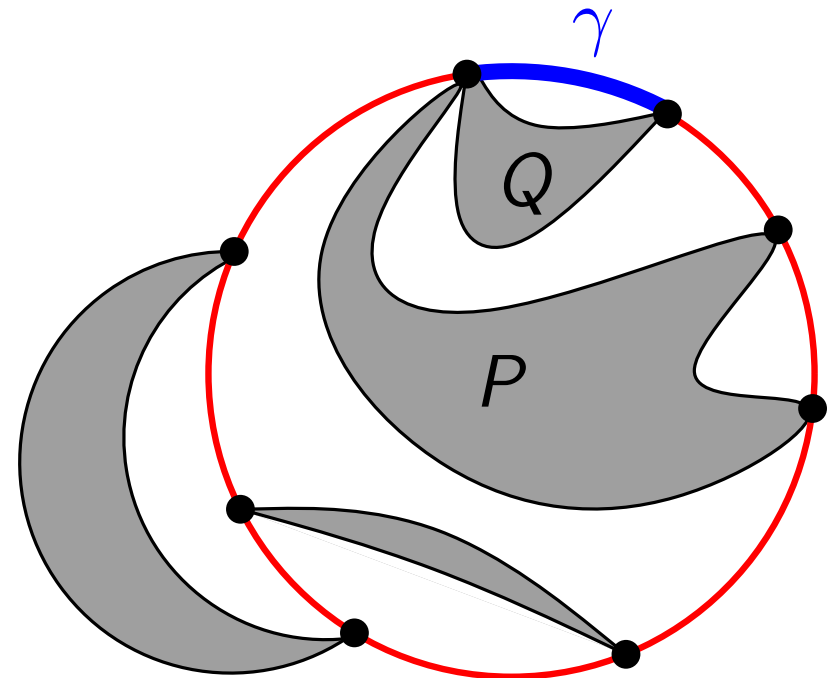
Beob. Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden \Leftrightarrow es existiert ein Teilpfad γ von C , so dass



Einander störende Teilstücke

G planar \Rightarrow jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C eingebettet.

Beob. Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden \Leftrightarrow es existiert ein Teilpfad γ von C , so dass γ alle Anküpfungspunkte von Q enthält, aber kein innerer Knoten von γ Anküpfungspunkt von P ist.

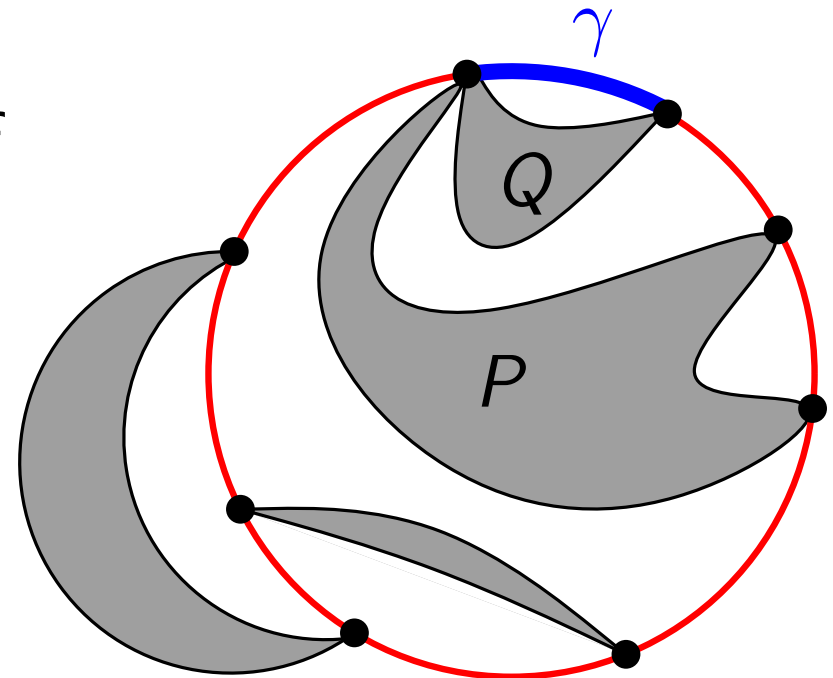


Einander störende Teilstücke

G planar \Rightarrow jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C eingebettet.

Beob. Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden \Leftrightarrow es existiert ein Teilpfad γ von C , so dass γ alle Anküpfungspunkte von Q enthält, aber kein innerer Knoten von γ Anküpfungspunkt von P ist.

Def. Zwei Teilstücke, die nicht auf der gleichen Seite von C eingebettet werden können, *stören* einander.

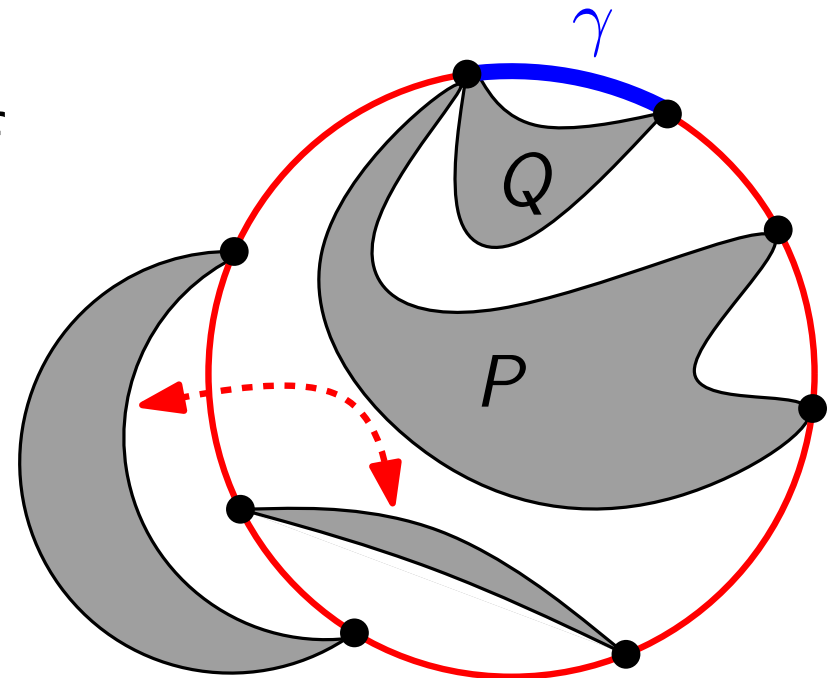


Einander störende Teilstücke

G planar \Rightarrow jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C eingebettet.

