



Julius-Maximilians-

**UNIVERSITÄT
WÜRZBURG**



Lehrstuhl für
INFORMATIK I

Algorithmen & Komplexität

ifi
Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

11. Vorlesung

Planare Graphen

Hauptklausur am Mi, 30. Juli

- Die Klausur findet 10:00–12:00 Uhr parallel in Turing- und Zuse-HS statt. (Details kommen kurz vorher per Email.)
- In WueStudy bis **15.07.** anmelden (sonst keine Teilnahme möglich).
Falls Sie nicht teilnehmen werden, melden Sie sich bitte AB (damit wir weniger Klausuren drucken müssen).
- Die Nachklausur findet voraussichtlich am 2. Oktober statt.

Graphen zeichnen

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine *homöomorphe* Einbettung des Intervalls $[0, 1]$ in einen topologischen Raum.

Graphen zeichnen

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine *homöomorphe Einbettung* des Intervalls $[0, 1]$ in einen topologischen Raum.

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen topologischen Raum.

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene

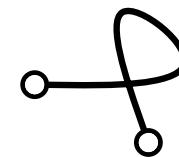


Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene

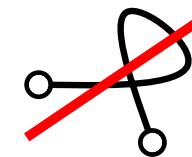
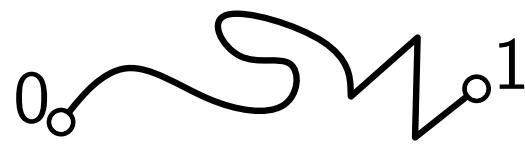


Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene

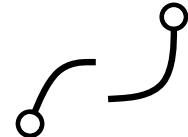
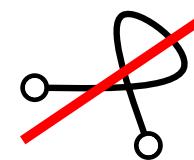
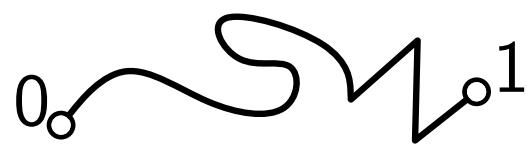


Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene

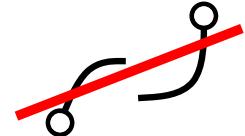
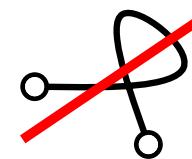
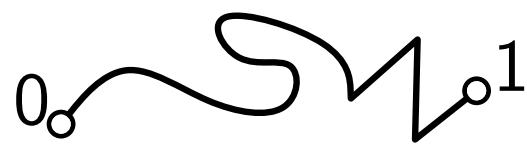


Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene

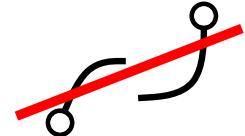
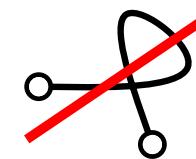


Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



Sei G ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls

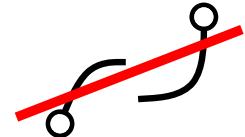
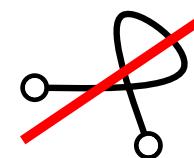


Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

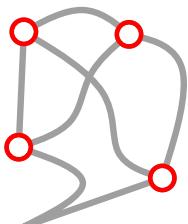
Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



Sei G ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls



– für alle $w \in V(G)$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$

(Knoten \mapsto Punkt)

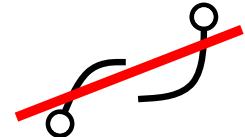
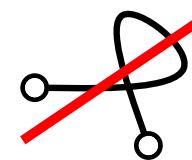
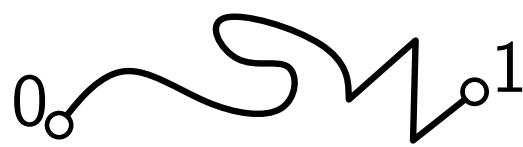
und Einschränkung von ζ auf $V(G)$ injektiv

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

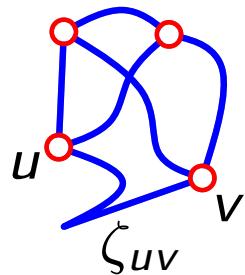
Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



Sei G ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls



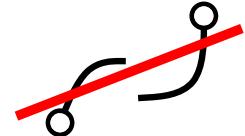
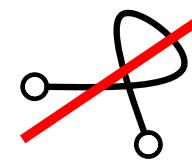
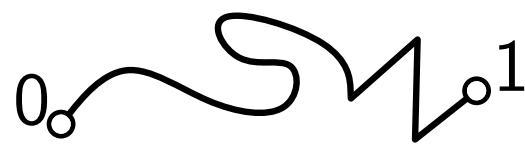
- für alle $w \in V(G)$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$ (Knoten \mapsto Punkt)
- und Einschränkung von ζ auf $V(G)$ injektiv
- für alle $uv \in E(G)$ gilt $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$ (Kante \mapsto J-Kurve)

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

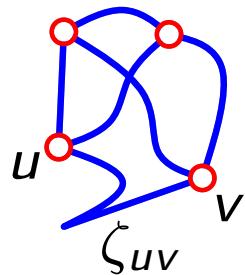
Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



Sei G ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls



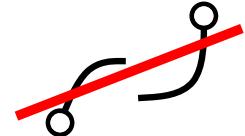
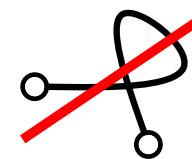
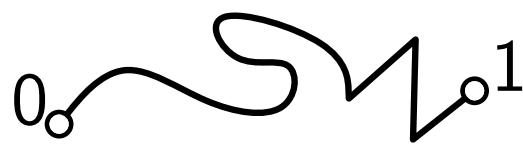
- für alle $w \in V(G)$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$ (Knoten \mapsto Punkt)
- und Einschränkung von ζ auf $V(G)$ injektiv
- für alle $uv \in E(G)$ gilt $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$ (Kante \mapsto J-Kurve)
- wobei ζ_{uv} Jordankurve mit $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

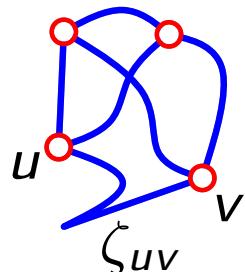
Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



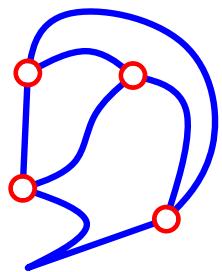
Sei G ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls



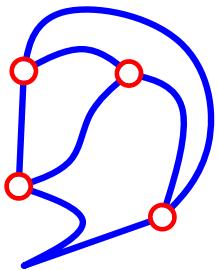
- für alle $w \in V(G)$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$ (Knoten \mapsto Punkt)
 - für alle $uv \in E(G)$ gilt $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$ (Kante \mapsto J-Kurve)
- wobei ζ_{uv} Jordankurve mit $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$ und $\zeta_{uv}(1) = \zeta(v)$.

Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



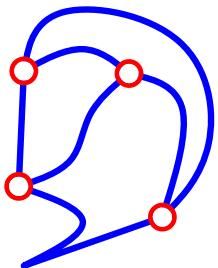
Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls
 $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$.

Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls
 $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$.
d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

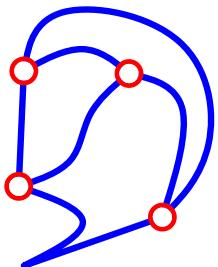
Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben (kreuzungsfrei)*, falls
 $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$.
d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

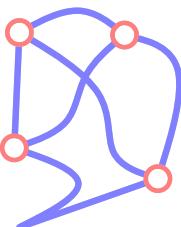
Def. Ein Graph G ist *planar (plättbar)*, falls er eine ebene Zeichnung hat.

Ebene Zeichnung, plättbarer Graph

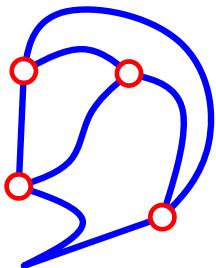


Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben (kreuzungsfrei)*, falls $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$. d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Def. Ein Graph G ist *planar (plättbar)*, falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B. $G =$  planar.

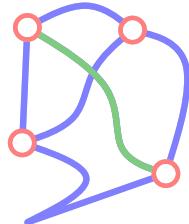
Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



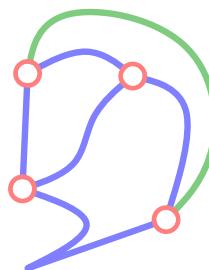
Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben (kreuzungsfrei)*, falls $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$. d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Def. Ein Graph G ist *planar (plättbar)*, falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B. $G =$

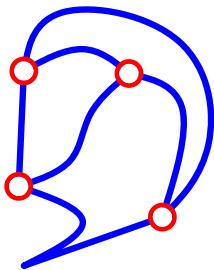


planar, denn



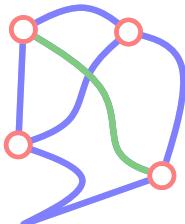
ist eine ebene Zeichnung von G .

Ebene Zeichnung, plättbarer Graph

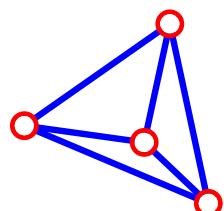


Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben (kreuzungsfrei)*, falls $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}([0, 1]) = \emptyset$. d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Def. Ein Graph G ist *planar (plättbar)*, falls er eine ebene Zeichnung hat.

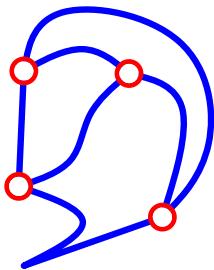
Z.B. $G =$ 

ist eine ebene Zeichnung von G .



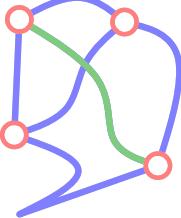
Eine Zeichnung ζ von G heißt *geradlinig*, falls für alle $e \in E(G)$ gilt: ζ_e ist linear

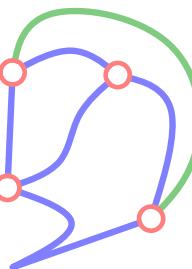
Ebene Zeichnung, plättbarer Graph

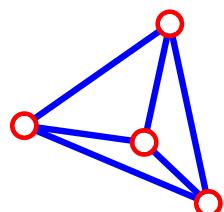


Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben (kreuzungsfrei)*, falls $\forall ab, cd \in E(G), ab \neq cd : \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}([0, 1]) = \emptyset$. d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Def. Ein Graph G ist *planar (plättbar)*, falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B. $G =$ 

planar, denn  ist eine ebene Zeichnung von G .



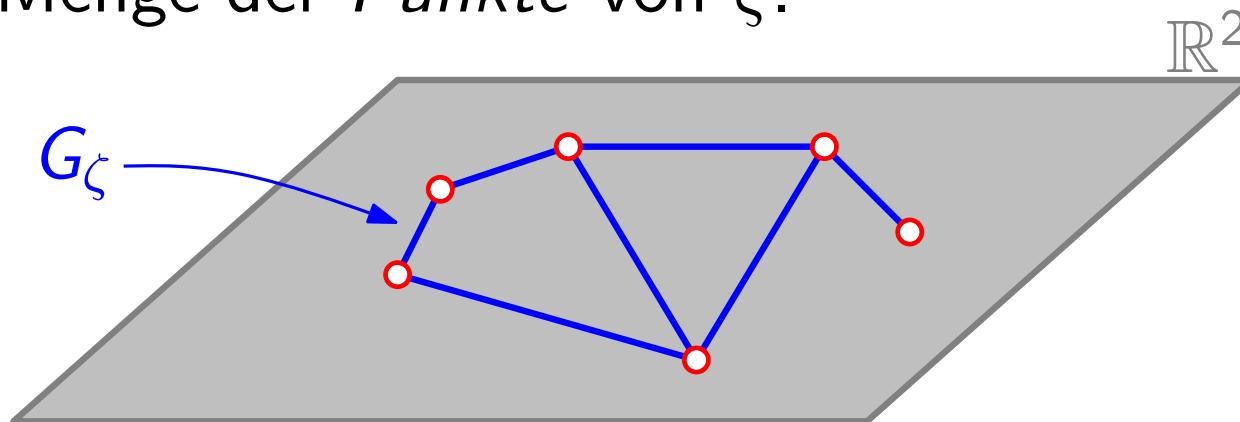
Eine Zeichnung ζ von G heißt *geradlinig*, falls für alle $e \in E(G)$ gilt: ζ_e ist linear (d.h. $\zeta_e([0, 1])$ Strecke).

Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen G und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .

