

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

9. Vorlesung

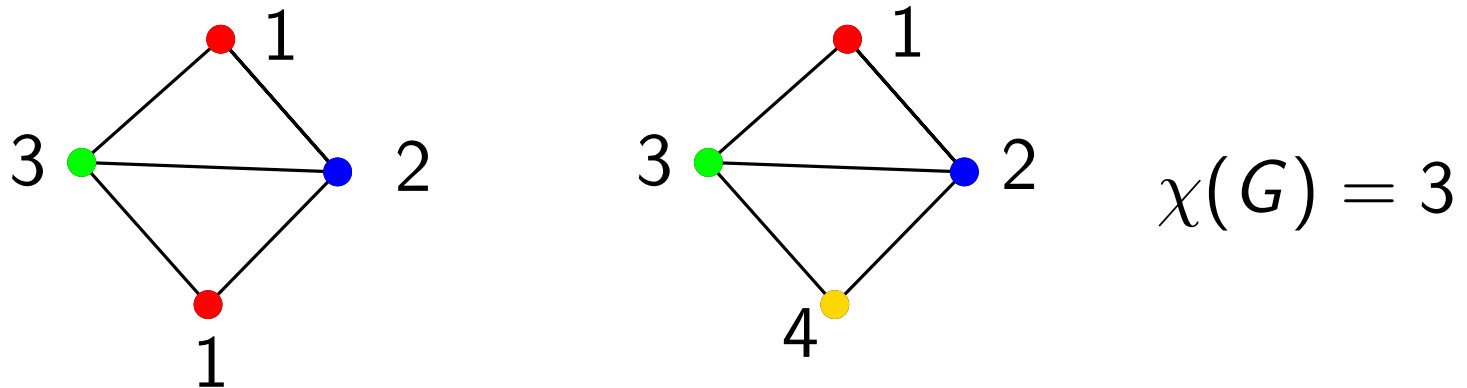
Färbungen, Cliques, unabhängige Mengen
und chordale Graphen

Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein Graph. Eine k -Färbung ist eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$,
so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt
chromatische Zahl von G .

