



Julius-Maximilians-

**UNIVERSITÄT  
WÜRZBURG**



# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

11. Vorlesung

## Planare Graphen

# Hauptklausur am Mi, 30. Juli

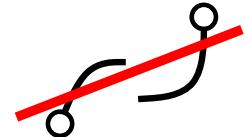
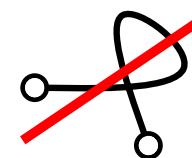
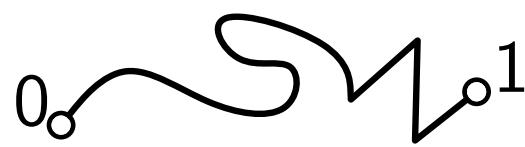
- Die Klausur findet 10:00–12:00 Uhr parallel in Turing- und Zuse-HS statt. (Details kommen kurz vorher per Email.)
- In WueStudy bis **15.07.** anmelden (sonst keine Teilnahme möglich).  
Falls Sie nicht teilnehmen werden, melden Sie sich bitte AB (damit wir weniger Klausuren drucken müssen).
- Die Nachklausur findet voraussichtlich am 2. Oktober statt.

# Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

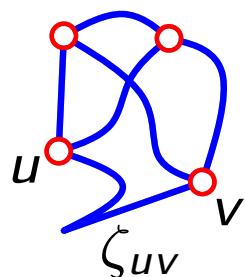
**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



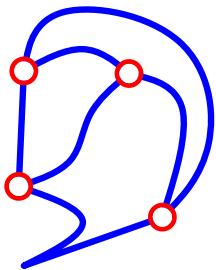
Sei  $G$  ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung  $\zeta$  heißt *Zeichnung* von  $G$ , falls



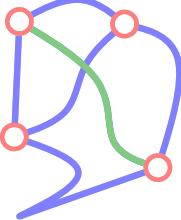
- für alle  $w \in V(G)$  gilt  $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$  (Knoten  $\mapsto$  Punkt)
  - für alle  $uv \in E(G)$  gilt  $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$  (Kante  $\mapsto$  J-Kurve)
- wobei  $\zeta_{uv}$  Jordankurve mit  $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$  und  $\zeta_{uv}(1) = \zeta(v)$ .

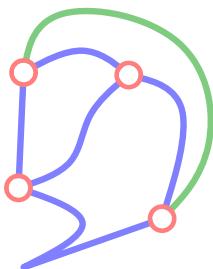
# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



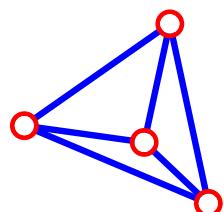
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben (kreuzungsfrei)*, falls  $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}([0, 1]) = \emptyset$ . d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

**Def.** Ein Graph  $G$  ist *planar (plättbar)*, falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B.  $G =$   planar, denn



ist eine ebene Zeichnung von  $G$ .



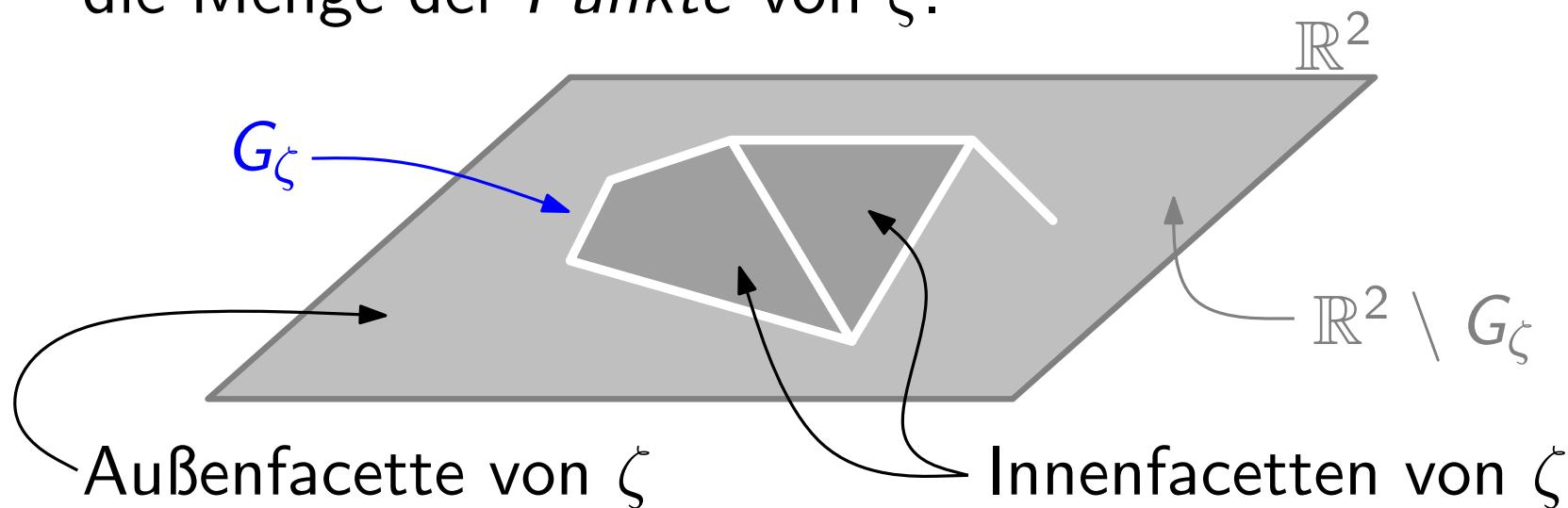
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *geradlinig*, falls für alle  $e \in E(G)$  gilt:  $\zeta_e$  ist linear (d.h.  $\zeta_e([0, 1])$  Strecke).