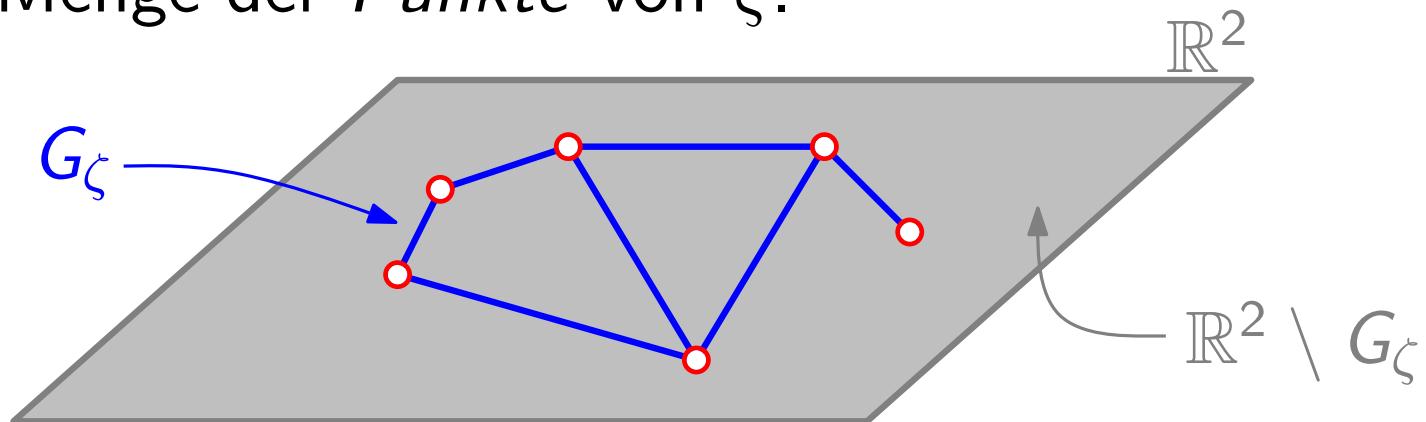


Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen G und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .

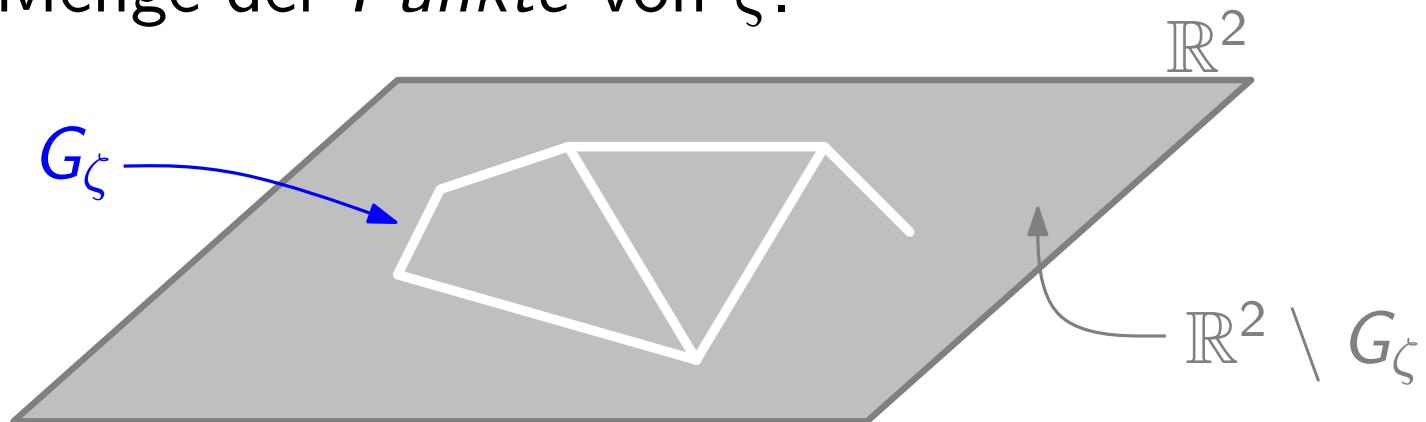


Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen G und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .

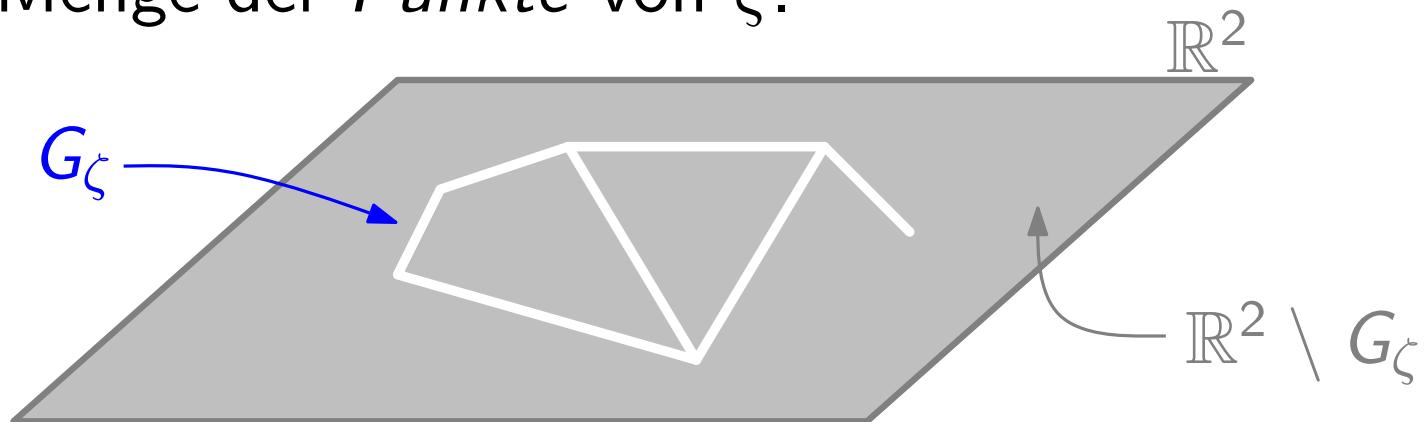


Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen G und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .



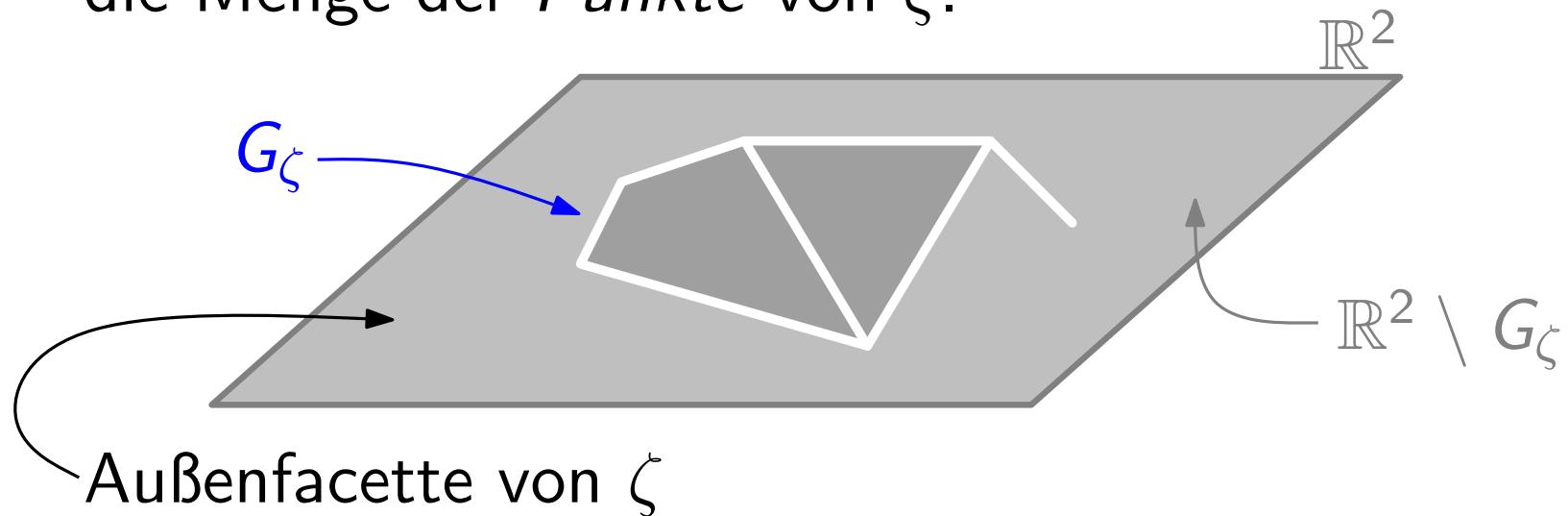
Def. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$ heißen *Facetten* von ζ .

Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen G und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .



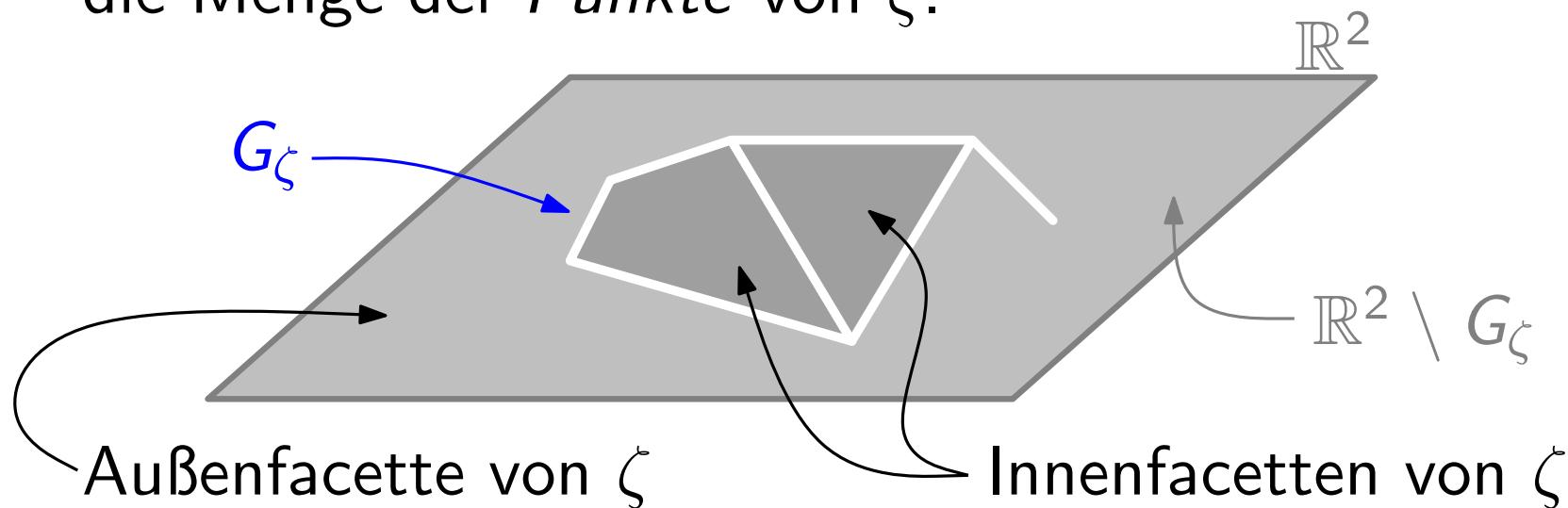
Def. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$ heißen *Facetten* von ζ .

Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen G und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .



Def. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$ heißen *Facetten* von ζ .

Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis.



Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

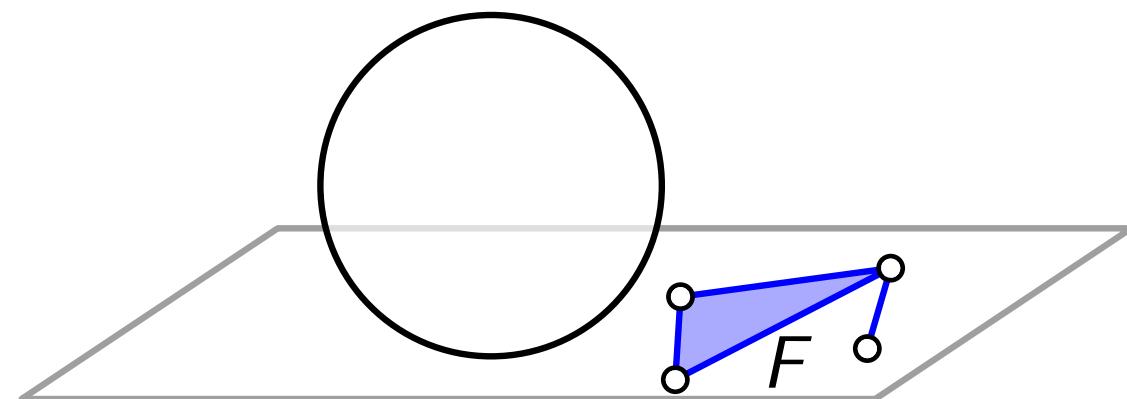


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Einheitssphäre
im \mathbb{R}^3