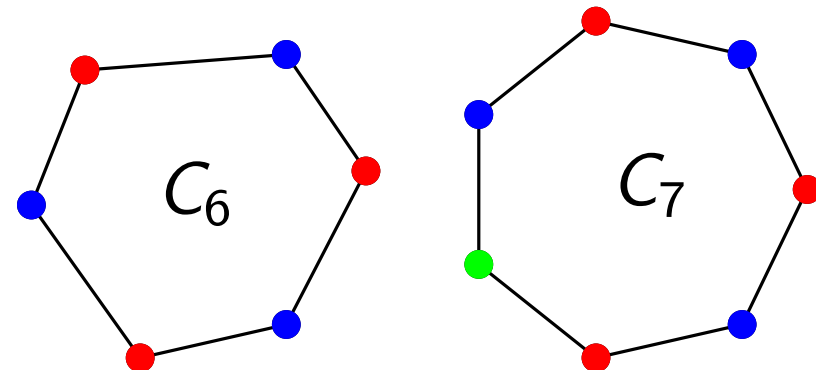
Bsp. 1



Bsp. 2

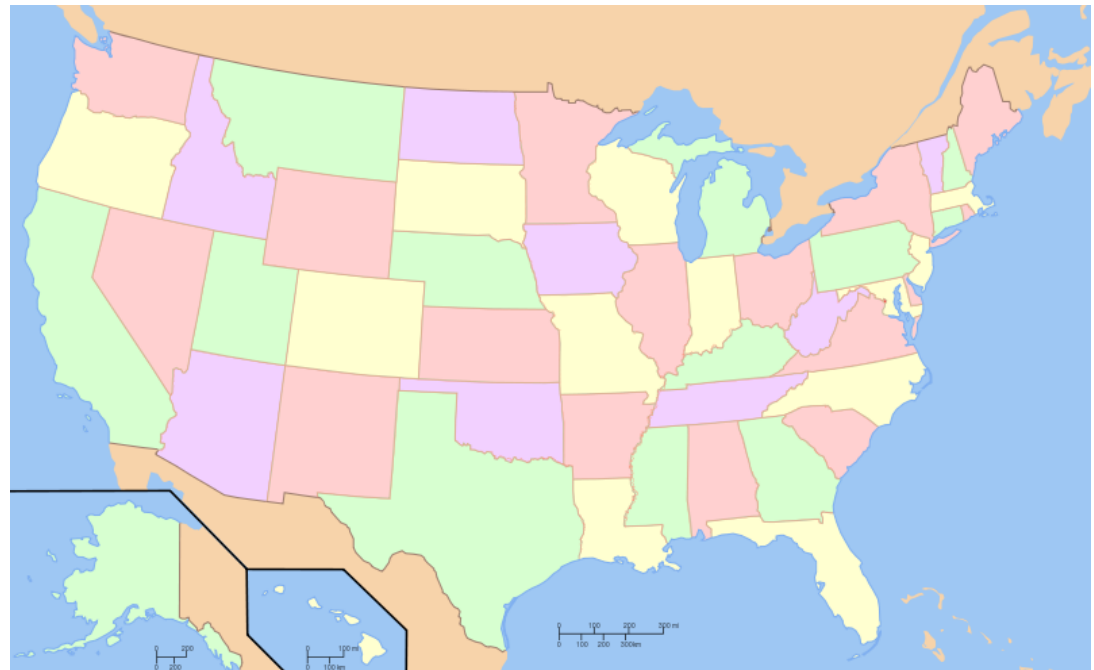
$$\chi(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kreis mit n Knoten



Anwendungen für Färbungen

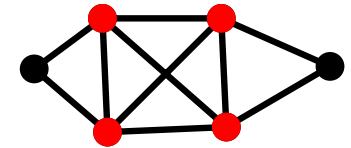
- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Knoten = Sender, Kanten entsprechen Interferenzen)
- Färben von politischen Landkarten (*planare* Graphen)
- Ablaufplanung (minimiere Makespan) bei Zugriff auf beschränkte Ressourcen
- ...



Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G .

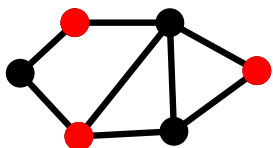


Beob₁. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$? $C_{2k+1}, k \geq 2$

Graph mit $\chi(G) = \omega(G)$? K_n , also $V(G)$ ist Clique.

Def. In einer *unabhängigen* (oder *stabilen*) Menge $I \subseteq V(G)$ gilt für jedes Paar $\{u, v\} \subseteq I$, dass $uv \notin E(G)$.



$\alpha(G) = \max\{|U| : U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$
heißt *Unabhängigkeitszahl* (o. *Stabilitätszahl*) von G .

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob₂. Sei f eine k -Färbung von G . Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \dots, k$ eine unabhängige Menge.

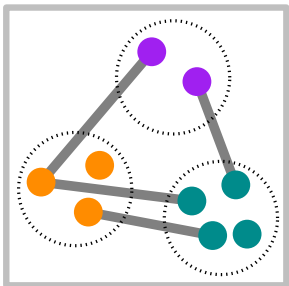
$$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$$

Kor. $\chi(G) \geq \max \{ \omega(G), n/\alpha(G) \}.$

Beob₃. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor.$

Beweis. Sei f eine k -Färbung von G mit $k = \chi(G)$
 Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.

(Sonst gäb's eine $(k-1)$ -Färbung!)



$$\Rightarrow |E(G)| \geq \frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow \chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}$$

□

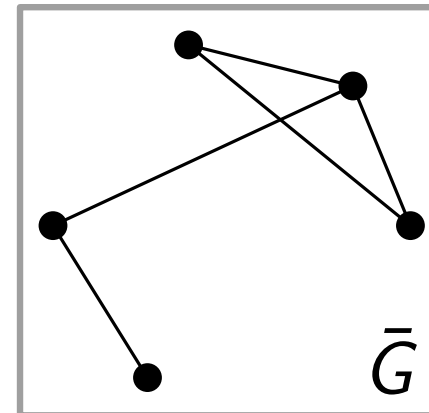
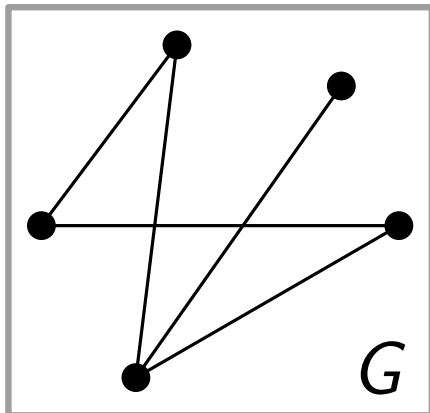
Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen
Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist \bar{G} mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
 $E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G .