# Punkte und Facetten

**Def.** Für einen planaren Graphen  $G$  und eine ebene Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von  $\zeta$ .



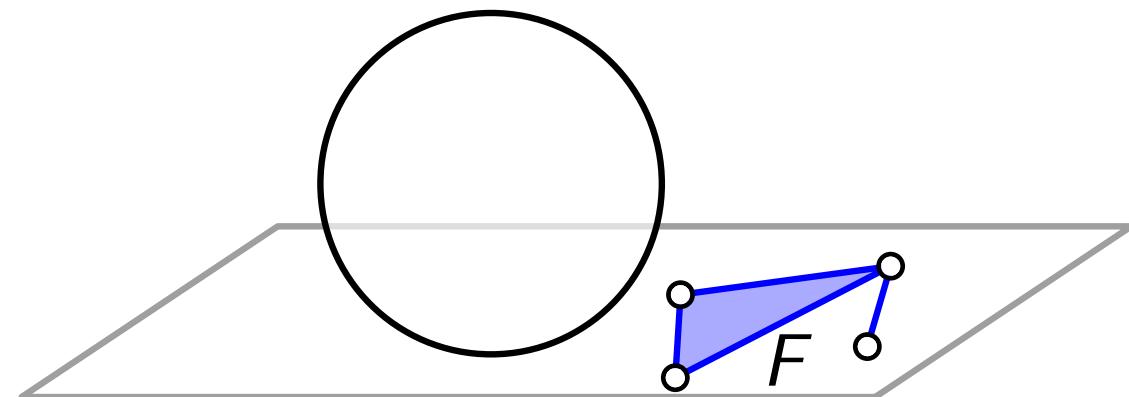
**Def.** Die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$  heißen *Facetten* von  $\zeta$ .

# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.**<sup>1</sup>  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Einheitssphäre  
im  $\mathbb{R}^3$

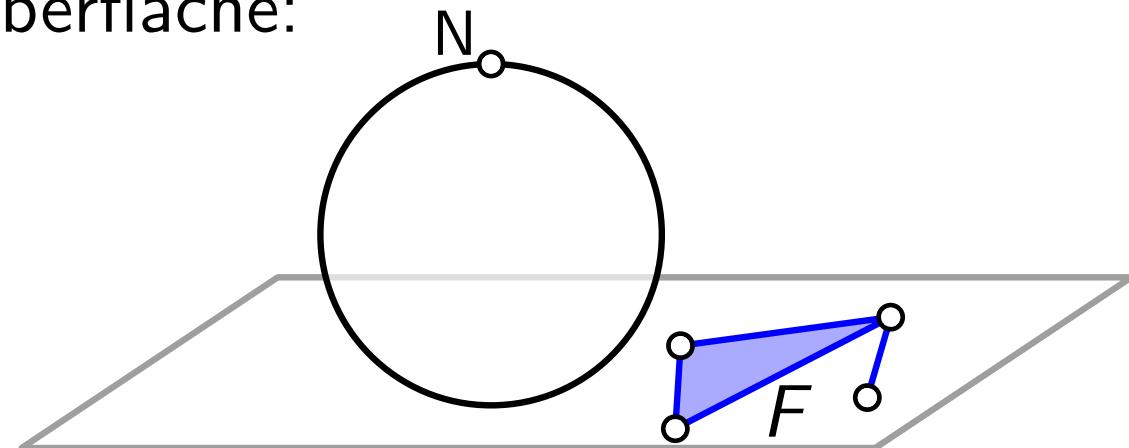


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.**<sup>1</sup>  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