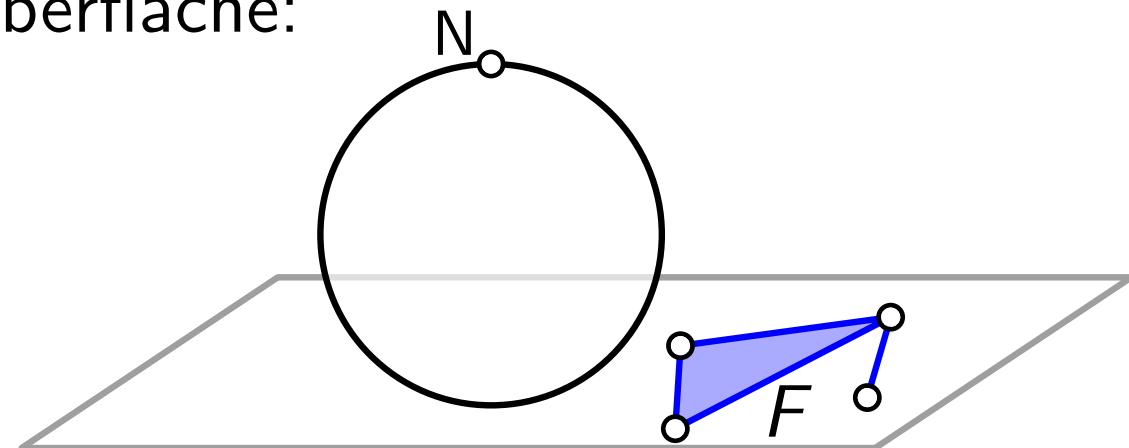


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

höchster
Punkt von S^2

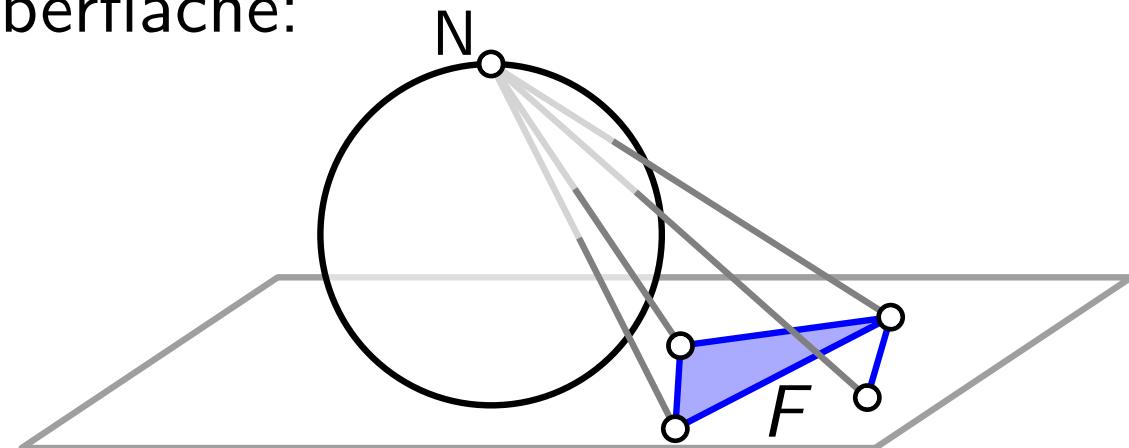


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

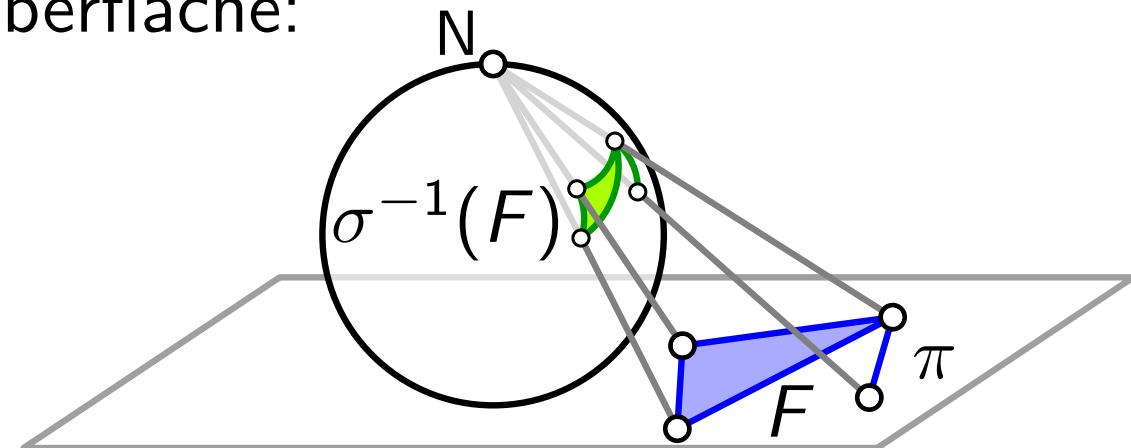
Zentralprojektion
mit Zentrum N von
 $S^2 \setminus \{N\}$ auf \mathbb{R}^2



Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

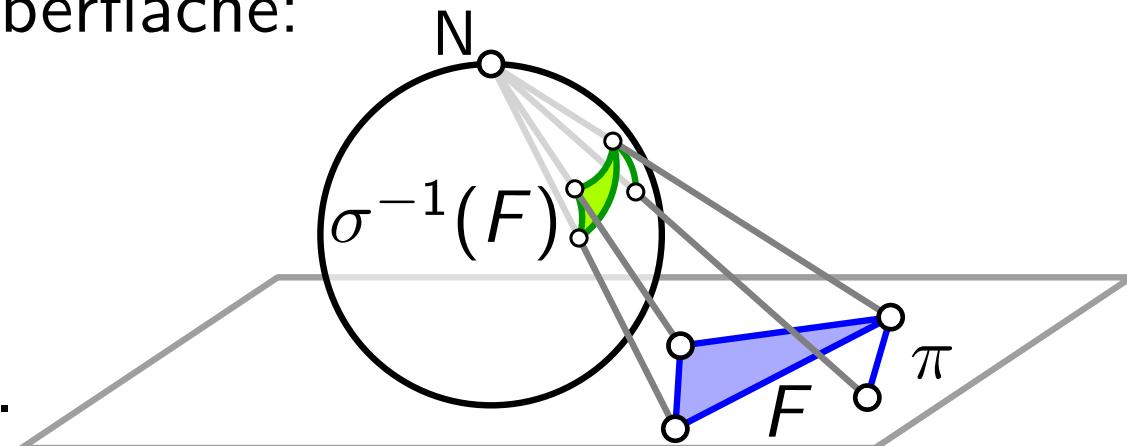


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) die Kugel, so dass $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$.

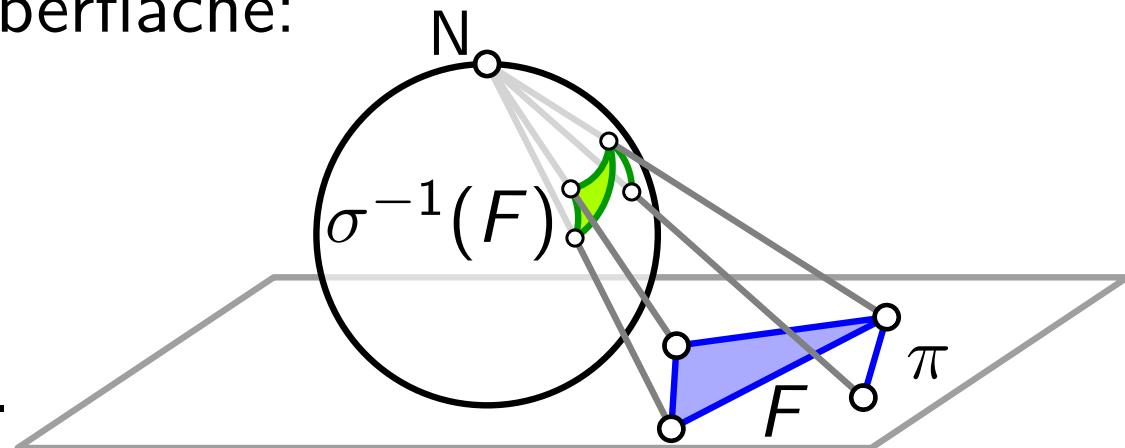


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) die Kugel, so dass $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$.



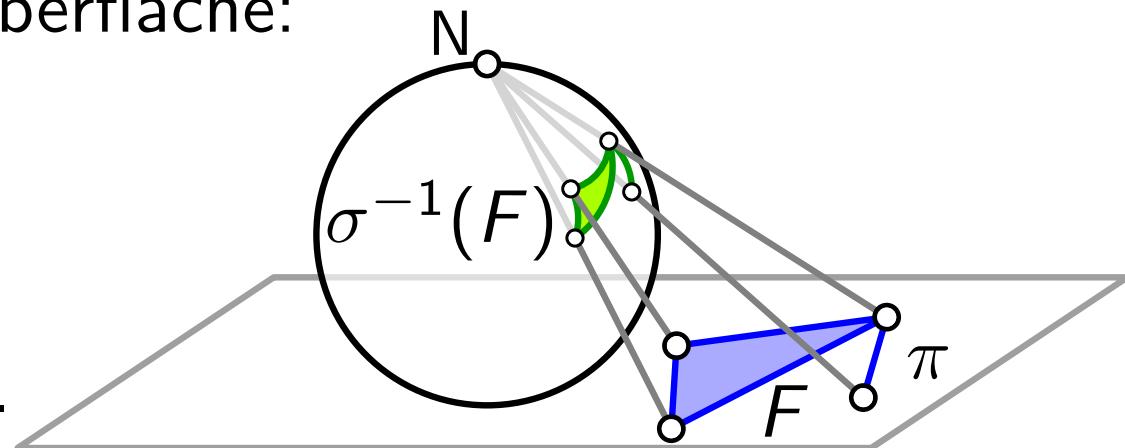
Projiziere dann zurück in die Ebene.

Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) die Kugel, so dass $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$.



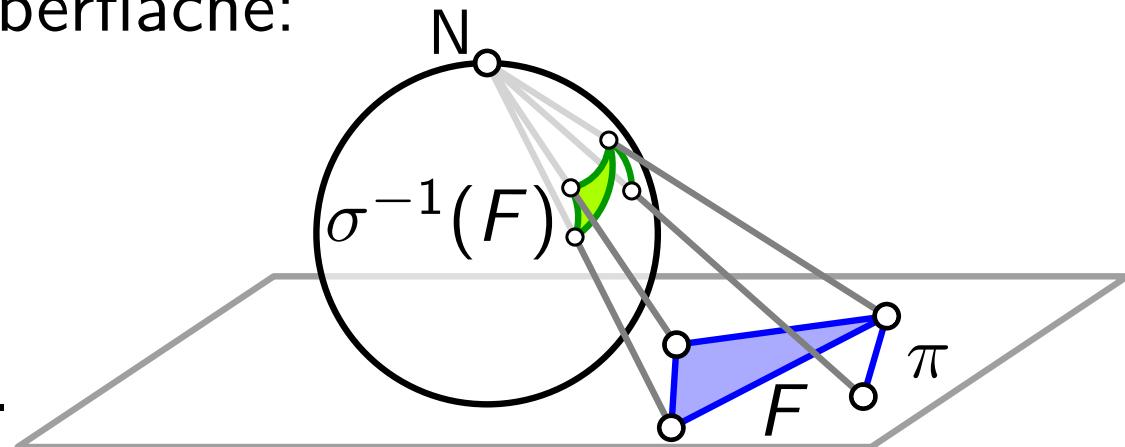
Projiziere dann zurück in die Ebene.
 \Rightarrow Zeichnung von $E(F)$ begrenzt die Außenfacette.

Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) die Kugel, so dass $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$.



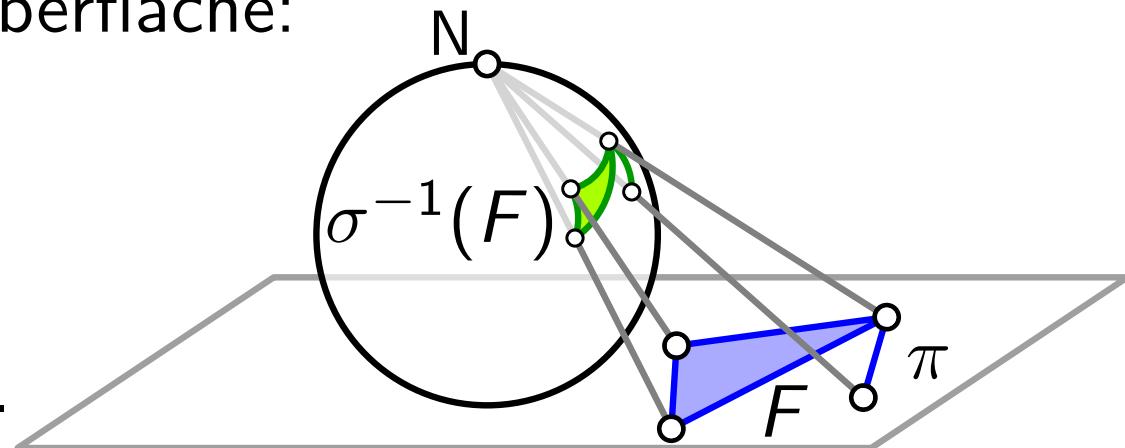
Projiziere dann zurück in die Ebene.
 \Rightarrow Zeichnung von $E(F)$ begrenzt die Außenfacette.
 Zeichnung $\pi_F = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} \circ \pi$ ist eben.

Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) die Kugel, so dass $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$.



Projiziere dann zurück in die Ebene.

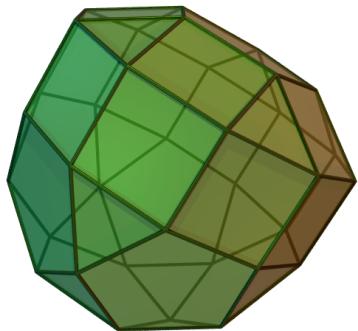
\Rightarrow Zeichnung von $E(F)$ begrenzt die Außenfacette.

Zeichnung $\pi_F = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} \circ \pi$ ist eben.

PS: Einfacher mit Inversion am Kreis. Man legt das Zentrum der Inversion ins Innere von F .

Skelette sind planar

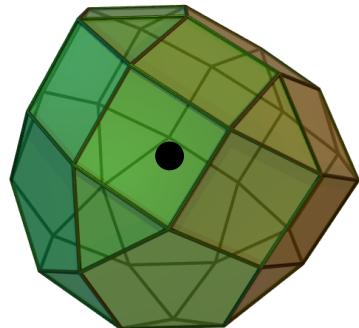
Beob.² Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.



Skelette sind planar

Beob.² Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis. Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.