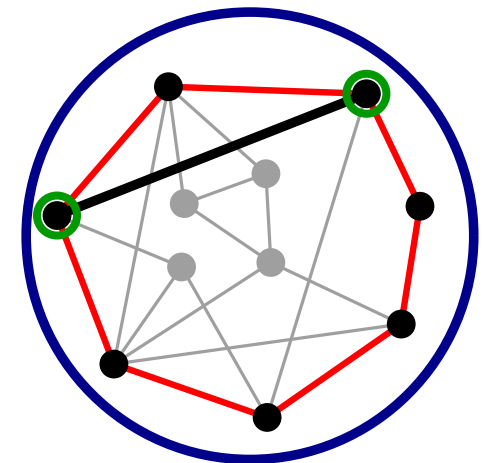
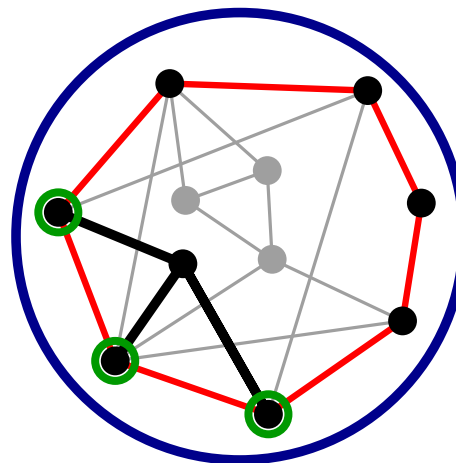
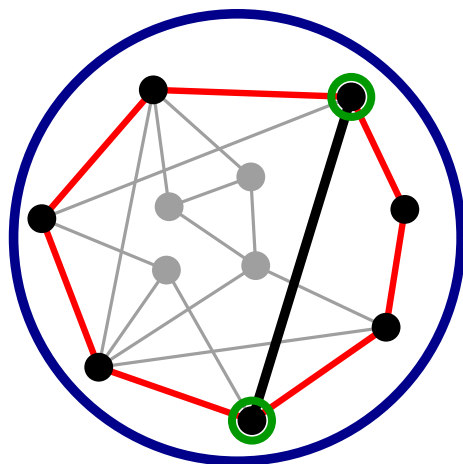
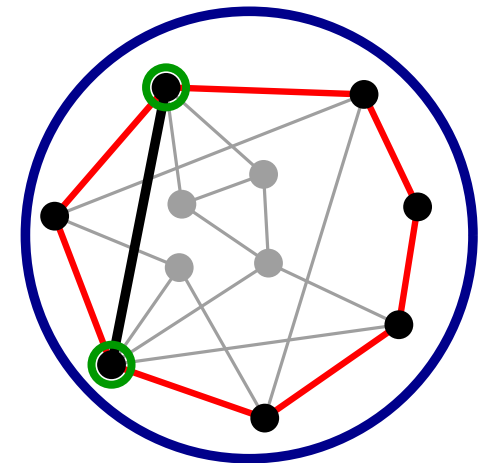
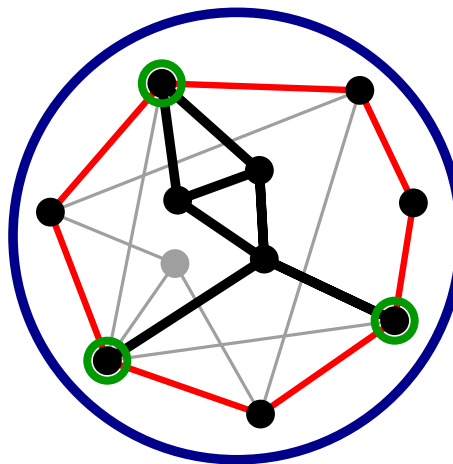
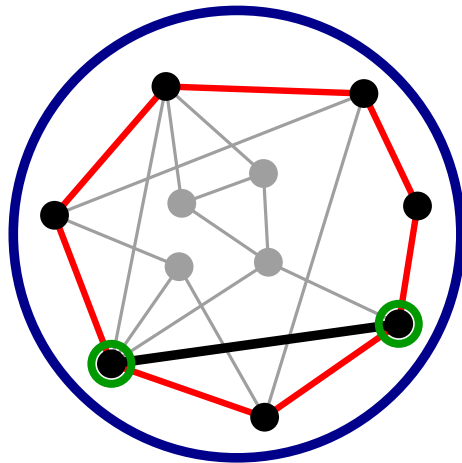
Beob. Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden \Leftrightarrow es existiert ein Teilpfad γ von C , so dass γ alle Anküpfungspunkte von Q enthält, aber kein innerer Knoten von γ Anküpfungspunkt von P ist.

Def. Zwei Teilstücke, die nicht auf der gleichen Seite von C eingebettet werden können, *stören* einander.



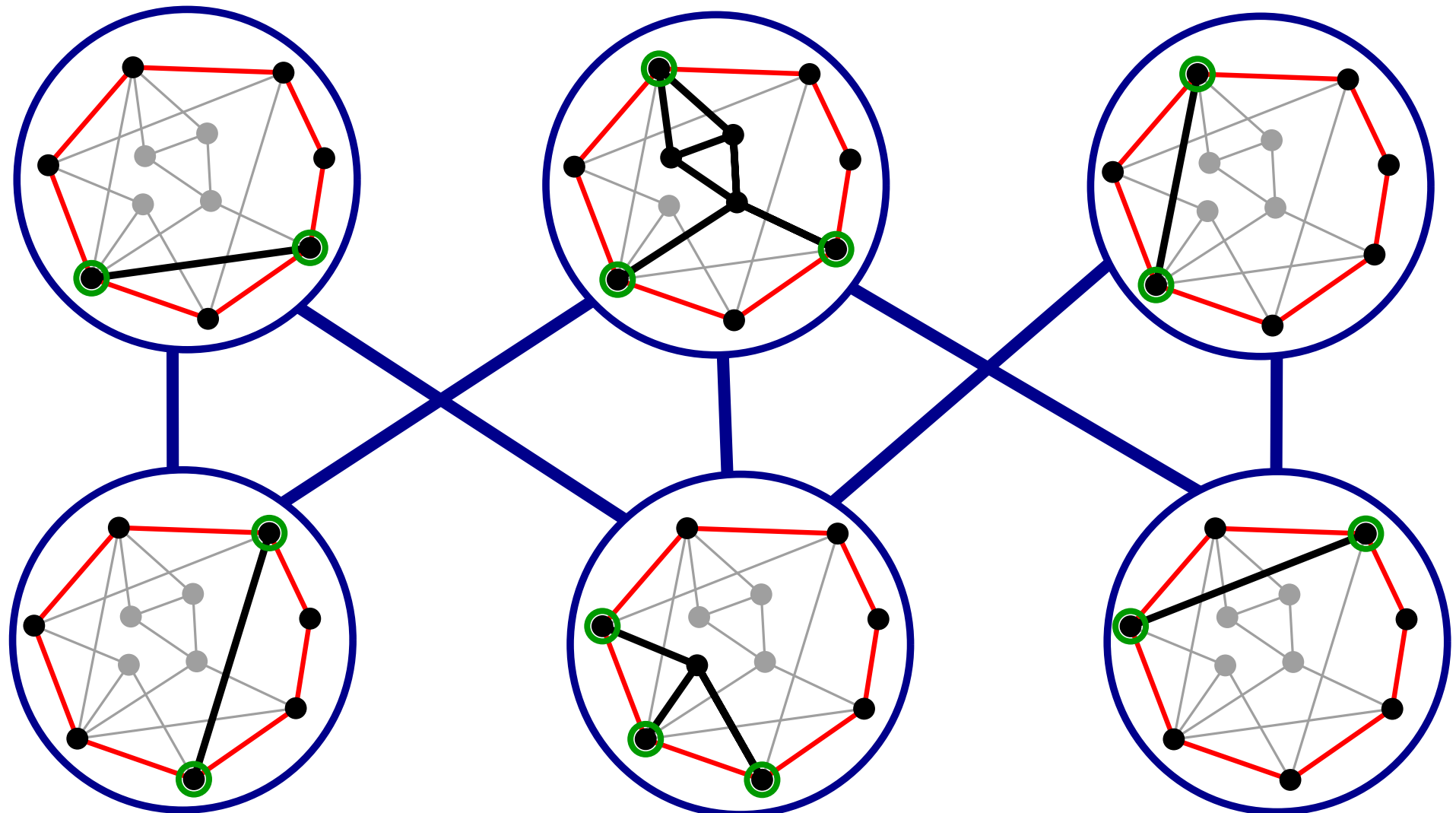
Störgraph

Def. Der *Störgraph* I (bezüglich C) hat als Knoten die Teilstücke. Zwei Teilstücke sind adjazent genau dann, wenn sie einander stören.



Störgraph

Def. Der *Störgraph* I (bezüglich C) hat als Knoten die Teilstücke. Zwei Teilstücke sind adjazent genau dann, wenn sie einander stören.



Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

(i)

(ii)

Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i)
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung.

