



Julius-Maximilians-

**UNIVERSITÄT**  
**WÜRZBURG**

Lehrstuhl für

**INFORMATIK I**

Algorithmen & Komplexität



Institut für Informatik

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

9. Vorlesung

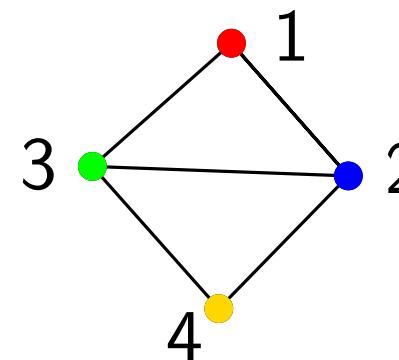
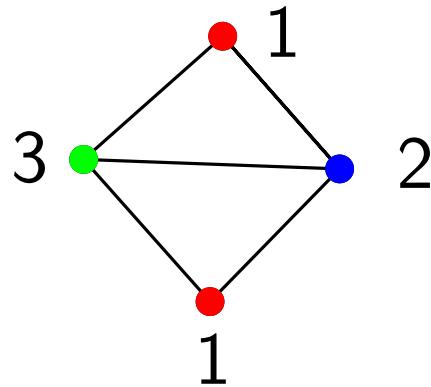
Färbungen, Cliquen, unabhängige Mengen  
und chordale Graphen

# Färbungen und chromatische Zahl

**Def.** Sei  $G$  ein Graph. Eine  $k$ -Färbung ist eine Abbildung  $f: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , so dass für alle  $uv \in E(G)$  gilt  $f(u) \neq f(v)$ .

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$  heißt *chromatische Zahl* von  $G$ .