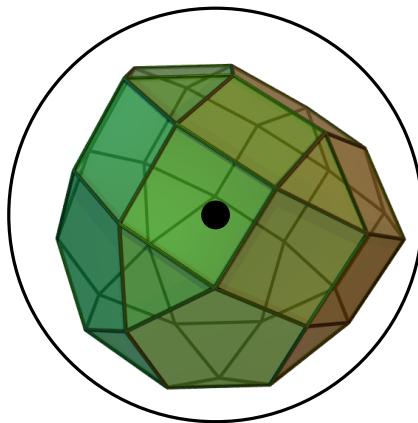


Skelette sind planar

Beob.² Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis. Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.

Sei S Kugel mit Zentrum o , so dass $P \subset S$.



Skelette sind planar

Beob.²

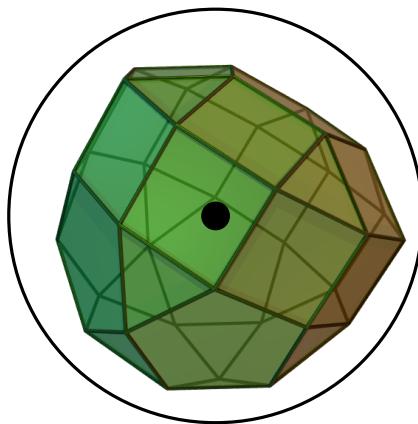
Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis.

Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.

Sei S Kugel mit Zentrum o , so dass $P \subset S$.

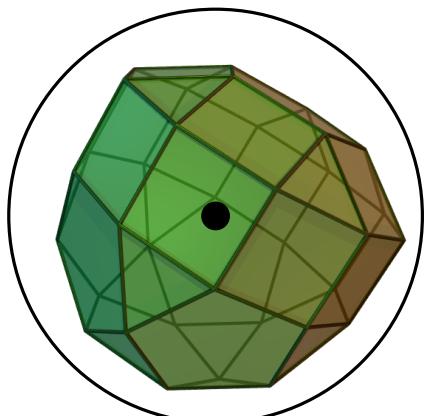
Zentralprojektion $\pi_o: P \rightarrow S$ liefert ebene Zeichnung π_S des Skeletts von P auf der Kugeloberfläche von S .



Skelette sind planar

Beob.² Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis. Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.



Sei S Kugel mit Zentrum o , so dass $P \subset S$.

Zentralprojektion $\pi_o: P \rightarrow S$ liefert ebene Zeichnung π_S des Skeletts von P auf der Kugeloberfläche von S .

Wähle Nordpol N , so dass $N \notin \pi_S$.

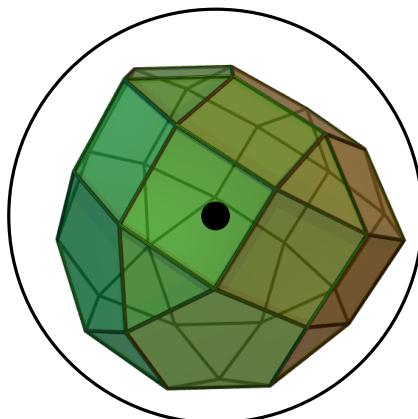
Skelette sind planar

Beob.²

Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis.

Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.



Sei S Kugel mit Zentrum o , so dass $P \subset S$.

Zentralprojektion $\pi_o: P \rightarrow S$ liefert ebene Zeichnung π_S des Skeletts von P auf der Kugeloberfläche von S .

Wähle Nordpol N , so dass $N \notin \pi_S$.

Projiziere π_S mittels σ auf die Ebene.

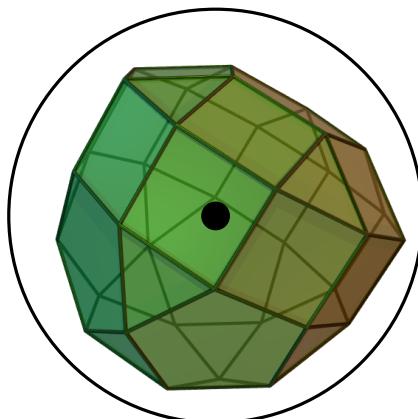
Skelette sind planar

Beob.²

Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis.

Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.



Sei S Kugel mit Zentrum o , so dass $P \subset S$.

Zentralprojektion $\pi_o: P \rightarrow S$ liefert ebene Zeichnung π_S des Skeletts von P auf der Kugeloberfläche von S .

Wähle Nordpol N , so dass $N \notin \pi_S$.

Projiziere π_S mittels σ auf die Ebene.

Ergebnis: $\sigma \circ \pi_S$ ist eben.

Schon wieder Euler . . .

Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:



Schon wieder Euler . . .

Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$n - m + f = k + 1.$$



Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$n - m + f = k + 1.$$

Beweis.

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$n - m + f = k + 1.$$

Beweis.

Induktion über m .

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$m = 0$:

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$m = 0$: $\Rightarrow f = 1$,

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis. Induktion über m .

$m = 0$: $\Rightarrow f = 1, k = n$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$m = 0$: $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 =$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 \quad \text{RS}_0 =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 \quad \text{RS}_0 = n + 1$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \checkmark$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ;

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

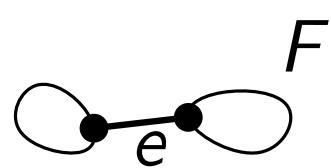
$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

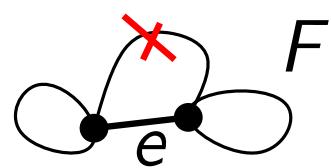
$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

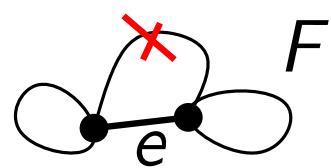
- $m = 0$: $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1$ ✓
- $m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

- $m = 0$: $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1$ ✓
- $m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

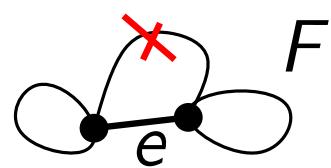
$$G' := G - e$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$m = 0$: $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1$ ✓

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

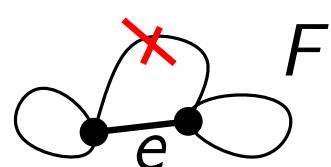
$$G' := G - e \Rightarrow n' =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F
inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

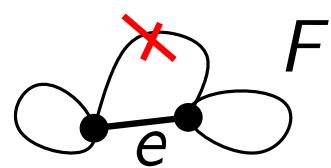
$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, \quad f' =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F
inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

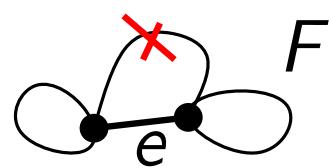
$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, \quad f' = f, \quad m' =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

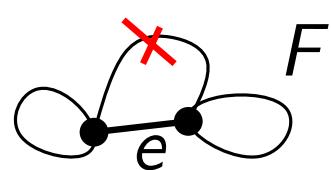
$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, \quad f' = f, \quad m' = m - 1, \quad k' =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F
inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

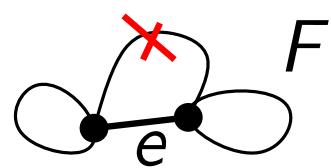
$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, \quad f' = f, \quad m' = m - 1, \quad k' = k + 1.$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F
inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, \quad f' = f, \quad m' = m - 1, \quad k' = k + 1.$$

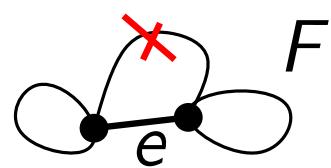
$$\Rightarrow \text{LS}_m =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F
inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, \quad f' = f, \quad m' = m - 1, \quad k' = k + 1.$$

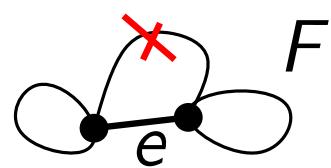
$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F
inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

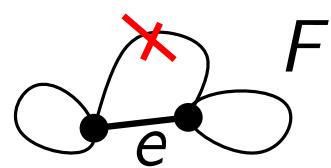
$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 =$$

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F
inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 =$$

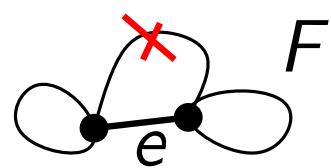
[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' =$$

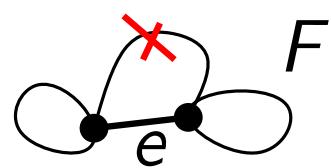
[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 =$$

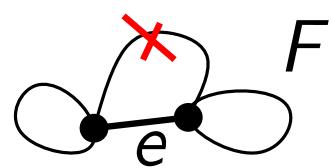
[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)



Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = \text{RS}_m.$$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e ~~beidseitig zu gleicher Facette F~~
inzident zu Facetten $F_1 \neq F_2$

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = \text{RS}_m.$$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .



Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$

Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e ~~beidseitig zu gleicher Facette F~~
~~inzident zu Facetten $F_1 \neq F_2$~~

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = \text{RS}_m.$$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .

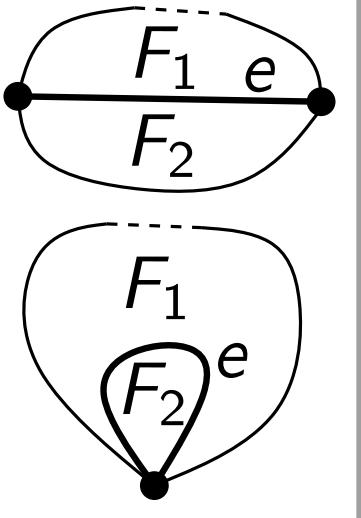


Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$



Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e ~~beidseitig zu gleicher Facette F~~
~~inzident zu Facetten $F_1 \neq F_2$~~

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = \text{RS}_m.$$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .

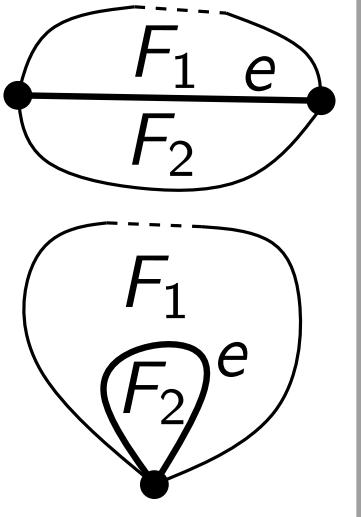


Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$



Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e ~~beidseitig zu gleicher Facette F~~
~~inzident zu Facetten $F_1 \neq F_2$~~

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = \text{RS}_m.$$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler . . .

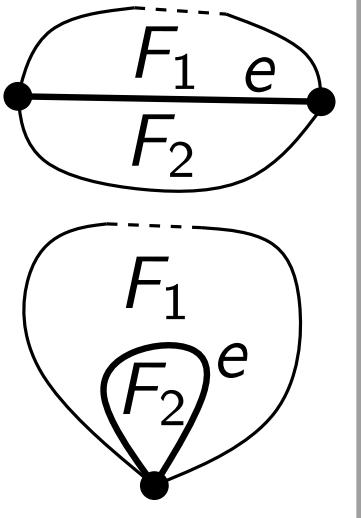


Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$\text{LS}_m := n - m + f = k + 1 =: \text{RS}_m$$



Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow \text{LS}_0 = n + 1 = \text{RS}_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e ~~beidseitig zu gleicher Facette F~~
~~inzident zu Facetten $F_1 \neq F_2$~~

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow \text{LS}_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' + 1 = k + 1 = \text{RS}_m.$$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]



Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen

Planare Graphen sind schlank!

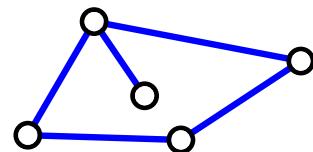
Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

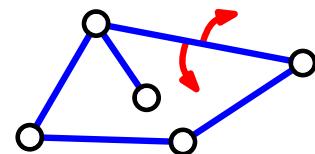
Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

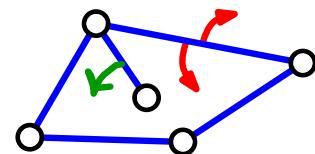
Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

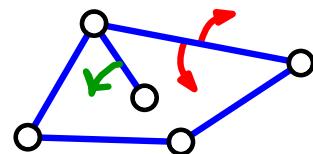


Inz.

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

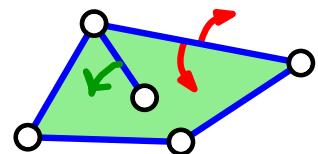


$$2m \geq \# \text{ Inz.}$$

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

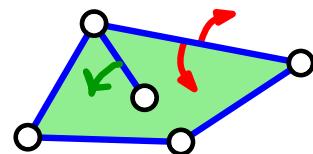


$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



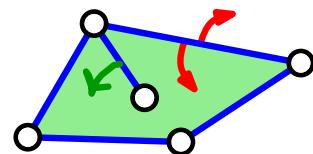
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

[da jede Facette eines *einfachen* Graphen aus mind.
drei Kanten besteht (falls $n \geq 3$ und $m \geq 3$).]