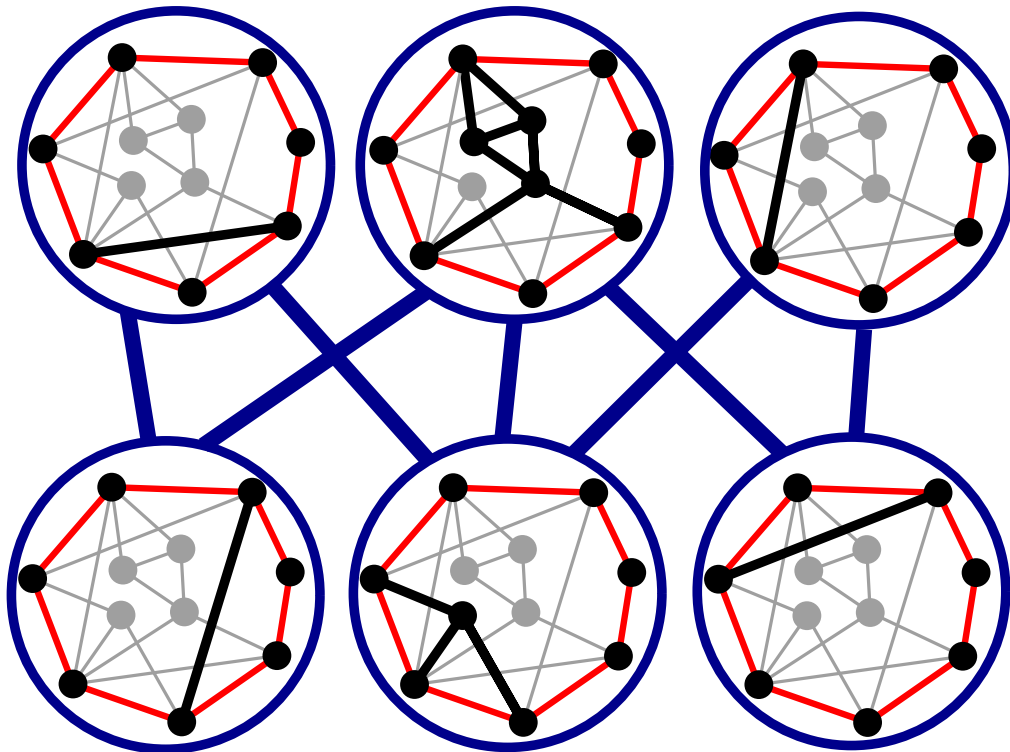


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

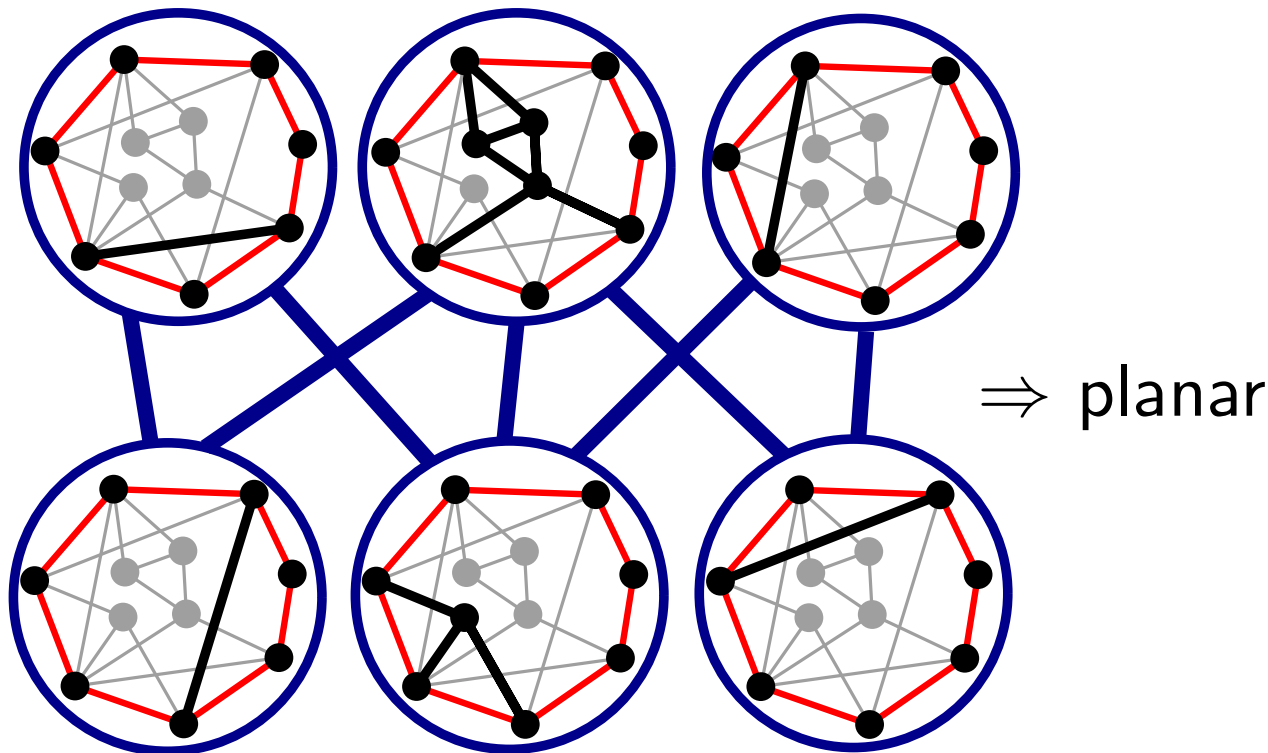


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

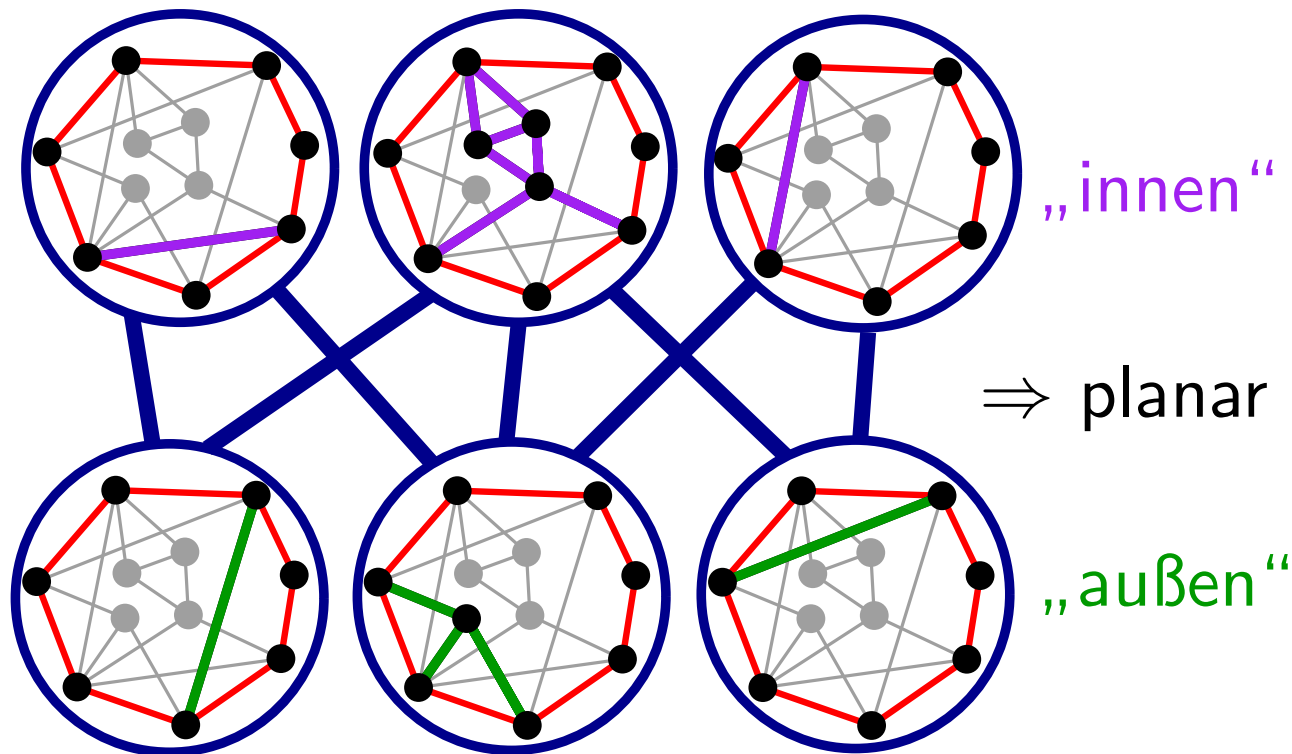


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