höchster  
Punkt von  $S^2$

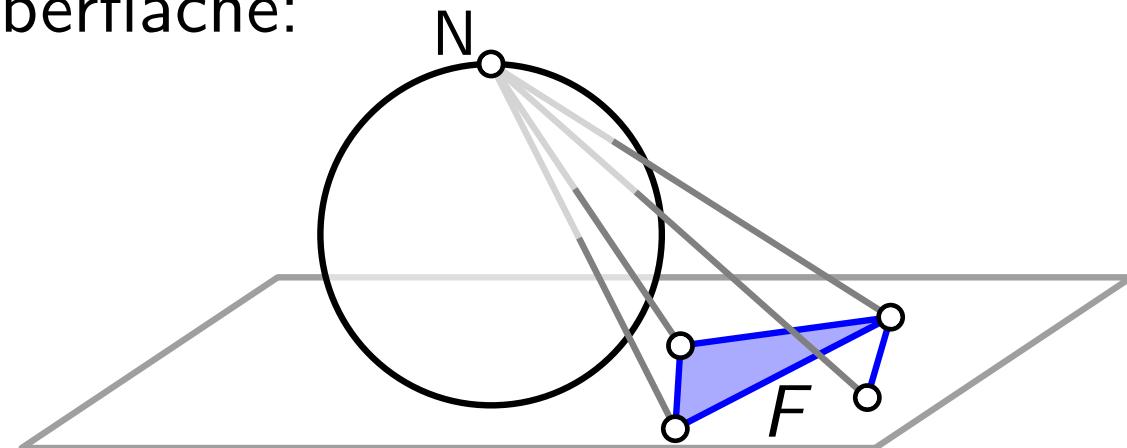


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.**<sup>1</sup>  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Zentralprojektion  
mit Zentrum  $N$  von  
 $S^2 \setminus \{N\}$  auf  $\mathbb{R}^2$

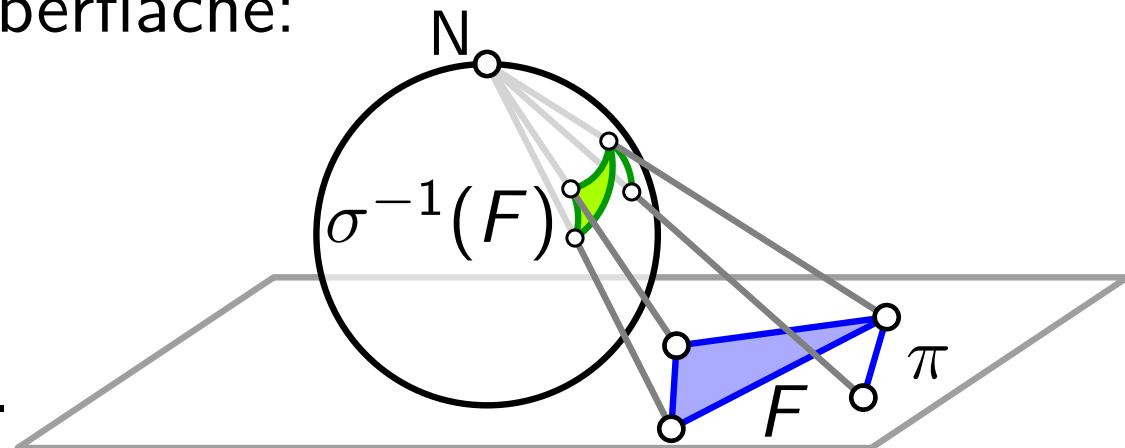


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.**<sup>1</sup>  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels  $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) die Kugel, so dass  $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$ .



Projiziere dann zurück in die Ebene.  
 $\Rightarrow$  Zeichnung von  $E(F)$  begrenzt die Außenfacette.  
 Zeichnung  $\pi_F = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} \circ \pi$  ist eben.