Beob₄. Es gilt

- (i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$
- (ii) $\bar{\bar{G}} = G$
- (iii) S Clique in $G \Leftrightarrow S$ unabhängig in \bar{G}
- (iv) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ und $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$



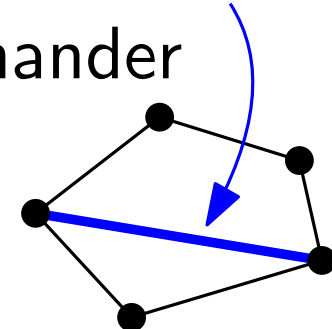
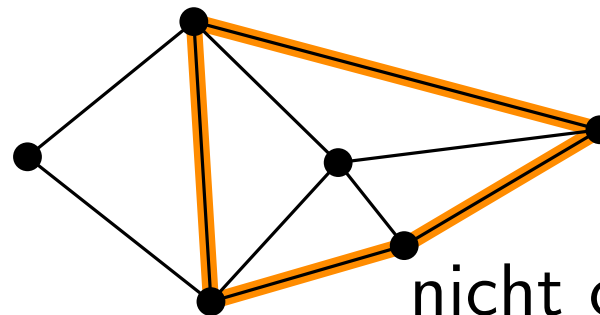
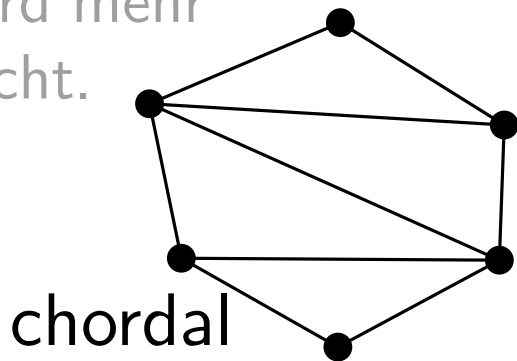
Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.

Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.



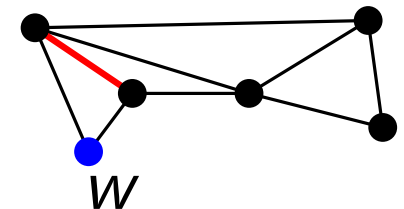
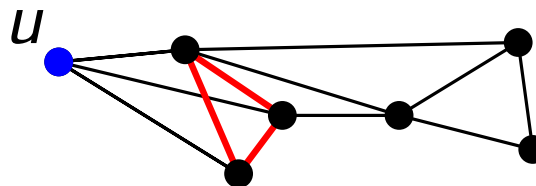
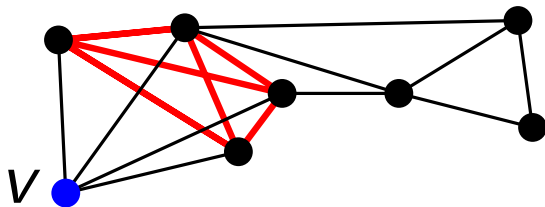
Simpliziale Knoten

Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G .

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
 [Dirac '61] (Beweis: später!)

ex. $U \subseteq V(G)$ mit $G[U] := (U, \{uv \in E(G) \mid u, v \in U\})$

Beob₅. G chordal \Rightarrow jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal
 $\Rightarrow G - v$ enthält ebenfalls einen simplizialen Knoten u
 und $G - \{v, u\}$ enthält einen simplizialen Knoten w, \dots



Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung (v_1, \dots, v_n) der Knotenmenge $V(G)$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \dots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$.

v_1 ist simplizial in $G[V(G)] = G$

v_2 ist simplizial in $G[V(G) - v_1] = G - v_1$

v_3 ist simplizial in $G - \{v_1, v_2\}$ usw.