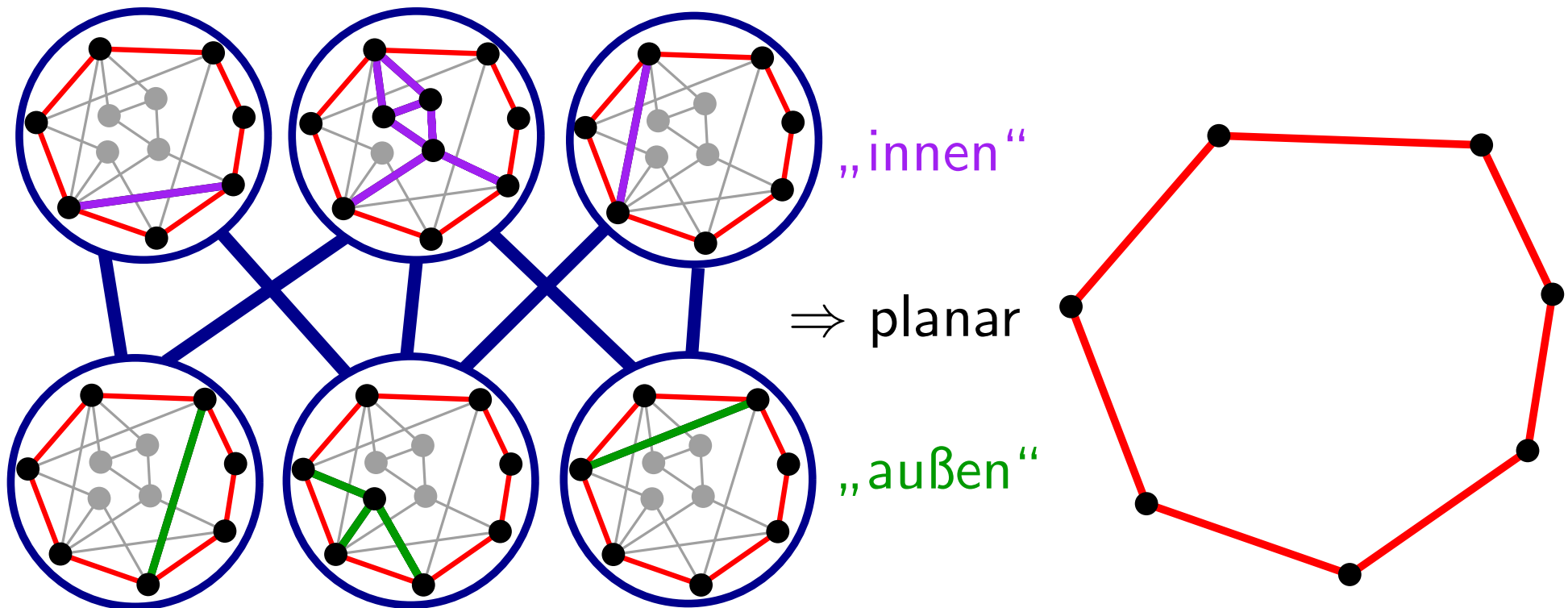


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

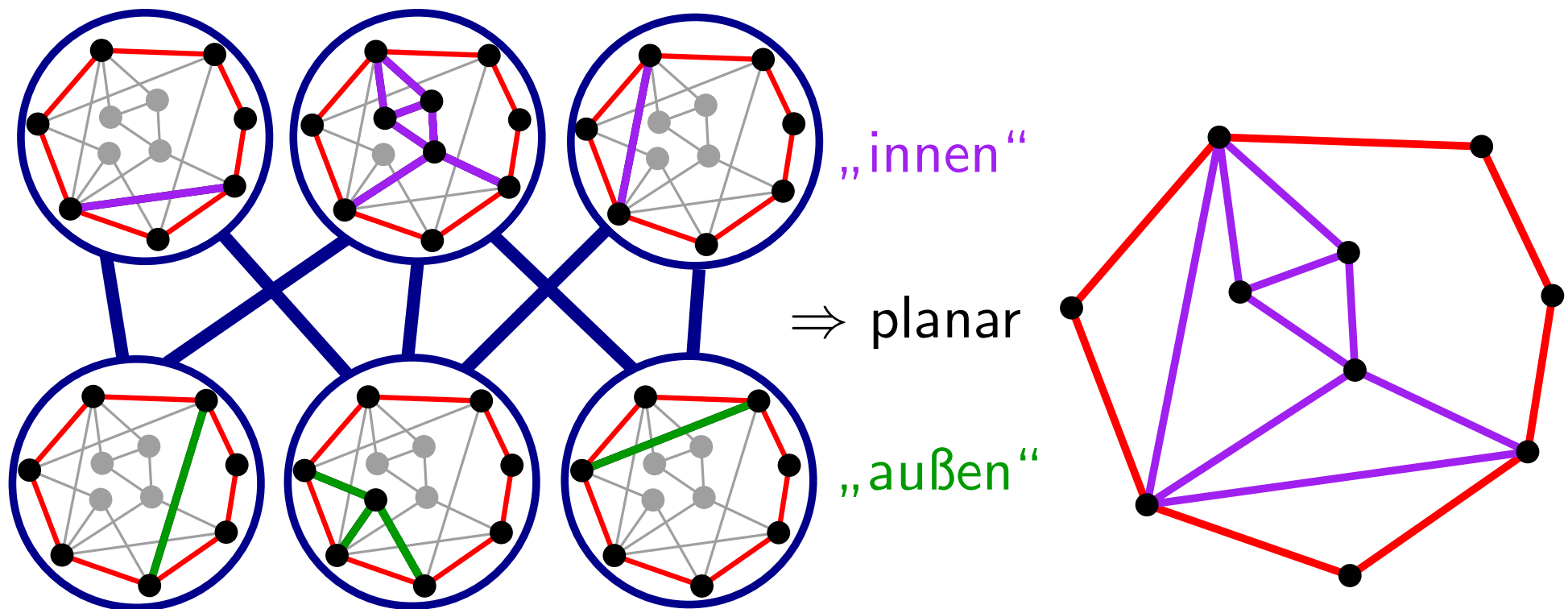


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

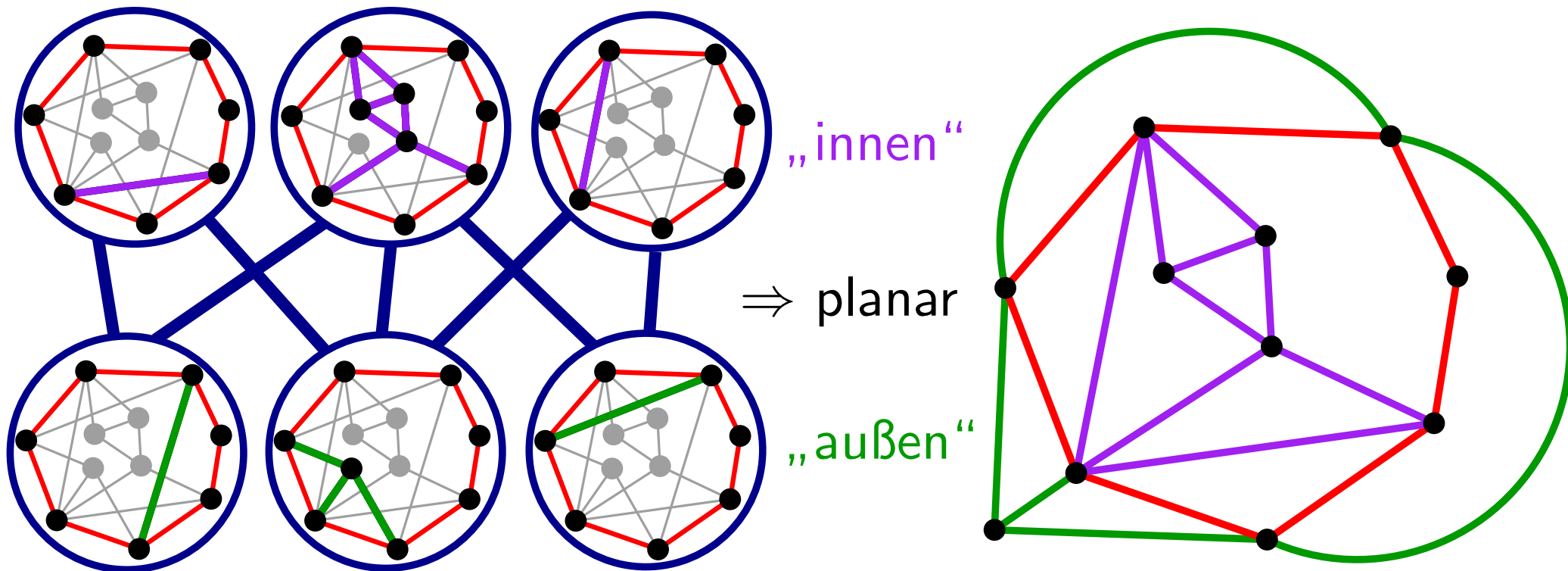


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