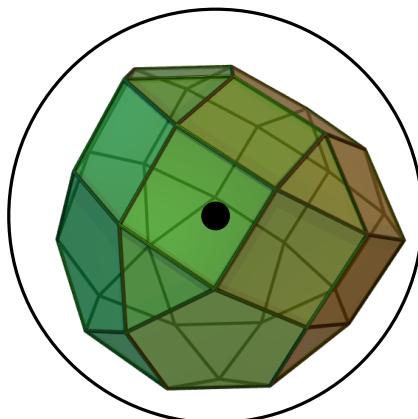
# Skelette sind planar

## Beob.<sup>2</sup>

Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

## Beweis.

Sei  $P$  konvexes, beschränktes Polyeder,  $o \in \text{Inn}(P)$ .



Sei  $S$  Kugel mit Zentrum  $o$ , so dass  $P \subset S$ .

Zentralprojektion  $\pi_o: P \rightarrow S$  liefert ebene Zeichnung  $\pi_S$  des Skeletts von  $P$  auf der Kugeloberfläche von  $S$ .

Wähle Nordpol  $N$ , so dass  $N \notin \pi_S$ .

Projiziere  $\pi_S$  mittels  $\sigma$  auf die Ebene.

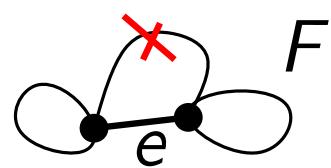
Ergebnis:  $\sigma \circ \pi_S$  ist eben.

# Schon wieder Euler . . .



## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$   
inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = \text{RS}_m.$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler . . .



## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

## Beweis.

Induktion über  $m$ .

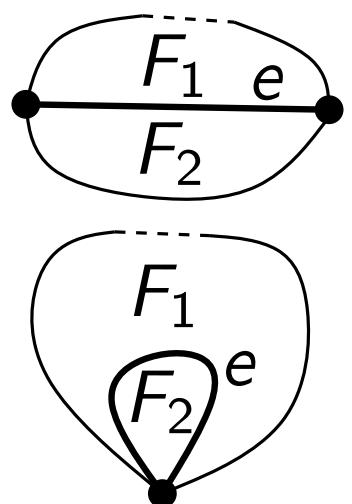
$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  ~~beidseitig zu gleicher Facette  $F$~~   
~~inzident zu Facetten  $F_1 \neq F_2$~~

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' + 1 = k + 1 = \text{RS}_m.$$

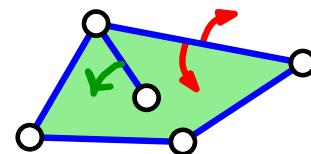
[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .] □



# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G$  mit  $n \geq 3$  Knoten und  $m$  Kanten gilt:  $m \leq 3n - 6$ ;  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

[da jede Facette eines *einfachen* Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls  $n \geq 3$  und  $m \geq 3$ ).]

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\xrightarrow{\text{Euler}} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

$$\Rightarrow f \leq 2n - 4$$

□

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G$  mit  $n \geq 3$  Knoten und  $m$  Kanten gilt:  $m \leq 3n - 6$ ;  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

**Beweis.** 
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

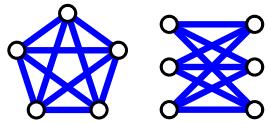
**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

**Beweis.** O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).  
 Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad  $\leq 5$ .  
 $2m = \sum_v \deg(v) \geq (n - 2) \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 6n - 10$ .  
*Widerspruch zu  $m \leq 3n - 6$  in planaren Graphen!* □

# Nicht planare Graphen

## Satz.

Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.



## Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad < \quad 20 = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f \quad \text{↯}$$