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



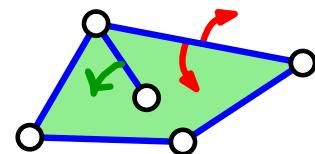
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

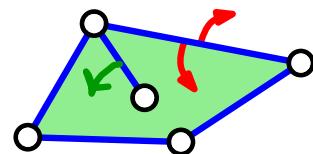
$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

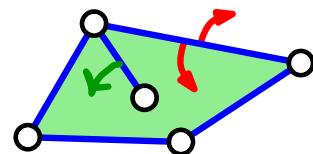
$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

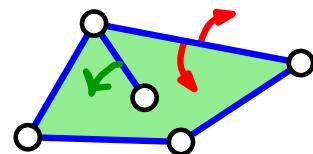
OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\xrightarrow{\text{Euler}} m =$$

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

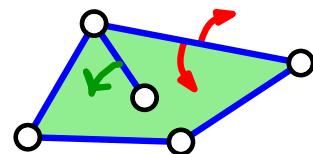
$$\Rightarrow m = n + f - 2$$

Euler

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

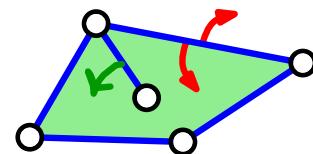
$$\Rightarrow m = n + f - 2 \leq$$

Euler

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

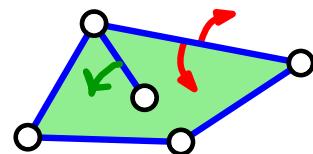
$$\Rightarrow m = n + f - 2 \leq$$

Euler

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

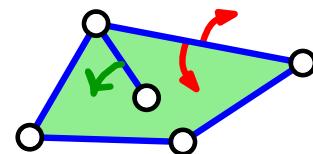
$$\Rightarrow m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2$$

Euler

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

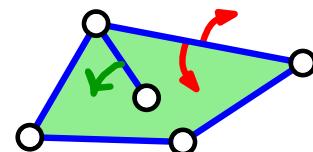
$$\Rightarrow m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq$$

Euler

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\begin{array}{l} \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \\ \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3\text{).} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

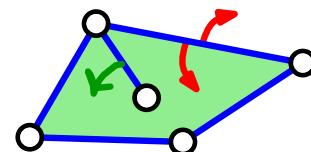
$$\Rightarrow m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Euler

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

[da jede Facette eines *einfachen* Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls $n \geq 3$ und $m \geq 3$).]

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

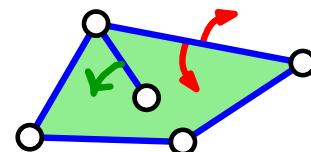
$$\xrightarrow{\text{Euler}} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

$$\Rightarrow f \leq$$

Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

[da jede Facette eines *einfachen* Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls $n \geq 3$ und $m \geq 3$).]

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\xrightarrow{\text{Euler}} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

$$\Rightarrow f \leq 2n - 4$$

□

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem *einfachen* planaren Graphen ist kleiner 6.

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n}$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n}$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n}$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$

□

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad ≤ 5 .

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad ≤ 5 .

$$2m =$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad ≤ 5 .

$$2m = \sum_v \deg(v) \geq$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
 Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad ≤ 5 .

$$2m = \sum_v \deg(v) \geq (n - 2) \cdot 6 + 2 \cdot 1 =$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
 Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad ≤ 5 .

$$2m = \sum_v \deg(v) \geq (n - 2) \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 6n - 10.$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt: $m \leq 3n - 6$; $f \leq 2n - 4$.

Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$
 □

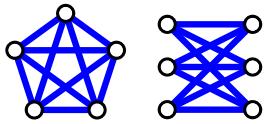
Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
 Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad ≤ 5 .
 $2m = \sum_v \deg(v) \geq (n - 2) \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 6n - 10$.
Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ in planaren Graphen! □

Nicht planare Graphen

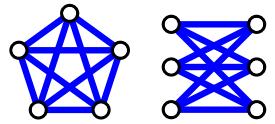
Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.

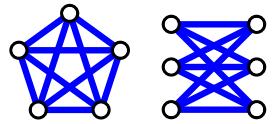


Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} =$$

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



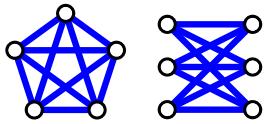
Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.

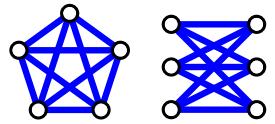


Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 = 3n - 6$$

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.

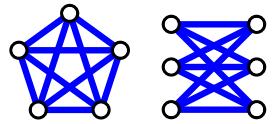


Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



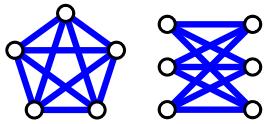
Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



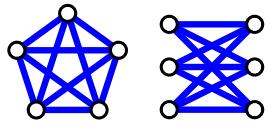
Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.

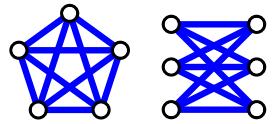
**Beweis.**

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

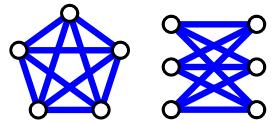
$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = \quad = 3n - 6$$

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

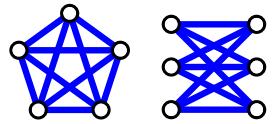
$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

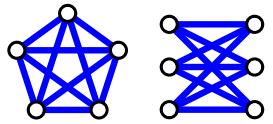
$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

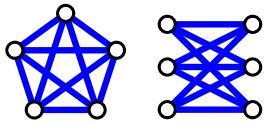
$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

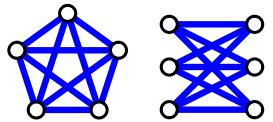
In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:
 $2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

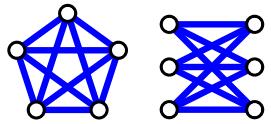
Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

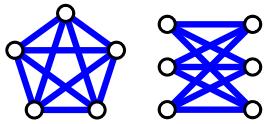
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = \quad \quad \quad = 4f$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

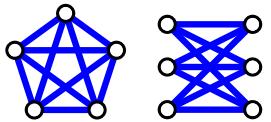
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad = 4f$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

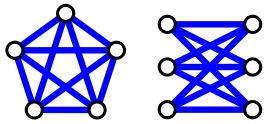
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad = 4(2 - n + m) = 4f$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

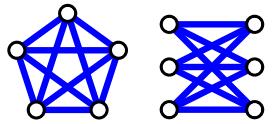
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

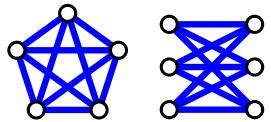
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad 20 = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f$$

Nicht planare Graphen

Satz.

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.



Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow *kein* Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad < \quad 20 = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f \quad \text{↯}$$

Vorlesungsumfrage

Bitte nehmen Sie teil –

Vorlesungsumfrage

Bitte nehmen Sie teil –

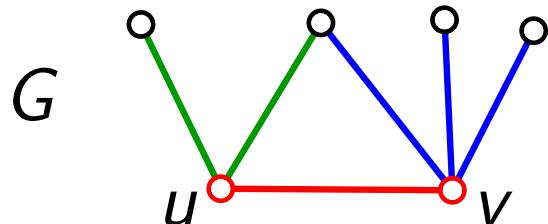
JETZT!

Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

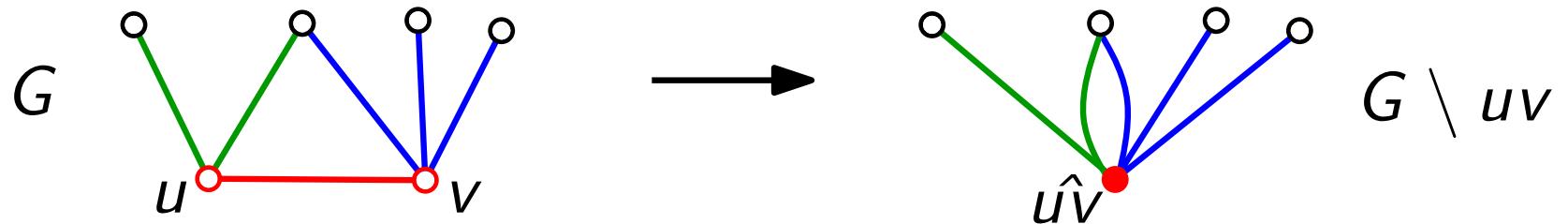
Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .
Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus
 G durch *(Einfach-)Kontraktion* von uv .



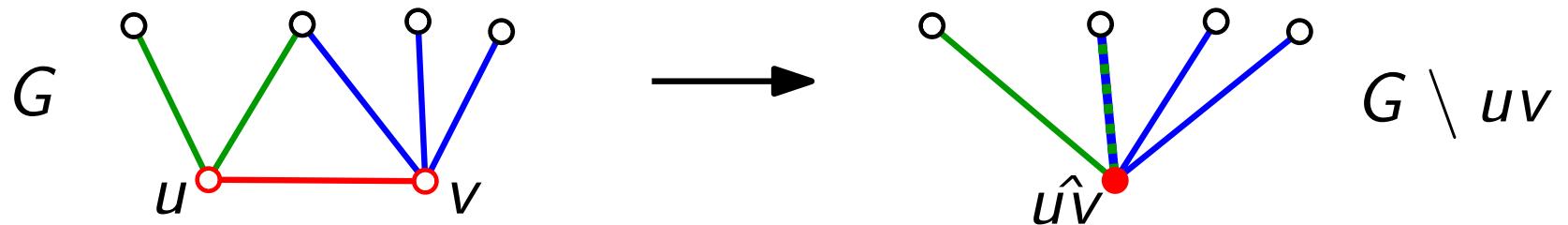
Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .
Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus
 G durch (*Einfach-)*Kontraktion von uv .



Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .
Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus
 G durch *(Einfach-)Kontraktion* von uv .
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

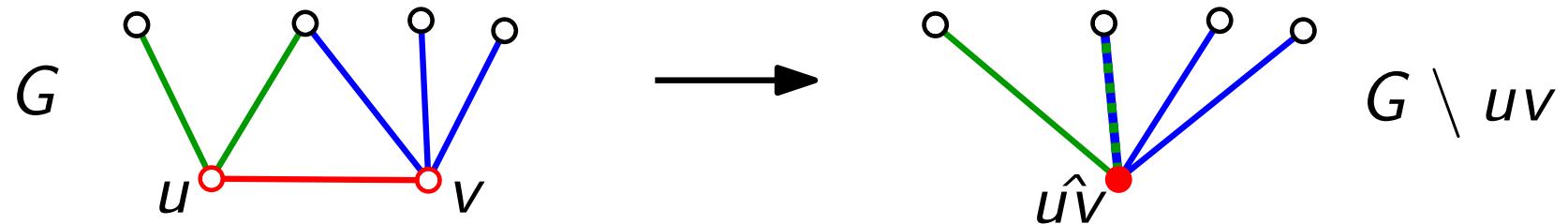


Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch *(Einfach-)Kontraktion* von uv .
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
 Unterschied zur
 Kontraktion G/U
 bei Multigraphen!

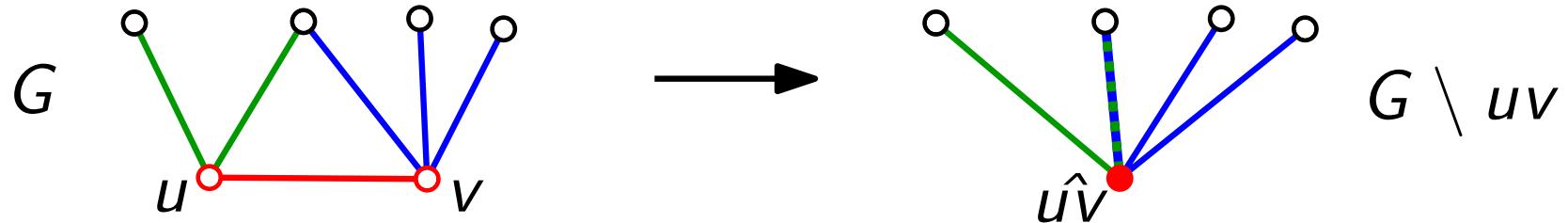


Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch *(Einfach-)Kontraktion* von uv .
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
 Unterschied zur
 Kontraktion G/U
 bei Multigraphen!



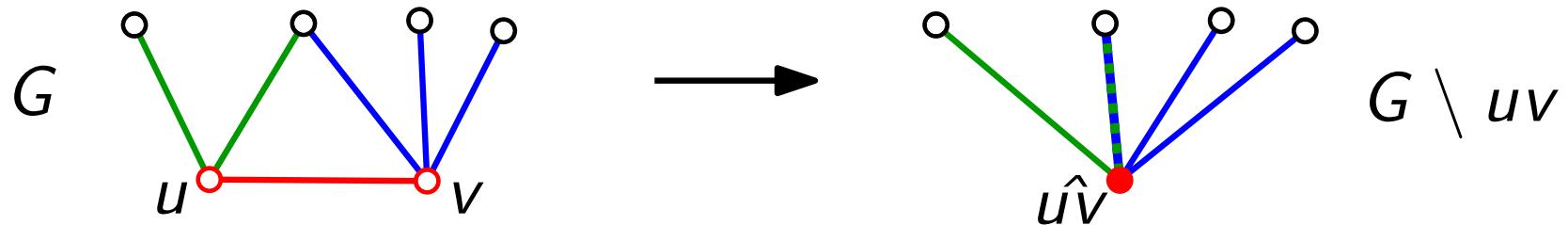
Ein Graph H heißt *Minor* von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.