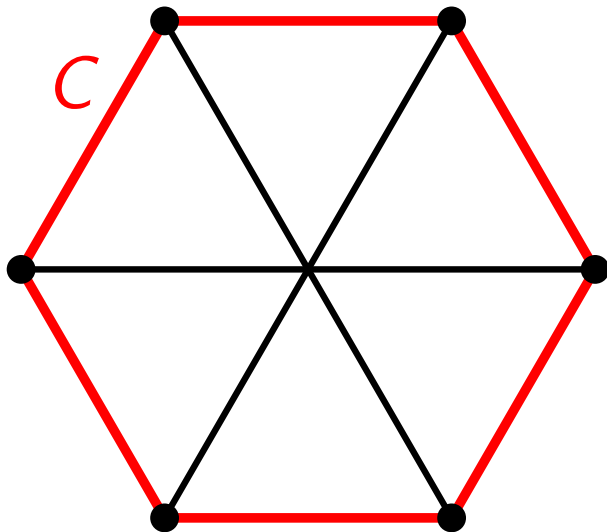


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

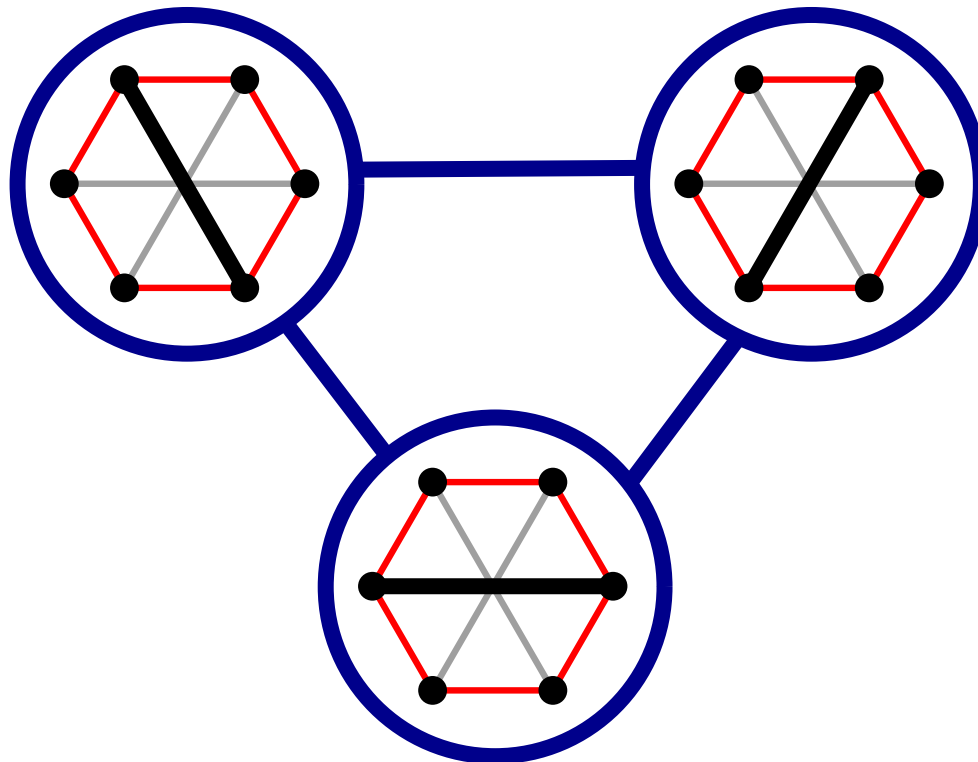
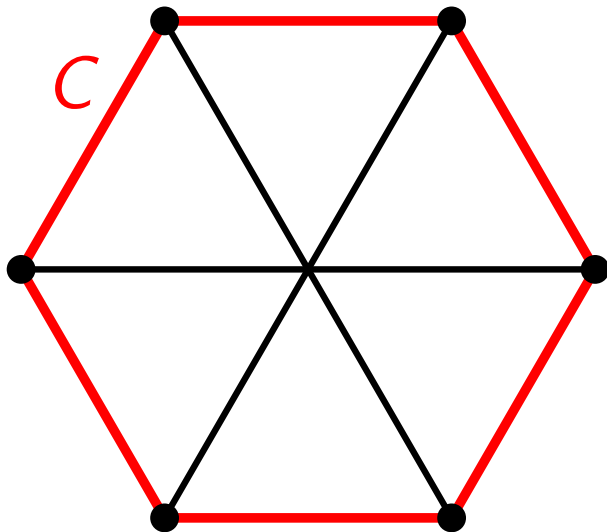


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □

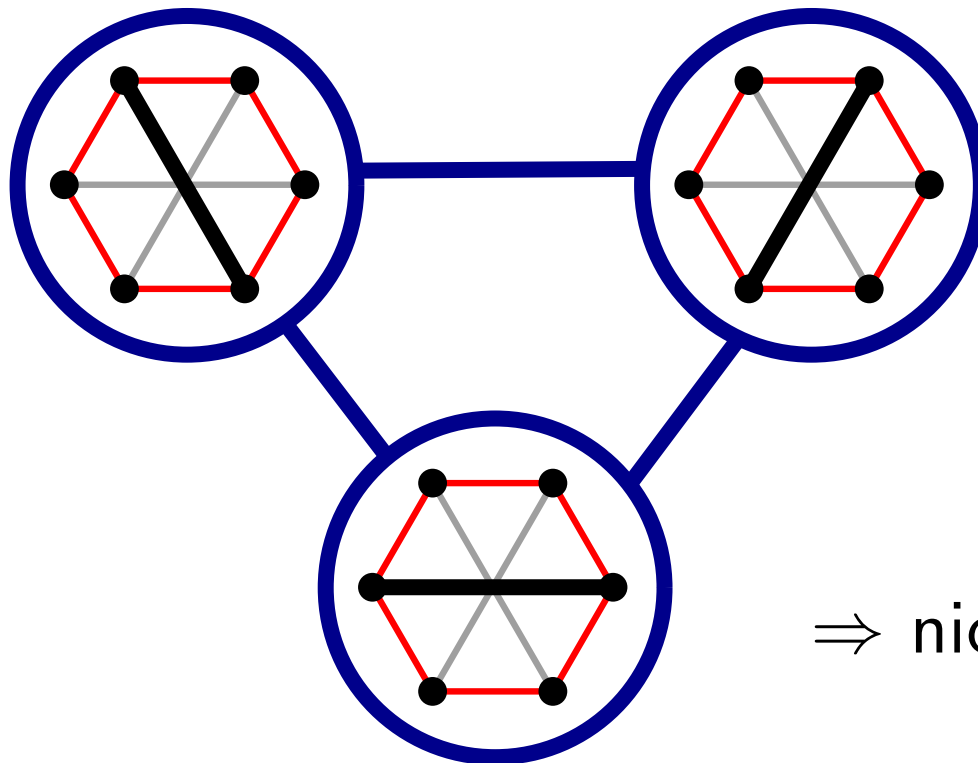
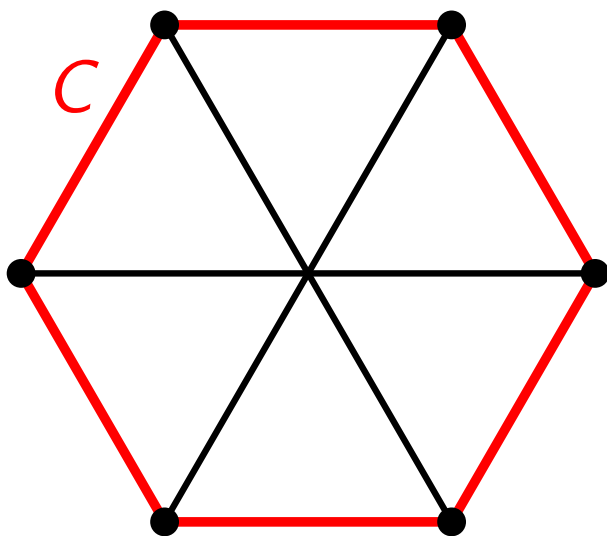


Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

Beweis. Übung. □



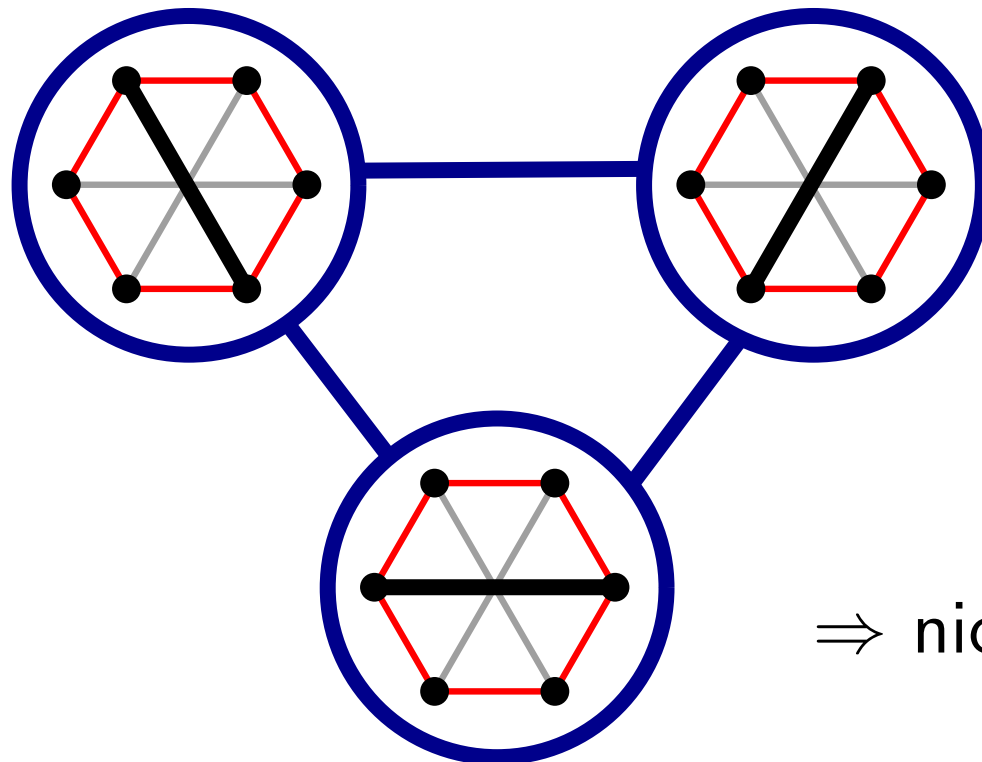
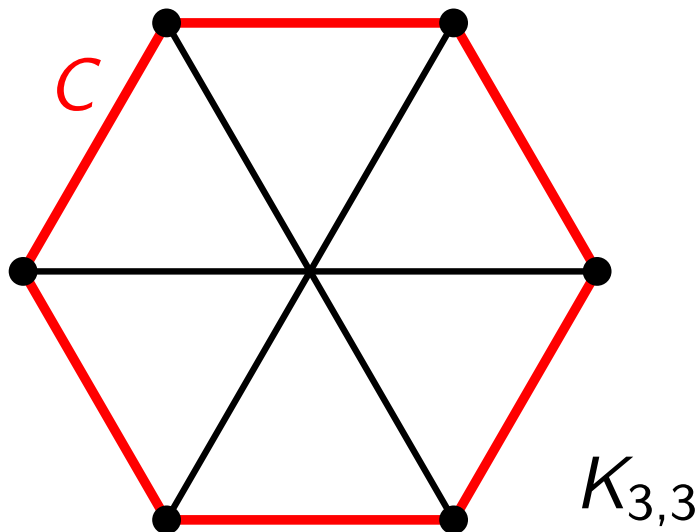
\Rightarrow nicht planar!

Bipartiter Störgraph

Lem₂. Sei G ein Graph mit separierendem Kreis C und Störgraphen I . Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- (i) für jedes Teilstück P der Graph $C + P$ planar und
- (ii) der Störgraph I bipartit ist.

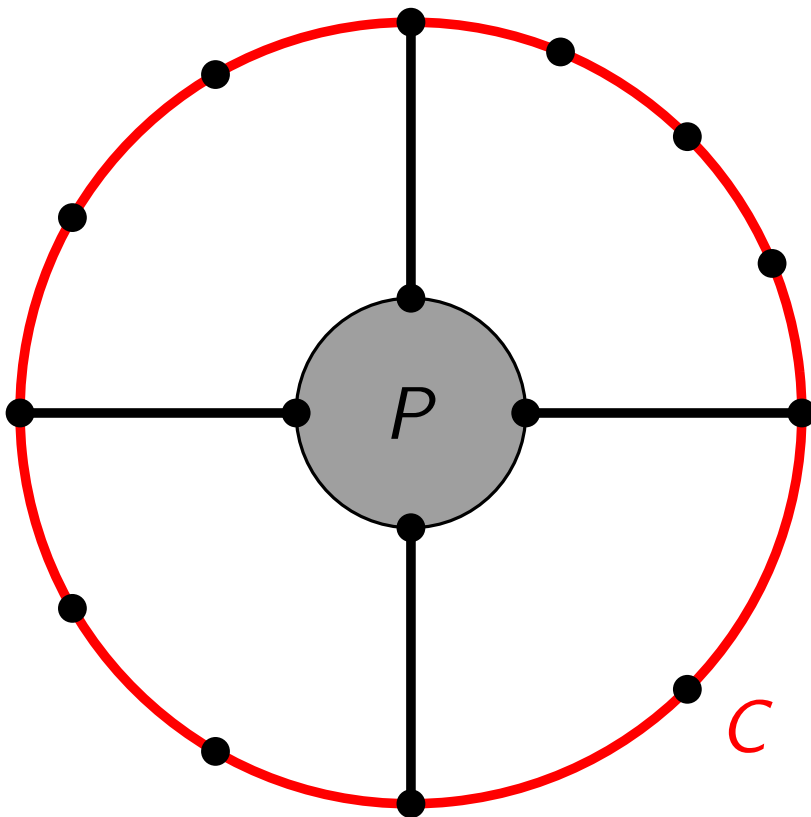
Beweis. Übung. □



⇒ nicht planar!

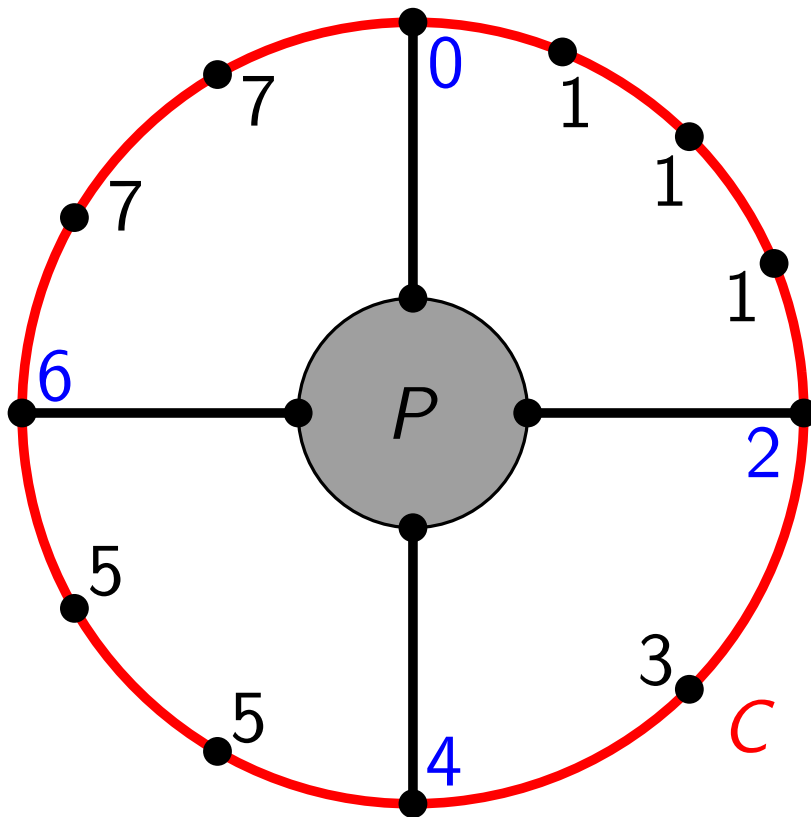
Berechnung Störgraph

Beob. Die Nachbarn eines Teilstücks P im Störgraphen lassen sich in $O(n)$ Zeit bestimmen, wenn die Teilstücke bekannt sind.