# Vorlesungsumfrage

Bitte nehmen Sie teil –

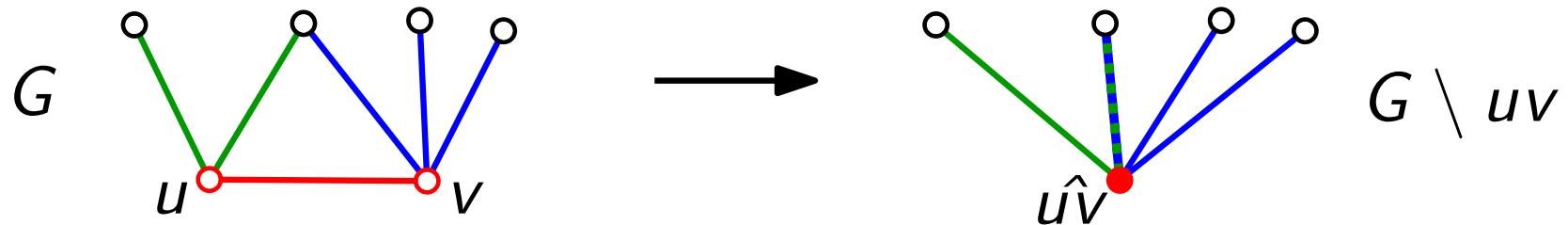
**JETZT!**

# Kontraktionen und Minoren

**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch *(Einfach-)Kontraktion* von  $uv$ .  
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte  
 Unterschied zur  
 Kontraktion  $G/U$   
 bei Multigraphen!

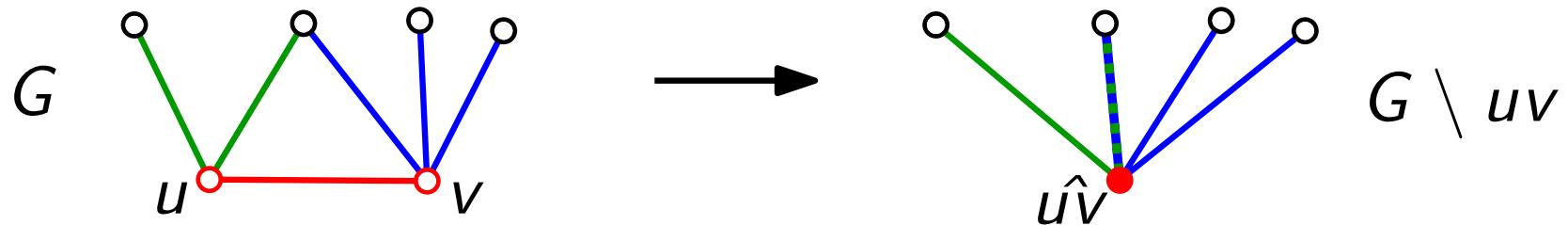


# Kontraktionen und Minoren

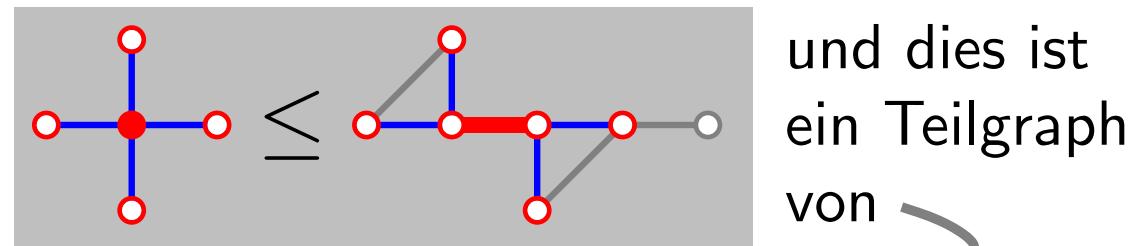
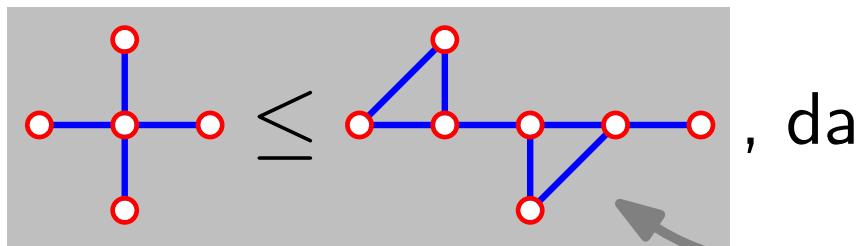
**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch *(Einfach-)Kontraktion* von  $uv$ .  
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte  
 Unterschied zur  
 Kontraktion  $G/U$   
 bei Multigraphen!



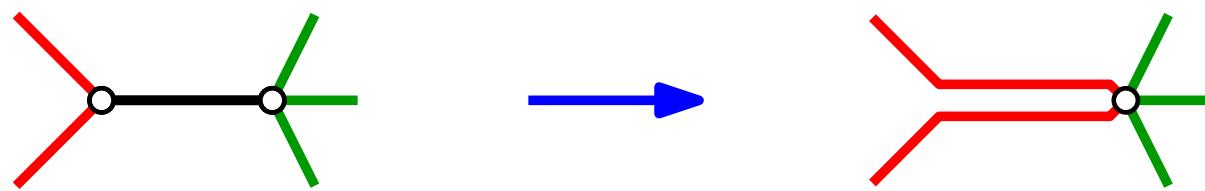
Ein Graph  $H$  heißt *Minor* von  $G$  (schreibe  $H \leq G$ ), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von  $G$  hervorgeht.