Satz von Dirac und Beob₅ \Rightarrow

Jeder chordale Graph hat ein perfektes Eliminationsschema!

Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow G$ hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„ \Rightarrow “ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„ \Leftarrow “

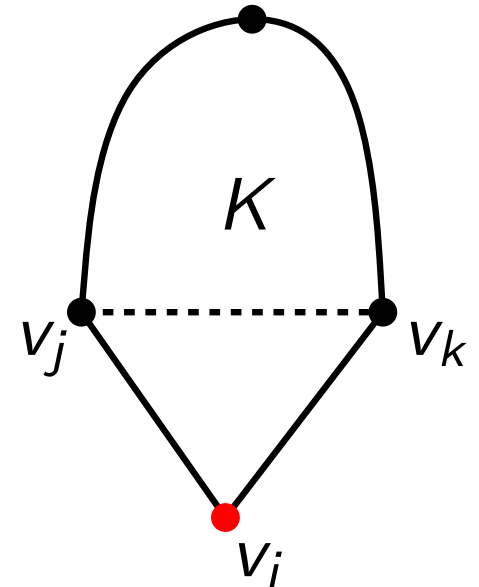
Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4 .

Sei $v_i \in K$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.

Die Nachbarn (v_j und v_k) von v_i auf K sind adjazent in G , da v_i simplizial in $G[v_i, \dots, v_n]$ und $j > i$ und $k > i$. \square

Perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac: $O(|V|^4) = O(|V| \cdot |V| \cdot |V|^2)$).

Mit mehr „Cleverness“ sogar *Linearzeit* möglich!

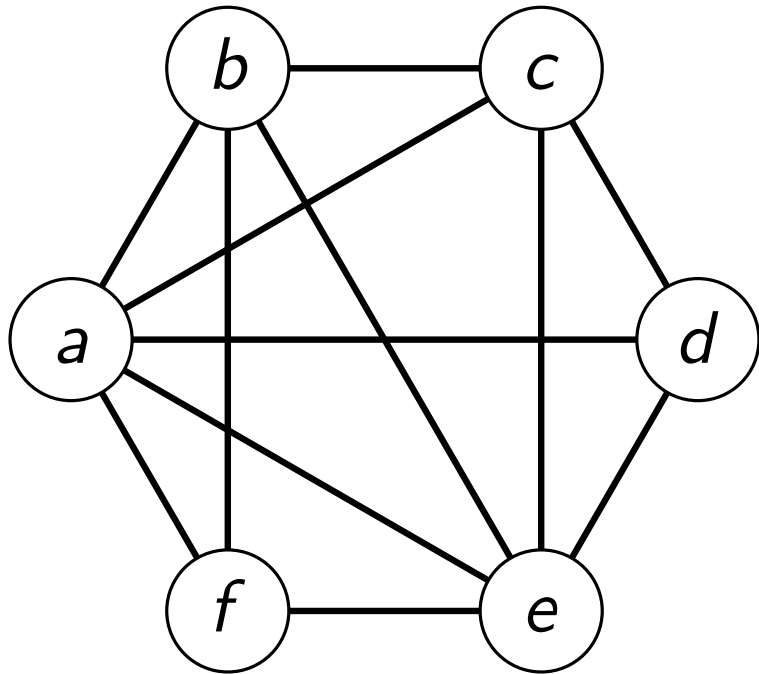


Anwendungen der Charakterisierung

1. Überprüfen von Chordalität.
2. Berechnen einer größten Clique bzw. der Cliquenzahl!
3. Bestimmen einer optimalen Färbung bzw. der chromatischen Zahl!