Berechnung Störgraph

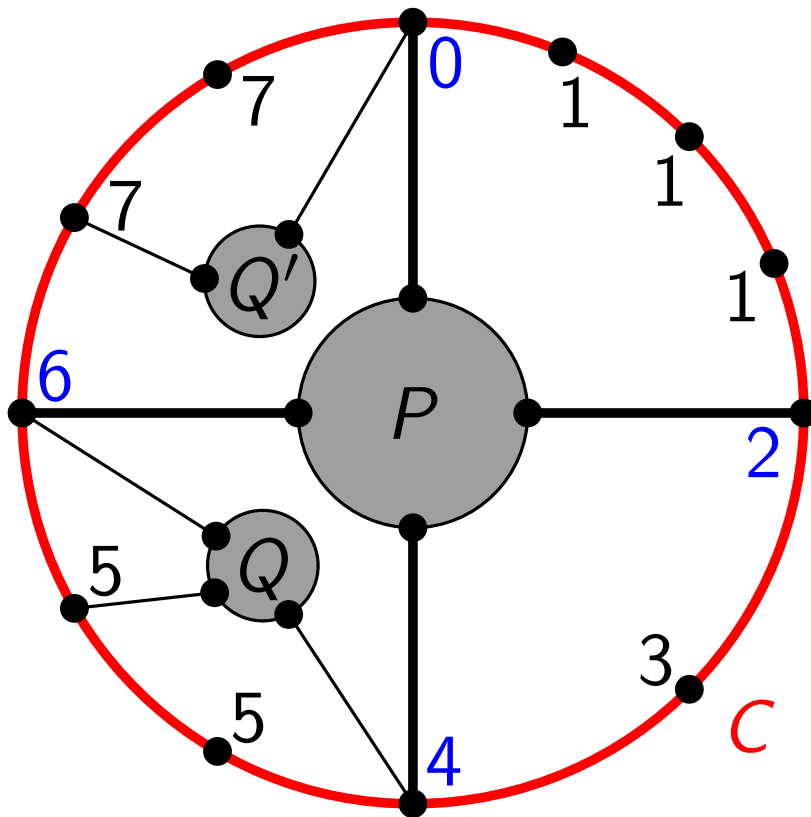
Beob. Die Nachbarn eines Teilstücks P im Störgraphen lassen sich in $O(n)$ Zeit bestimmen, wenn die Teilstücke bekannt sind.



Nummeriere Knoten von C mit Nummern $\{0, \dots, 2k - 1\}$ wie abgebildet.

Berechnung Störgraph

Beob. Die Nachbarn eines Teilstücks P im Störgraphen lassen sich in $O(n)$ Zeit bestimmen, wenn die Teilstücke bekannt sind.



Nummeriere Knoten von C mit Nummern $\{0, \dots, 2k - 1\}$ wie abgebildet.

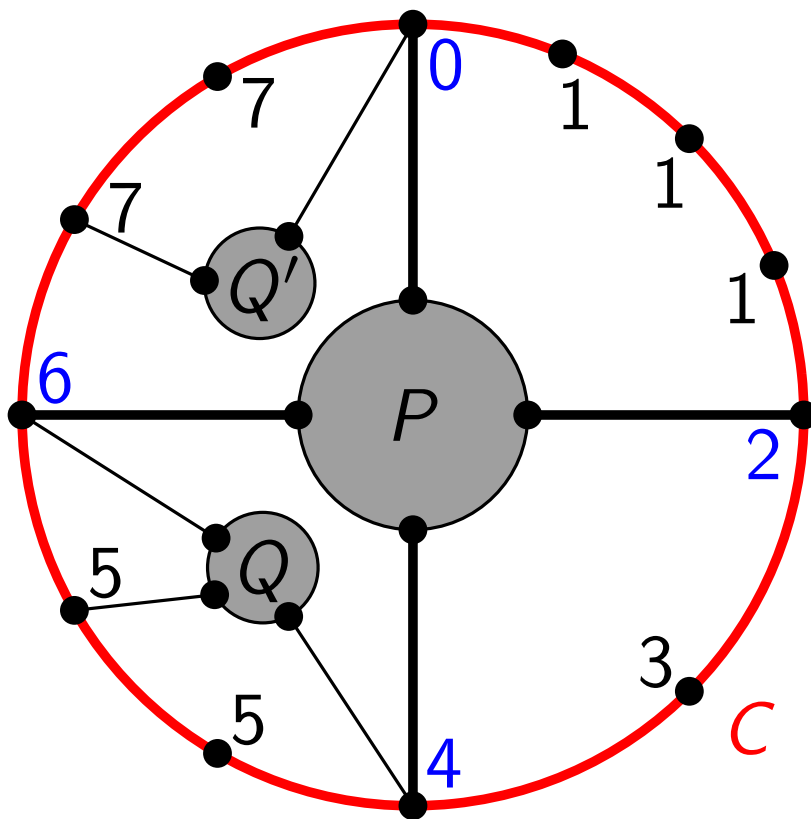
Teilstück Q stört P *nicht* \Leftrightarrow alle Anknüpfungspunkte von Q liegen in einem Intervall der Art

$$[2i, 2i + 2 \bmod (2k + 2)]$$

Berechnung Störgraph

Beob. Die Nachbarn eines Teilstücks P im Störgraphen lassen sich in $O(n)$ Zeit bestimmen, wenn die Teilstücke bekannt sind.

Der Störgraph lässt sich so in $O(n^2)$ Zeit aufbauen.



Nummeriere Knoten von C mit Nummern $\{0, \dots, 2k - 1\}$ wie abgebildet.

Teilstück Q stört P *nicht* \Leftrightarrow alle Anknüpfungspunkte von Q liegen in einem Intervall der Art

$$[2i, 2i + 2 \bmod (2k + 2)]$$

Planaritätstest – Übersicht

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Berechne Störgraphen $/$

if $/$ bipartit **then**

return true

else

return false

Planaritätstest – Übersicht

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Baut nicht-sep. Kreis C
in sep. Kreis C' um.

Berechne Störgraphen $/$

if $/$ bipartit **then**

return true

else

return false

Planaritätstest – Übersicht

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Baut nicht-sep. Kreis C
in sep. Kreis C' um.

Berechne Störgraphen $/$

if $/$ bipartit **then**

return true

else

return false

Korrektheit?

Planaritätstest

Übung:

Falls G keinen separierenden Kreis hat, ist G planar.

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Baut nicht-sep. Kreis C
in sep. Kreis C' um.

Berechne Störgraphen $/$

if $/$ bipartit **then**

return true

else

return false

Korrektheit?

Planaritätstest

Übung:

Falls G keinen separierenden Kreis hat, ist G planar.

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Berechne Störgraphen $/$

if $/$ bipartit **then**

return true

else

return false

Übung:

G' ist zweifach
zusammenhängend.

Baut nicht-sep. Kreis C
in sep. Kreis C' um.

Korrektheit?

Planaritätstest

Übung:

Falls G keinen separierenden Kreis hat, ist G planar.

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Berechne Störgraphen I

if I bipartit **then**

return true

else

return false

Übung:

G' ist zweifach zusammenhängend.

Baut nicht-sep. Kreis C in sep. Kreis C' um.

Korrektheit? Per Induktion über $|E(G)|$ mit Hilfe von Lem₂.

Planaritätstest

Übung:

Falls G keinen separierenden Kreis hat, ist G planar.

PlanarityTest(zweifach-zsghd. Graph G , separ. Kreis C)

Berechne Teilstücke bzgl. C

foreach Teilstück P , das kein Pfad ist **do**

$G' := C + P$

$C' := C - \gamma + \pi$ wie in Lem₁

if PlanarityTest(G' , C') == false **then**

return false

Berechne Störgraphen I

if I bipartit **then**

return true

else

return false

Übung:

G' ist zweifach zusammenhängend.

Baut nicht-sep. Kreis C in sep. Kreis C' um.

Sei G ein Graph mit sep. Kreis C und Störgraphen I . Dann ist G planar \Leftrightarrow
 (i) für jedes Teilstück P ist $C + P$ planar,
 (ii) I ist bipartit.

Korrektheit? Per Induktion über $|E(G)|$ mit Hilfe von Lem₂.