# Ein paar Beobachtungen

**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

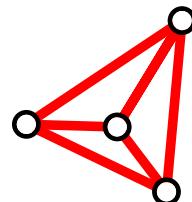
*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



„ $\Leftarrow$ “  $G$  ist Minor von  $G$  ( $G \leq G$ ). □

**Beob.<sup>4</sup>** Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

*Beweis.*  $K_4$ , also ist  $K_4$  planar  $\Rightarrow$  Beh. □



# Satz von Kuratowski

**Satz.** [Kuratowski 1930: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*]  
Sei  $G$  ein einfacher Graph. Dann gilt:  
 $G$  planar  $\Leftrightarrow$  weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  ist Minor von  $G$ .



Kazimierz Kuratowski  
Warschau 1896–1980 Warschau

# Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

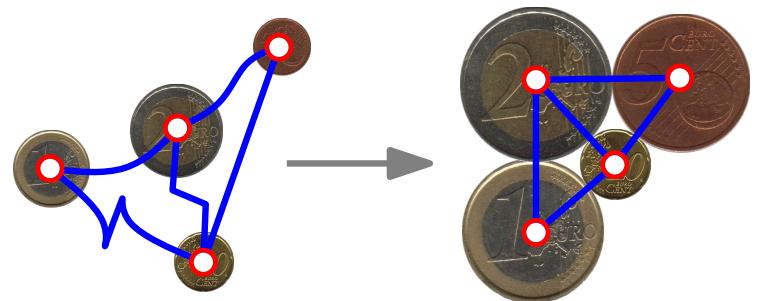
Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

**Satz.** [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]

Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

**Satz.** [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]

Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



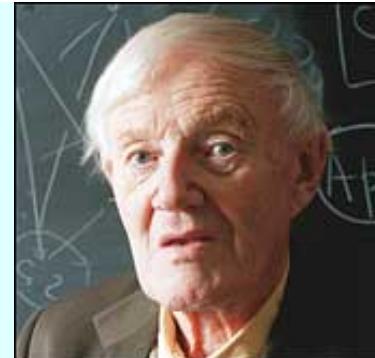
# Planare Graphen zeichnen

**Satz.** [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

William Thomas Tutte

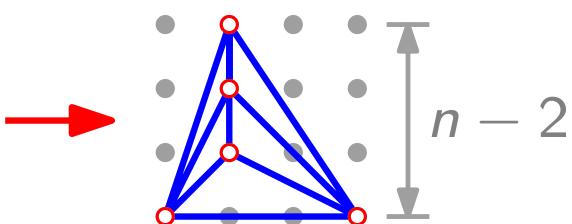
Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



**Satz.** [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des  $(n - 2) \times (n - 2)$  Gitters abgebildet werden.

$K_5 - 1$  Kante



# Noch mehr große Sätze

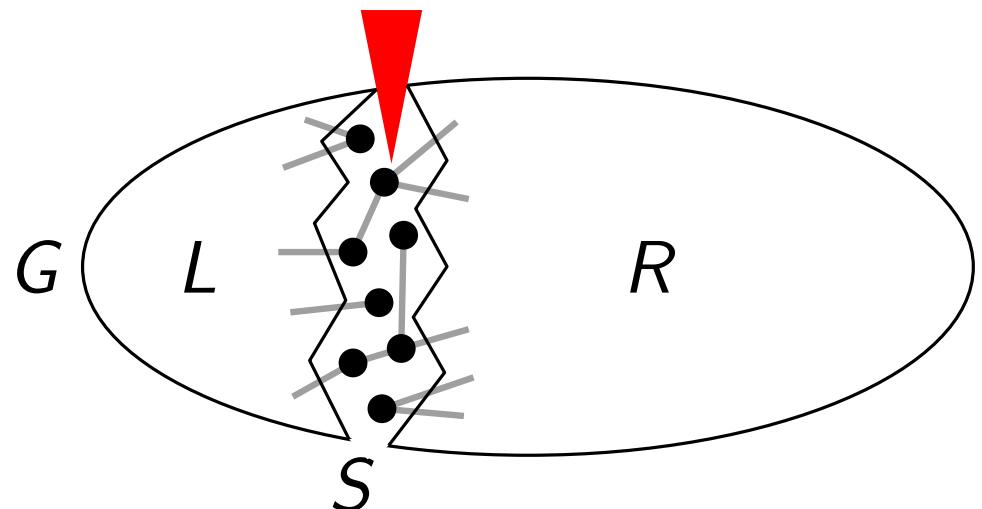
**Satz.** *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n \geq 5$  Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge  $V = L \cup S \cup R$  von  $G$ , so dass