Kontraktionen und Minoren

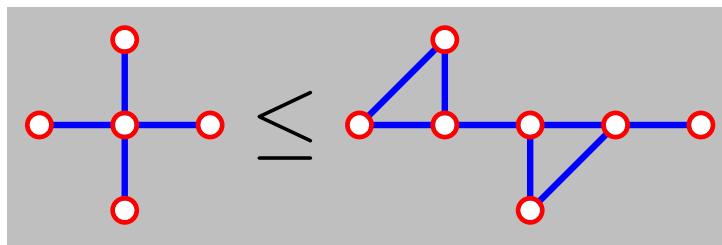
Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch *(Einfach-)Kontraktion* von uv .
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
 Unterschied zur
 Kontraktion G/U
 bei Multigraphen!



Ein Graph H heißt *Minor* von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.

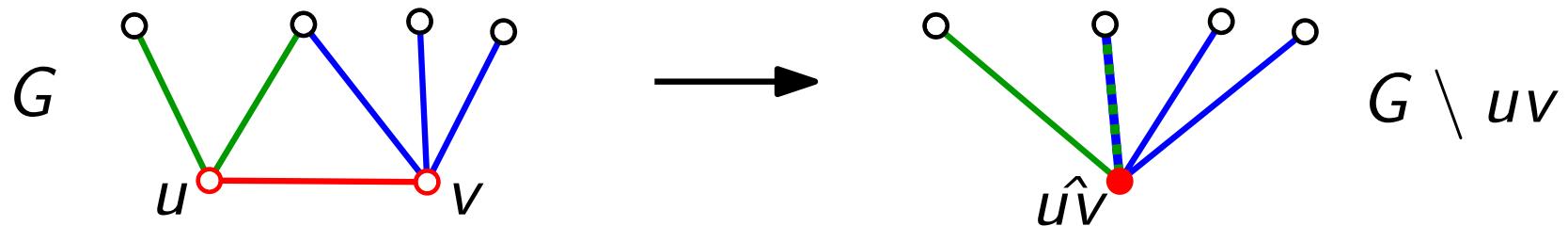


Kontraktionen und Minoren

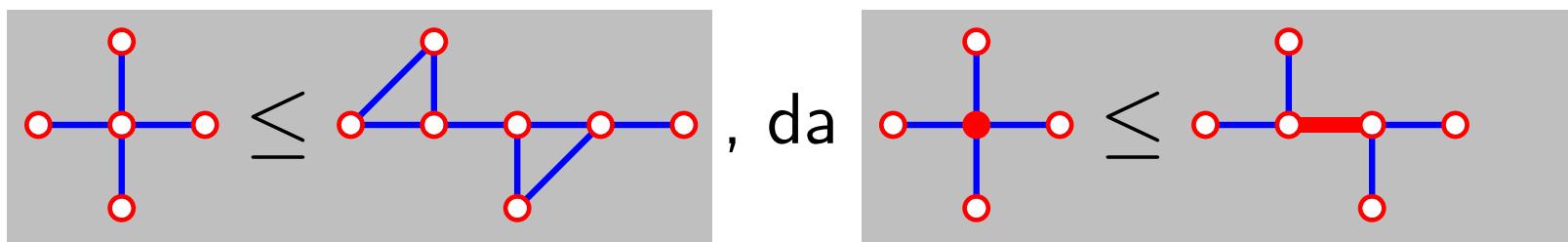
Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch *(Einfach-)Kontraktion* von uv .
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
 Unterschied zur
 Kontraktion G/U
 bei Multigraphen!



Ein Graph H heißt *Minor* von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.

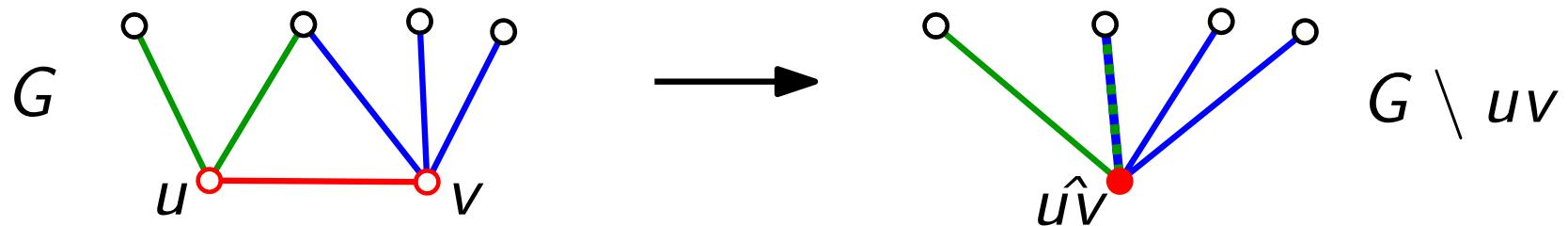


Kontraktionen und Minoren

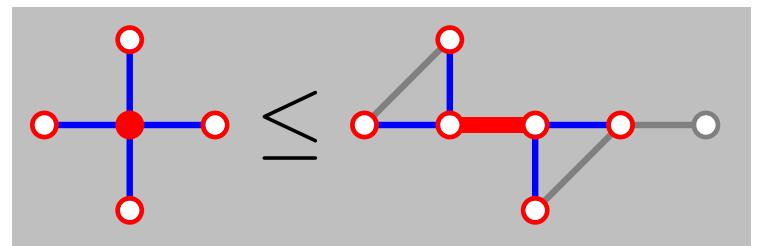
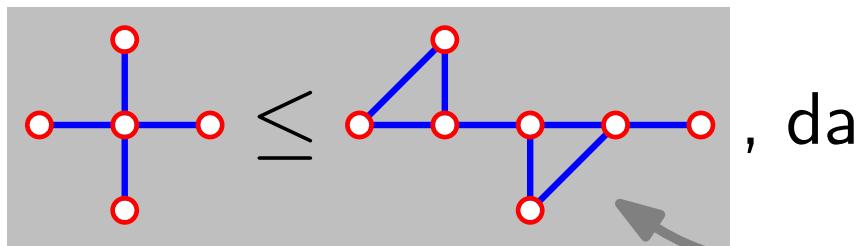
Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch *(Einfach-)Kontraktion* von uv .
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
 Unterschied zur
 Kontraktion G/U
 bei Multigraphen!



Ein Graph H heißt *Minor* von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.



und dies ist
 ein Teilgraph
 von

Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

Beweis. „ \Rightarrow “

Ein paar Beobachtungen

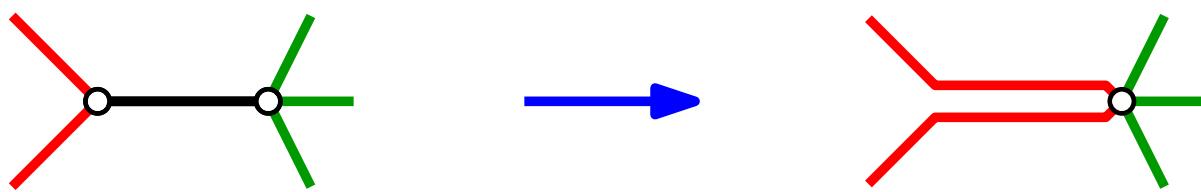
Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:

Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

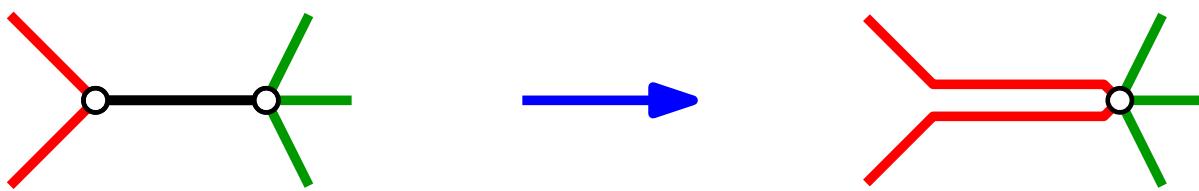
Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:

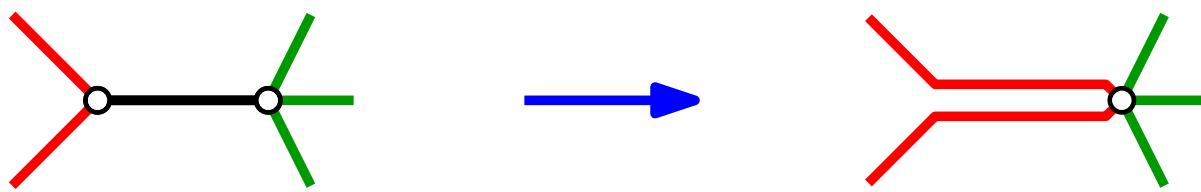


„ \Leftarrow “

Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:

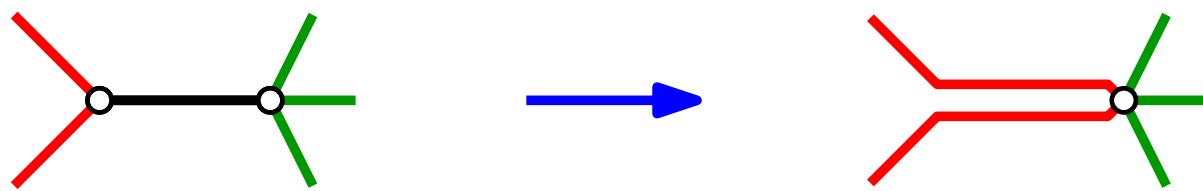


„ \Leftarrow “ G ist Minor von G ($G \leq G$). □

Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



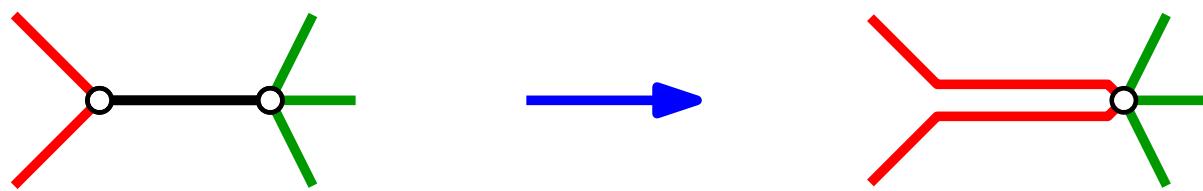
„ \Leftarrow “ G ist Minor von G ($G \leq G$). □

Beob.⁴ Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

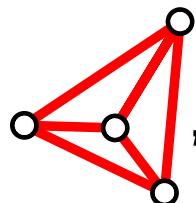
Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



„ \Leftarrow “ G ist Minor von G ($G \leq G$). □

Beob.⁴ Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

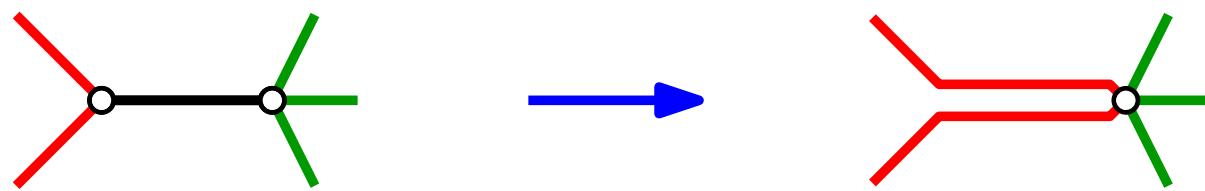
Beweis. K_4 , also ist K_4 planar



Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

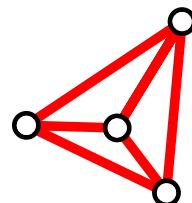
Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



„ \Leftarrow “ G ist Minor von G ($G \leq G$). □

Beob.⁴ Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

Beweis. K_4 , also ist K_4 planar \Rightarrow Beh. □



Satz von Kuratowski

Satz. [Kuratowski 1930: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*]
Sei G ein einfacher Graph. Dann gilt:
 G planar \Leftrightarrow weder K_5 noch $K_{3,3}$ ist Minor von G .



Kazimierz Kuratowski
Warschau 1896–1980 Warschau

Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.



John Edward Hopcroft
*1939, Seattle, WA, U.S.A.