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in $O(n)$ Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf C werden nicht exploriert).

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in $O(n)$ Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf C werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in $O(n^2)$ Zeit.

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in $O(n)$ Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf C werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in $O(n^2)$ Zeit.

\Rightarrow Jeder Aufruf (ohne Rek.) in $O(n^2)$ Zeit.

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in $O(n)$ Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf C werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in $O(n^2)$ Zeit.

\Rightarrow Jeder Aufruf (ohne Rek.) in $O(n^2)$ Zeit.

Beh. Anz. der Aufrufe (nicht nur der Teilstücke!) ist $\leq |E(G)|$.

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in $O(n)$ Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf C werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in $O(n^2)$ Zeit.

\Rightarrow Jeder Aufruf (ohne Rek.) in $O(n^2)$ Zeit.

Beh. Anz. der Aufrufe (nicht nur der Teilstücke!) ist $\leq |E(G)|$.

Beweis folgt auf der nächsten Folie!

Laufzeit

Falls G mehr als $3n - 6$ Kanten hat, ist G nicht planar.

Also können wir davon ausgehen, dass G $O(n)$ Kanten hat.

Berechnung der Teilstücke in $O(n)$ Zeit durch Modifikation von BFS (Knoten auf C werden nicht exploriert).

Berechnung des Störgraphen in $O(n^2)$ Zeit.

\Rightarrow Jeder Aufruf (ohne Rek.) in $O(n^2)$ Zeit.

Beh. Anz. der Aufrufe (nicht nur der Teilstücke!) ist $\leq |E(G)|$.

Beweis folgt auf der nächsten Folie!

\Rightarrow Gesamtlaufzeit $O(n^3)$



Anzahl der rekursiven Aufrufe

Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

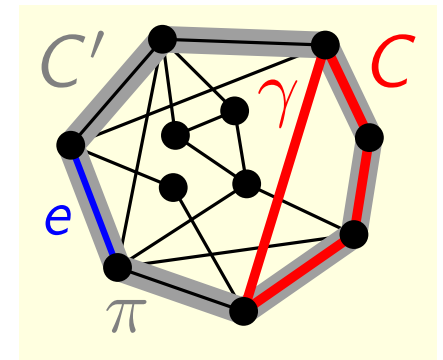
Anzahl der rekursiven Aufrufe

Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
   $G' := C + P$ 
   $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
  if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
...
  
```



Anzahl der rekursiven Aufrufe

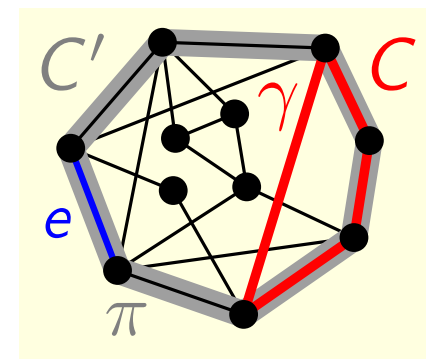
Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...
  
```



Anzahl der rekursiven Aufrufe

Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

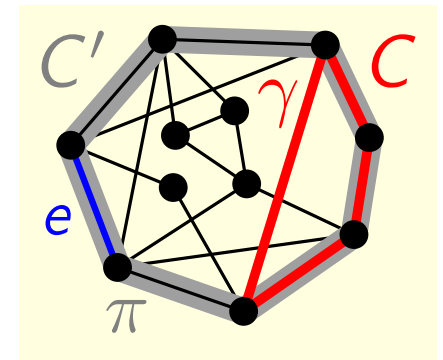
Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...

```



1. Beob. $e_P \in \pi \subset P$

Anzahl der rekursiven Aufrufe

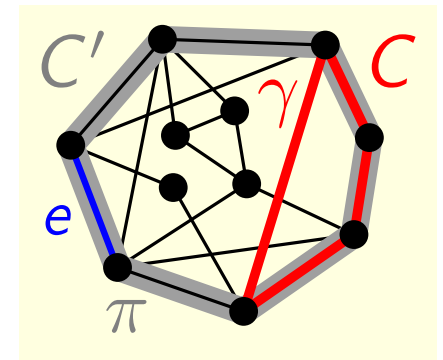
Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...
  
```



1. Beob. $e_P \in \pi \subset P$
 $\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$ für jedes Teilstück $P' \neq P$ von G .

Anzahl der rekursiven Aufrufe

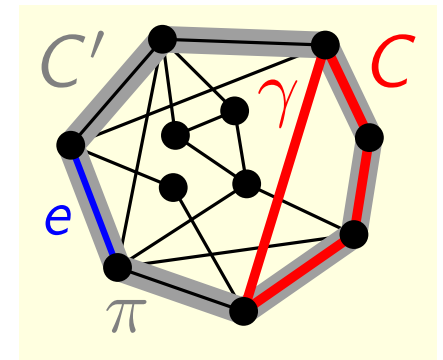
Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...
  
```



1. Beob. $e_P \in \pi \subset P$

$\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$ für jedes Teilstück $P' \neq P$ von G .

2. Beob. e liegt immer auf dem *neuen* Stück π des sep. Kreises

Anzahl der rekursiven Aufrufe

Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

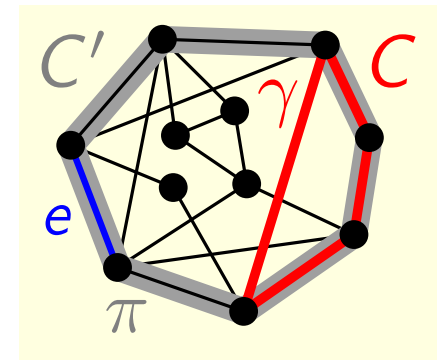
Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...

```



1. Beob. $e_P \in \pi \subset P$
 $\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$ für jedes Teilstück $P' \neq P$ von G .
2. Beob. e liegt immer auf dem *neuen* Stück π des sep. Kreises
 Frühere Kanten e liegen auf $C \cap C'$ oder auf γ .

Anzahl der rekursiven Aufrufe

Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

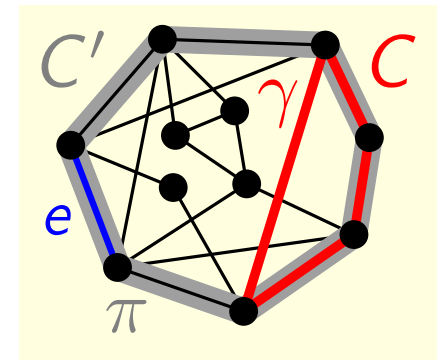
Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...

```



1. Beob. $e_P \in \pi \subset P$
 $\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$ für jedes Teilstück $P' \neq P$ von G .
2. Beob. e liegt immer auf dem *neuen* Stück π des sep. Kreises
 Frühere Kanten e liegen auf $C \cap C'$ oder auf γ .

Altes Stück des sep. Kreises!

Anzahl der rekursiven Aufrufe

Beh. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist höchstens $|E(G)|$.

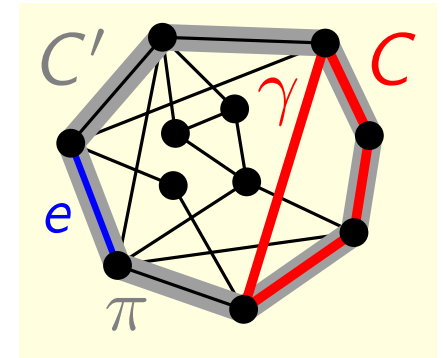
Beweis. Assoziiere mit **Aufruf** (G', C') eine Kante $e \in C' - C$.

Zeige: Keine Kante wird $2 \times$ assoziiert!

```

PlanarityTest( $G, C$ )
...
  foreach Nicht-Pfad-Teilstück  $P$  do
     $G' := C + P$ 
     $C' := C - \gamma + \pi$  //  $\pi \subset P$ 
    if PlanarityTest( $G', C'$ ) ...
  ...

```



1. Beob. $e_P \in \pi \subset P$
 $\Rightarrow e_P \neq e_{P'}$ für jedes Teilstück $P' \neq P$ von G .
2. Beob. e liegt immer auf dem *neuen* Stück π des sep. Kreises
 Frühere Kanten e liegen auf $C \cap C'$ oder auf γ .

Altes Stück des sep. Kreises!

Kein Teilstück –
wird in Rekursion ignoriert!