- keine Kante zwischen  $L$  und  $R$  verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$  und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$ .

Eine solche Zerlegung kann in  $O(n)$  Zeit berechnet werden.



# Größte Matchings inkrementell

**Lemma.** Sei  $G$  ungerichteter Graph, sei  $v \in V(G)$  und sei  $M$  größtes Matching in  $G - v$ .

- (i) Falls  $G$  keinen augmentierenden Weg mit Endknoten  $v$  enthält, so ist  $M$  größtes Matching in  $G$ .
- (ii) Ansonsten sei  $W$  ein augmentierender Weg. Dann ist  $M \Delta E(W)$  größtes Matching in  $G$ .

Mit einer passenden Repräsentation eines größten Matchings in  $G - v$  kann man in  $O(|E(G)|)$  Zeit ein größtes Matching in  $G$  finden.

**Beweis.** Übung – jetzt!

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G$ )

```

if  $|V(G)| < 5$  then
|   return BruteForceMatching( $G$ )
else
|    $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante
|    $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
|    $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
|    $M = M_L \cup M_R$ 
|    $\bar{V} = L \cup R$ 
|   foreach  $v \in S$  do
|        $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
|        $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$ 
|   return  $M$ 

```

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

$M$  ist größtes Matching in  $G[\bar{V}]$

**Korrektheit?**

Hier  $\bar{V} = V(G) \Rightarrow G[\bar{V}] = G \Rightarrow M$  max. in  $G$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G$ )

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$T(n) =$  **Laufzeit?**  
Worst-Case-Laufzeit für  
Graphen mit  $|V(G)| = n$

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$O(n)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$T(|L|)$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$T(|R|)$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$O(\sqrt{n})$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

$\} O(n)$

**return**  $M$

$T(n) \leq \max \{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \}$

# Rekursions(un)gleichung lösen. . .

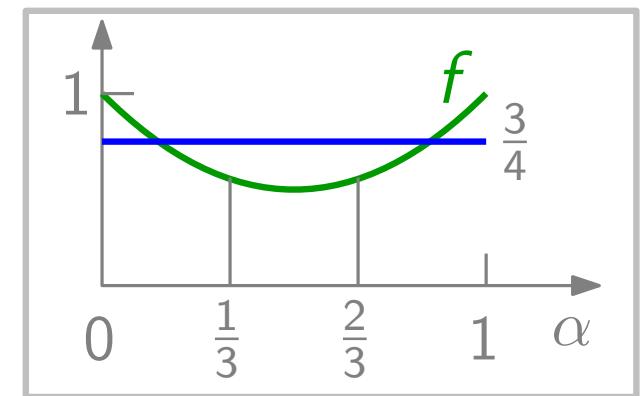
$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:



$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh.  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

Bew.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c'n^{3/2} \left( \underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1-\alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right) \\ &\leq c'n^{3/2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Nimm  $c' = 4c!$  □

# Ergebnis

**Satz.** In einem planaren Graphen mit  $n$  Knoten kann man in  $O(n^{3/2})$  Zeit ein größtes Matching finden.

*Zum Vergleich:*

$$n = |V(G)|, m = |E(G)|$$

## Größtes Matching

Bipartite Graphen	$O(m\sqrt{n})$	[Hopcroft & Karp, 1973]
Allgemeine Graphen	$O(m\sqrt{n})$	[Micali & Vazirani, 1980]

## Schwerstes Matching

Planare Graphen*	$O(n^{3/2} \log n)$	[Lipton & Tarjan, 1980]
Allgemeine Graphen	$O(mn \log n)$	[Gabow, 1975]

\* ) Das Lemma gilt entsprechend für den gewichteten Fall, allerdings mit Laufzeit  $O(m \log n)$  statt  $O(m)$ .