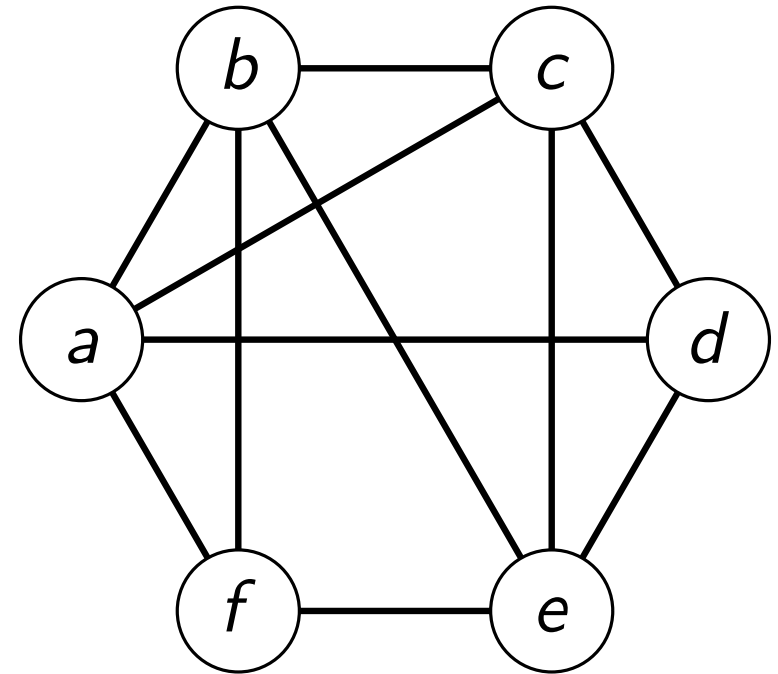
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



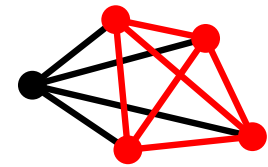
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



Der Graph (oder ein induzierter Teilgraph) hat keinen simplizialen Knoten!

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliques sind nicht-erweiterbar!

Lemma. Sei v_1, \dots, v_n perfektes Eliminationsschema.
Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i .

$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \dots, v_n]$.

$C \subseteq C'$, da i min.

$C = C'$, da C nicht-erweiterbar. □

\Rightarrow Es gibt höchstens n nicht-erweiterbare Cliques in G !

Also können wir eine größte Clique (und somit $\omega(G)$) in Polynomialzeit berechnen – durch Aufzählen dieser Cliques.

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n - 1, \dots, 1$: v_{i+1}, \dots, v_n bereits gefärbt
Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) \Rightarrow C_i$ ist Clique!

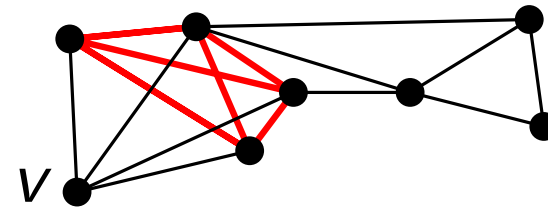
$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \Rightarrow$ Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$.

\Rightarrow Wir können v_i stets mit einer Farbe in $\{1, \dots, \omega(G)\}$ färben.

Wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ gilt, dass unsere Färbung optimal ist!

Satz. In chordalen Graphen kann man größte Cliques und optimale Färbungen effizient ermitteln.

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplicial*, falls $N(v)$ Clique in G .

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplicialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow \text{O.K.}$

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow \text{O.K.}$

Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

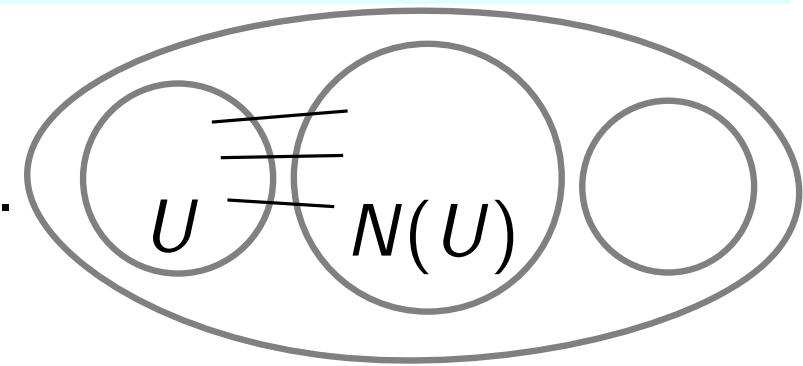
Wähle $U \subseteq V(G)$ mit *maximaler* Kardinalität, so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$ $N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U: ab \in E(G)\}$

Ein $U' \subseteq V(G)$ mit (i) und (ii) ex. immer:

z.B. $U' = \{u\} \Rightarrow v \notin U' \cup N(U')$.