Robert Endre Tarjan
*1948 Pomona, CA, USA

Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Satz. [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]

Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

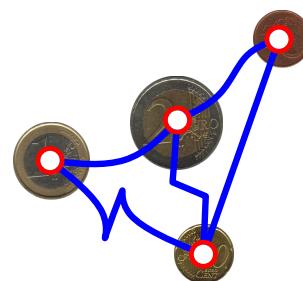
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Satz. [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]

Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

Satz. [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]

Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

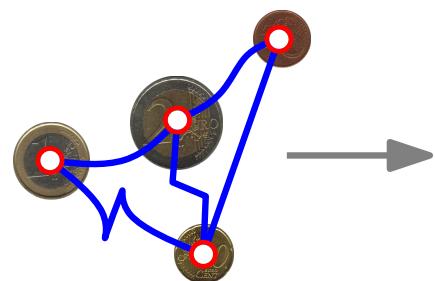
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Satz. [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]

Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

Satz. [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]

Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

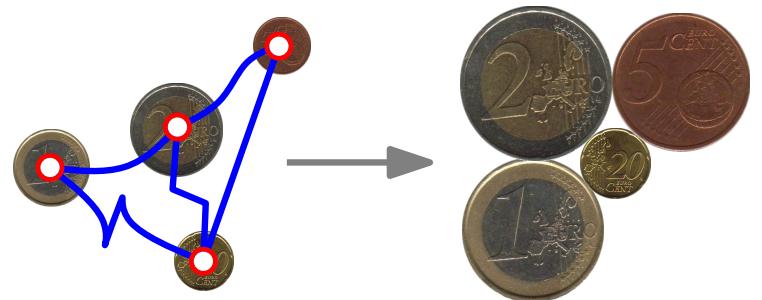
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Satz. [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]

Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

Satz. [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]

Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]

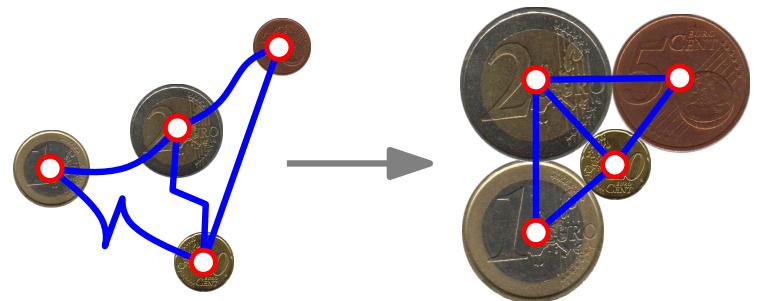
Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Satz. [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]

Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

Satz. [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]

Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



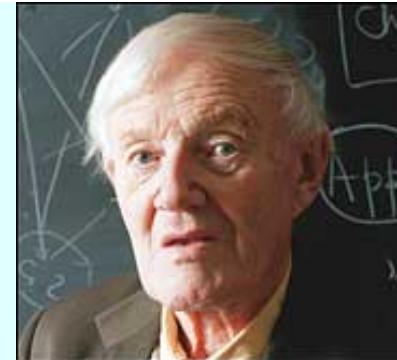
Planare Graphen zeichnen

Satz. [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



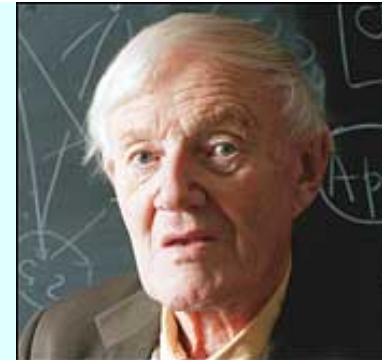
Planare Graphen zeichnen

Satz. [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



Satz. [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n - 2) \times (n - 2)$ Gitters abgebildet werden.

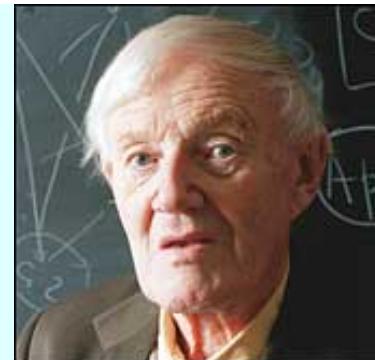
Planare Graphen zeichnen

Satz. [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

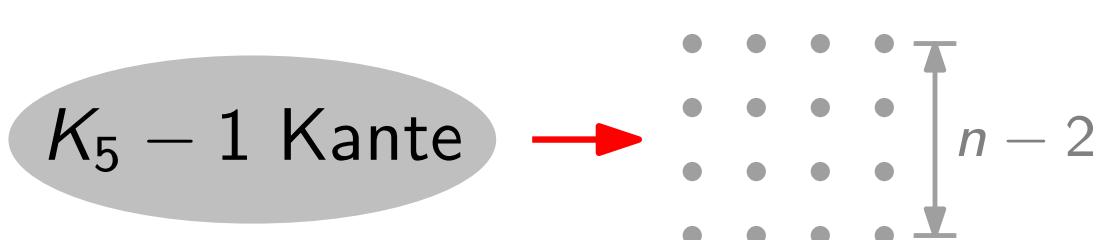
William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



Satz. [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n - 2) \times (n - 2)$ Gitters abgebildet werden.



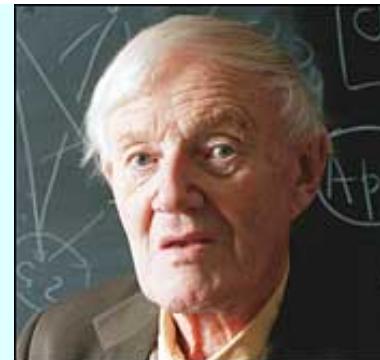
Planare Graphen zeichnen

Satz. [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

William Thomas Tutte

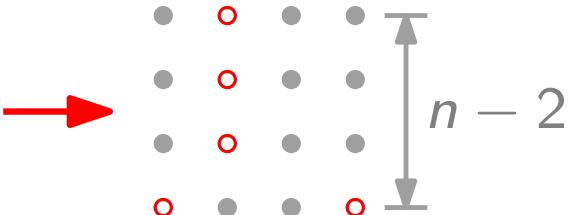
Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



Satz. [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n - 2) \times (n - 2)$ Gitters abgebildet werden.

$K_5 - 1$ Kante



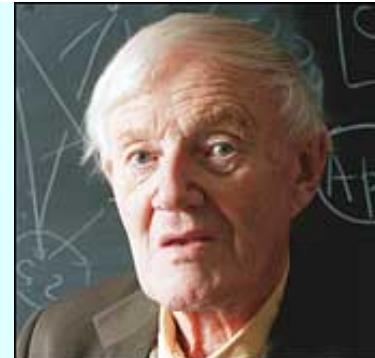
Planare Graphen zeichnen

Satz. [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

William Thomas Tutte

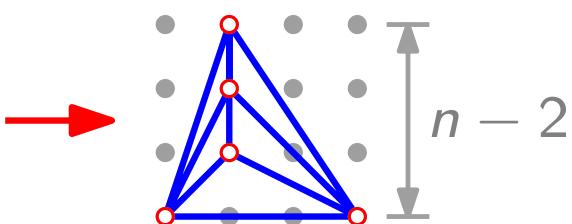
Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



Satz. [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n - 2) \times (n - 2)$ Gitters abgebildet werden.

$K_5 - 1$ Kante



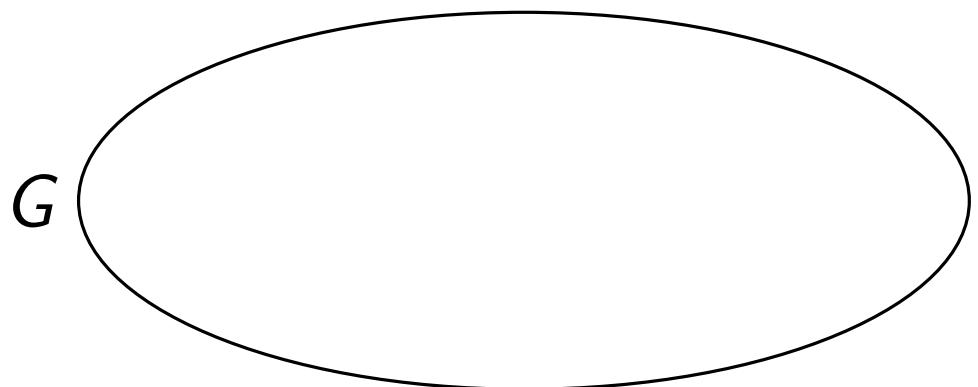
Noch mehr große Sätze

Satz. *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei G ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge $V = L \cup S \cup R$ von G , so dass

- keine Kante zwischen L und R verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$.



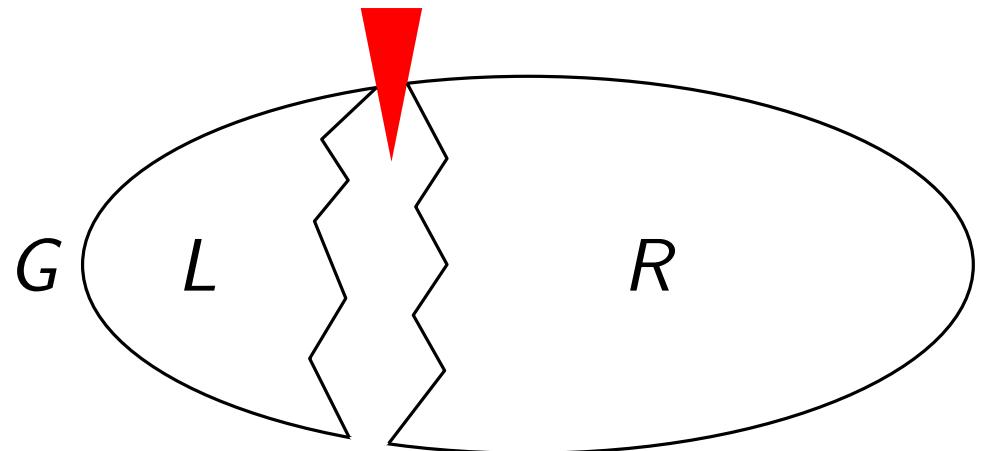
Noch mehr große Sätze

Satz. *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei G ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge $V = L \cup S \cup R$ von G , so dass

- keine Kante zwischen L und R verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$.



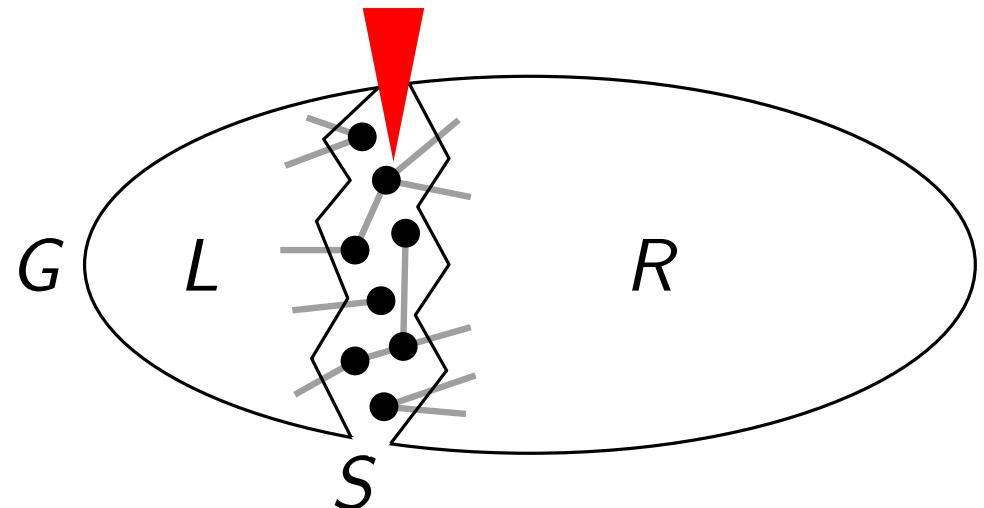
Noch mehr große Sätze

Satz. *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei G ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge $V = L \cup S \cup R$ von G , so dass

- keine Kante zwischen L und R verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$.



Noch mehr große Sätze

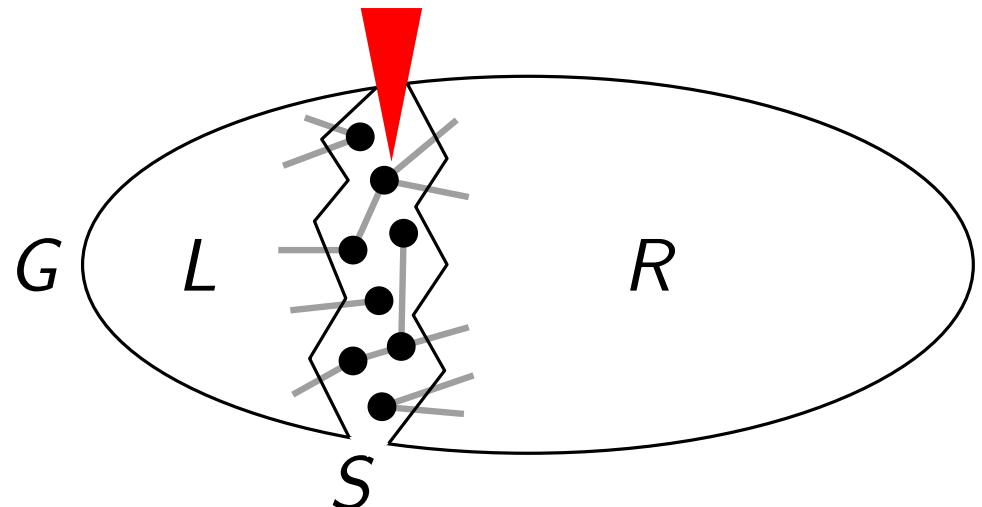
Satz. *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei G ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge $V = L \cup S \cup R$ von G , so dass

- keine Kante zwischen L und R verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$.

Eine solche Zerlegung kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.



Größte Matchings inkrementell

Lemma. Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V(G)$ und sei M größtes Matching in $G - v$.

Größte Matchings inkrementell

Lemma. Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V(G)$ und sei M größtes Matching in $G - v$.

- (i) Falls G keinen augmentierenden Weg mit Endknoten v enthält,
so ist M größtes Matching in G .

Größte Matchings inkrementell

Lemma. Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V(G)$ und sei M größtes Matching in $G - v$.

- (i) Falls G keinen augmentierenden Weg mit Endknoten v enthält,
so ist M größtes Matching in G .
- (ii) Ansonsten sei W ein augmentierender Weg.
Dann ist $M \Delta E(W)$ größtes Matching in G .

Größte Matchings inkrementell

Lemma. Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V(G)$ und sei M größtes Matching in $G - v$.

- (i) Falls G keinen augmentierenden Weg mit Endknoten v enthält,
so ist M größtes Matching in G .
- (ii) Ansonsten sei W ein augmentierender Weg.
Dann ist $M \Delta E(W)$ größtes Matching in G .

Mit einer passenden Repräsentation eines größten Matchings in $G - v$ kann man in $O(|E(G)|)$ Zeit ein größtes Matching in G finden.

Größte Matchings inkrementell

Lemma. Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V(G)$ und sei M größtes Matching in $G - v$.

- (i) Falls G keinen augmentierenden Weg mit Endknoten v enthält, so ist M größtes Matching in G .
- (ii) Ansonsten sei W ein augmentierender Weg. Dann ist $M \Delta E(W)$ größtes Matching in G .

Mit einer passenden Repräsentation eines größten Matchings in $G - v$ kann man in $O(|E(G)|)$ Zeit ein größtes Matching in G finden.

Beweis. Übung – jetzt!

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```
if  $|V(G)| < 5$  then
| return BruteForceMatching( $G$ )
else
|  $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$ 
```

Aufgabe: Berechnen Sie mithilfe des Separators und des Lemmas ein größtes Matching M in G .

Wenden Sie *Teile & Herrsche* an!

```
| return  $M$ 
```

Größte Matchings in planaren Graphen

```
MaxCardinalityMatching(Graph G)
```

```
  if  $|V(G)| < 5$  then
```

```
    | return BruteForceMatching( $G$ )
```

```
  else
```

```
    |  $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$ 
```

```
    |  $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
```

```
    |  $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
```

```
    |  $M = M_L \cup M_R$ 
```

```
    |  $\bar{V} = L \cup R$ 
```

```
    | foreach  $v \in S$  do
```

```
      | |
```

```
    | | return  $M$ 
```

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```
if  $|V(G)| < 5$  then
| return BruteForceMatching( $G$ )
else
| ( $L, S, R$ ) = PlanarSeparator( $G$ )
|  $M_L$  = MaxCardinalityMatching( $G[L]$ )
|  $M_R$  = MaxCardinalityMatching( $G[R]$ )
|  $M$  =  $M_L \cup M_R$ 
|  $\bar{V}$  =  $L \cup R$ 
| foreach  $v \in S$  do
| |  $\bar{V}$  =  $\bar{V} \cup \{v\}$ 
| |  $M$  = größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma
| return  $M$ 
```

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```
if  $|V(G)| < 5$  then
| return BruteForceMatching( $G$ )
else
| ( $L, S, R$ ) = PlanarSeparator( $G$ )
|  $M_L$  = MaxCardinalityMatching( $G[L]$ )
|  $M_R$  = MaxCardinalityMatching( $G[R]$ )
|  $M$  =  $M_L \cup M_R$ 
|  $\bar{V}$  =  $L \cup R$ 
| foreach  $v \in S$  do
| |  $\bar{V}$  =  $\bar{V} \cup \{v\}$ 
| |  $M$  = größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma
| return  $M$ 
```

Korrektheit?

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then
|   return BruteForceMatching( $G$ )
else
|    $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante
|    $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
|    $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
|    $M = M_L \cup M_R$ 
|    $\bar{V} = L \cup R$ 
|   foreach  $v \in S$  do
|   |    $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
|   |    $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$ 
|   return  $M$ 

```

Korrektheit?

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then
|   return BruteForceMatching( $G$ )
else
|    $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante
|    $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
|    $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
|    $M = M_L \cup M_R$ 
|    $\bar{V} = L \cup R$ 
|   foreach  $v \in S$  do
|        $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
|        $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$ 
|   return  $M$ 

```

Korrektheit?

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then
|   return BruteForceMatching( $G$ )
else
|    $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante
|    $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
|    $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
|    $M = M_L \cup M_R$ 
|    $\bar{V} = L \cup R$ 
|   foreach  $v \in S$  do
|        $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
|        $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$ 
|   return  $M$ 

```

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

M ist größtes Matching in $G[\bar{V}]$

Korrektheit?

Hier $\bar{V} = V(G) \Rightarrow$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then
|   return BruteForceMatching( $G$ )
else
|    $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante
|    $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
|    $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
|    $M = M_L \cup M_R$ 
|    $\bar{V} = L \cup R$ 
|   foreach  $v \in S$  do
|        $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
|        $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$ 
|   return  $M$ 

```

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$ keine L - R -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

M ist größtes Matching in $G[\bar{V}]$

Korrektheit?

Hier $\bar{V} = V(G) \Rightarrow G[\bar{V}] = G \Rightarrow$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then
|   return BruteForceMatching( $G$ )
else
|    $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante
|    $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
|    $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
|    $M = M_L \cup M_R$ 
|    $\bar{V} = L \cup R$ 
|   foreach  $v \in S$  do
|        $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
|        $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$ 
|   return  $M$ 

```

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G) \Rightarrow$ keine L - R -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

M ist größtes Matching in $G[\bar{V}]$

Korrektheit?

Hier $\bar{V} = V(G) \Rightarrow G[\bar{V}] = G \Rightarrow M$ max. in G

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then
|   return BruteForceMatching( $G$ )
else
|    $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$ 
|    $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
|    $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
|    $M = M_L \cup M_R$ 
|    $\bar{V} = L \cup R$ 
|   foreach  $v \in S$  do
|   |    $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
|   |    $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$ 
|   return  $M$ 

```

$T(n) = \text{Laufzeit?}$
 Worst-Case-Laufzeit für
 Graphen mit $|V(G)| = n$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

$T(n) = \text{Laufzeit?}$
Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

$T(n) = \text{Laufzeit?}$
Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

$O(n)$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$$

$$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$$

$$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$$

$$M = M_L \cup M_R$$

$$\bar{V} = L \cup R$$
foreach $v \in S$ **do**

$$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$$

$$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$$
return M

$T(n) =$ **Laufzeit?**
 Worst-Case-Laufzeit für
 Graphen mit $|V(G)| = n$

$$O(n)$$

$$T(|L|)$$

$$T(|R|)$$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

$T(n) = \text{Laufzeit?}$

Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n})$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$T(n) =$ **Laufzeit?**
Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$O(n)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$T(|L|)$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$T(|R|)$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$O(\sqrt{n})$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

$\} O(n)$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$T(n) =$ **Laufzeit?**
Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$O(n)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$T(|L|)$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$T(|R|)$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$O(\sqrt{n})$

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

$\} O(n)$

return M

$T(n) \leq$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$T(n) =$ **Laufzeit?**
Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$O(n)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$T(|L|)$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$T(|R|)$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$O(\sqrt{n})$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

$\} O(n)$

return M

$T(n) \leq$

$T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2}$

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph G)

```

if  $|V(G)| < 5$  then  $O(1)$ 
| return BruteForceMatching( $G$ )
else

```

$T(n) =$ **Laufzeit?**
Worst-Case-Laufzeit für
Graphen mit $|V(G)| = n$

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$O(n)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$T(|L|)$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$T(|R|)$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$O(\sqrt{n})$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

$\} O(n)$

return M

$T(n) \leq \max \{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \}$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2})$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) \end{aligned}$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) \end{aligned}$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) \end{aligned}$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709\dots}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709\dots}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709\dots}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew.
 $T(n) \leq$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709\dots}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew. $T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode: siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709\dots}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew.

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\max \left\{ \frac{f(\alpha)}{\alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2}} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

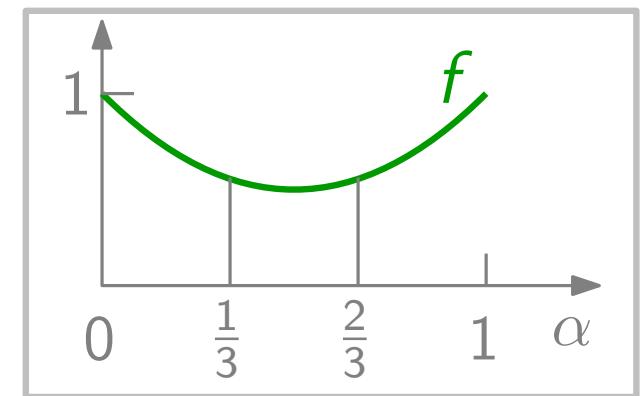
$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:



$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew. $T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\max \left\{ \boxed{\alpha^{3/2} + (1-\alpha)^{3/2}} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

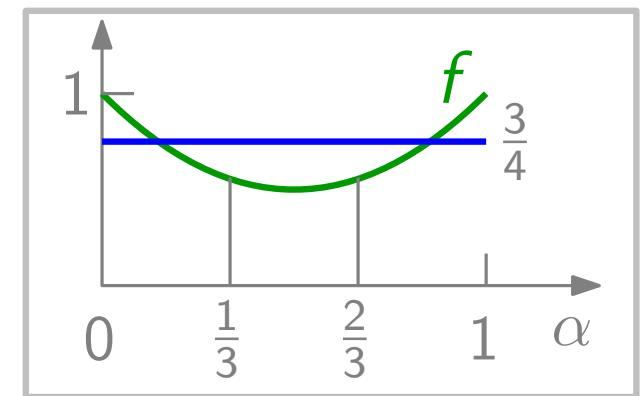
$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:



$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew.

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\max \left\{ \boxed{\alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2}} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

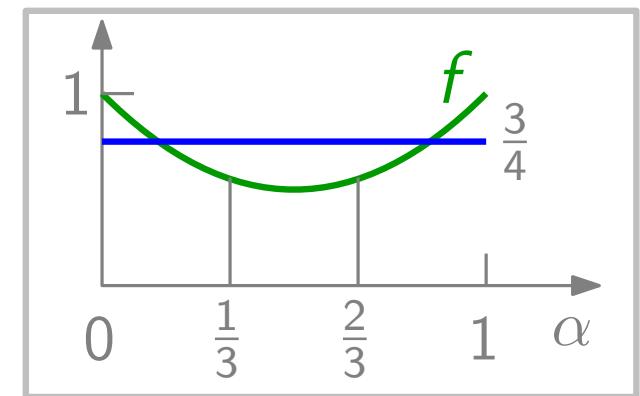
$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:



$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew.

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right)$$

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

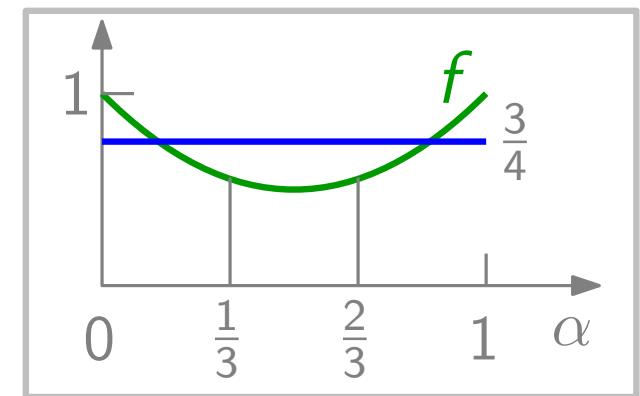
$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:



$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew.

$T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right)$

\Rightarrow Nimm $c' = 4c$!

Rekursions(un)gleichung lösen. . .

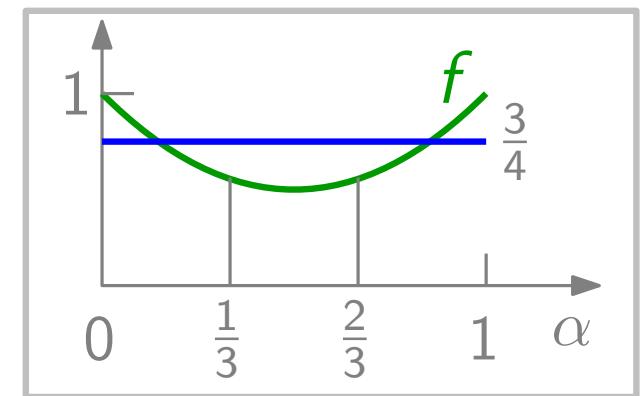
$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ &\in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1.709...}) \end{aligned}$$

Genauere Abschätzung:



$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c'n^{3/2} \left(\underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1-\alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right) \\ &\leq c'n^{3/2} \end{aligned}$$

\Rightarrow Nimm $c' = 4c!$ □

Ergebnis

Satz. In einem planaren Graphen mit n Knoten kann man in $O(n^{3/2})$ Zeit ein größtes Matching finden.

Ergebnis

Satz. In einem planaren Graphen mit n Knoten kann man in $O(n^{3/2})$ Zeit ein größtes Matching finden.

Zum Vergleich:

$$n = |V(G)|, m = |E(G)|$$

Größtes Matching

Bipartite Graphen $O(m\sqrt{n})$

[Hopcroft & Karp, 1973]

Allgemeine Graphen $O(m\sqrt{n})$

[Micali & Vazirani, 1980]

Schwerstes Matching

Planare Graphen $O(n^{3/2} \log n)$

[Lipton & Tarjan, 1980]

Allgemeine Graphen $O(mn \log n)$

[Gabow, 1975]

Ergebnis

Satz. In einem planaren Graphen mit n Knoten kann man in $O(n^{3/2})$ Zeit ein größtes Matching finden.

Zum Vergleich:

$$n = |V(G)|, m = |E(G)|$$

Größtes Matching

Bipartite Graphen	$O(m\sqrt{n})$	[Hopcroft & Karp, 1973]
Allgemeine Graphen	$O(m\sqrt{n})$	[Micali & Vazirani, 1980]

Schwerstes Matching

Planare Graphen*	$O(n^{3/2} \log n)$	[Lipton & Tarjan, 1980]
Allgemeine Graphen	$O(mn \log n)$	[Gabow, 1975]

*) Das Lemma gilt entsprechend für den gewichteten Fall, allerdings mit Laufzeit $O(m \log n)$ statt $O(m)$.