Beweis (Fortsetzung)

Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
 aber $|U'| > |U| \Rightarrow \nexists$ zur Maximalität von U .

\Rightarrow Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden! (*)

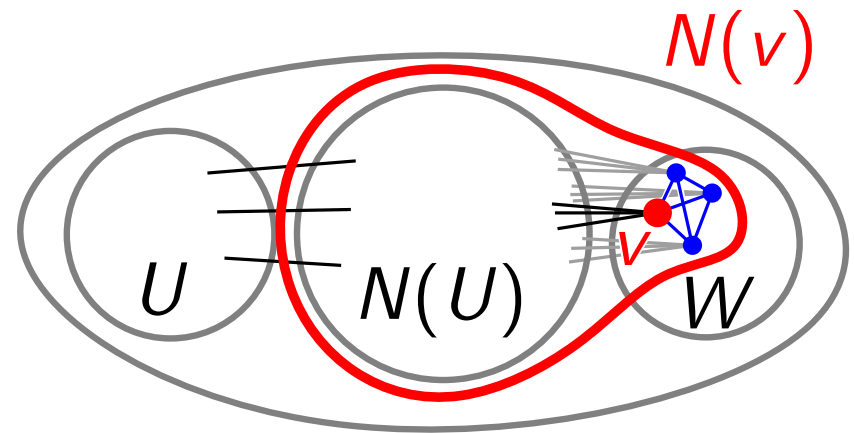
Beob₅. $\Rightarrow G[W]$ chordal $\xRightarrow{\text{I.V.}}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $N(v)$ Clique)

Beachte: $N(v) \cap W$ ist Clique, da v simplizial in $G[W]$.

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \forall w \in N(v) \cap W : N(w) \cap N(U) &= N(U) \\ &= N(v) \cap N(U) \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.



Beweis (Fortsetzung)

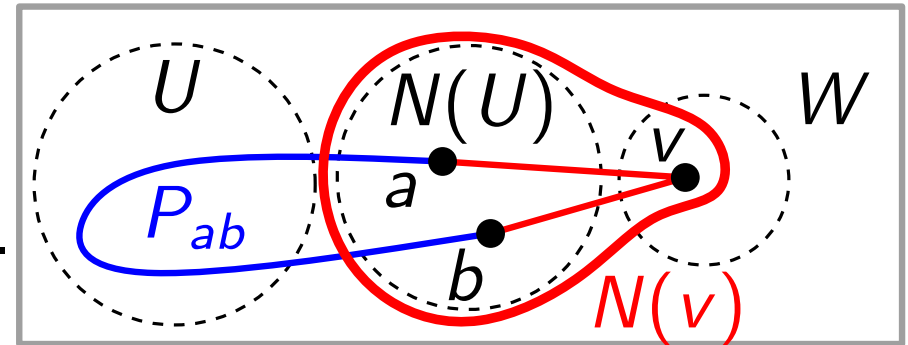
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

\Rightarrow es ex. a - b -Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} kürzester solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2 , da $ab \notin E(G)$.



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg. ⚡

$\Rightarrow N(U)$ ist eine Clique.

$\Rightarrow N(v)$ ist eine Clique.

$\Rightarrow v$ ist simplizialer Knoten in G .



Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für chordale Graphen gilt $\omega(G) = \chi(G)$. Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.
 \Rightarrow chordale Graphen sind perfekt!

Bsp. 2 Bipartite (2-färbbare) Graphen sind perfekt.

Auch in perfekten Graphen können $\omega(G)$ und $\chi(G)$ effizient bestimmt werden. Außerdem:

Satz. G ist genau dann perfekt, wenn \bar{G} perfekt ist.
[Lovász '72]

Satz. Die Berechnung von $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist für *perfekte* Graphen effizient möglich.

[Grötschel, Lovász, Schrijver '88]