**Bsp. 1**



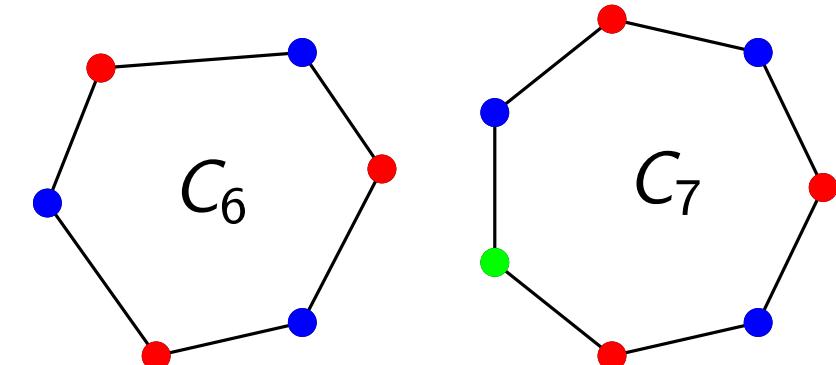
$$\chi(G) = 3$$

**Bsp. 2**

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

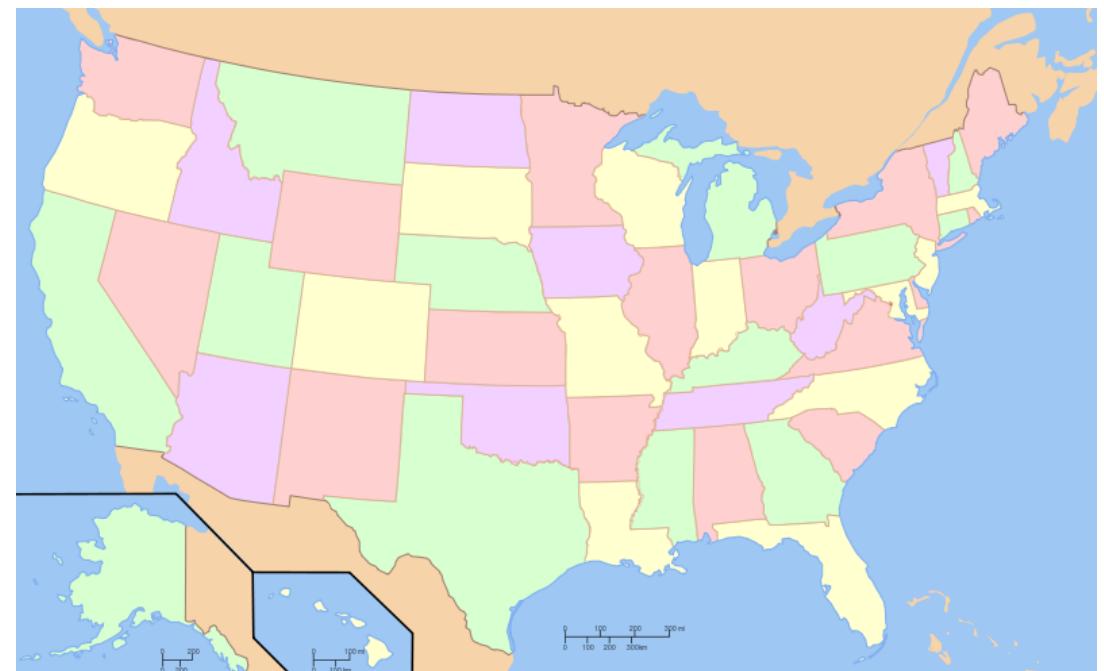
↑

Kreis mit  $n$  Knoten



# Anwendungen für Färbungen

- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Knoten = Sender, Kanten entsprechen Interferenzen)
- Färben von politischen Landkarten (*planare Graphen*)
- Ablaufplanung (minimiere Makespan) bei Zugriff auf beschränkte Ressourcen
- ...

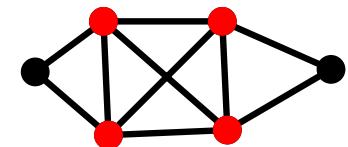


By User:Derfel73; User:Dbenbenn [CC BY-SA 3.0], via Wikimedia Commons

# Cliquen und unabhängige Mengen

**Def.** Eine *Clique* ist eine Menge  $C \subseteq V(G)$ , so dass für alle Paare  $\{u, v\} \subseteq C$  gilt, dass  $uv \in E(G)$ .

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$   
heißt *Cliquenzahl* von  $G$ .

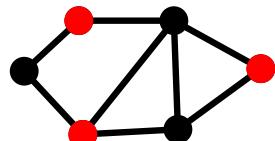


**Beob<sub>1</sub>.** Für jeden Graphen  $G$  gilt:  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

**Bsp.** Graph mit  $\chi(G) > \omega(G)$ ?  $C_{2k+1}, k \geq 2$

Graph mit  $\chi(G) = \omega(G)$ ?  $K_n$ , also  $V(G)$  ist Clique.

**Def.** In einer *unabhängigen* (oder *stabilen*) Menge  $I \subseteq V(G)$  gilt für jedes Paar  $\{u, v\} \subseteq I$ , dass  $uv \notin E(G)$ .



$\alpha(G) = \max\{|U| : U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$   
heißt *Unabhängigkeitszahl* (o. *Stabilitätszahl*) von  $G$ .

# Zusammenspiel (1)

Farbklassse

**Beob<sub>2</sub>.** Sei  $f$  eine  $k$ -Färbung von  $G$ . Dann ist  $f^{-1}(i) \subseteq V$  für  $i = 1, \dots, k$  eine unabhängige Menge.

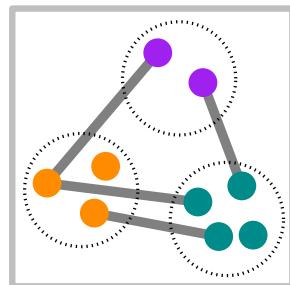
$$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$$

**Kor.**  $\chi(G) \geq \max \{\omega(G), n/\alpha(G)\}$ .

**Beob<sub>3</sub>.**  $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor$ .

**Beweis.** Sei  $f$  eine  $k$ -Färbung von  $G$  mit  $k = \chi(G)$   
Zwischen je 2 Farbklassen bzgl.  $f$  gibt's  $\geq 1$  Kante.

(Sonst gäb's eine  $(k - 1)$ -Färbung!)



$$\Rightarrow |E(G)| \geq \frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow \chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}$$

□

# Zusammenspiel (2)

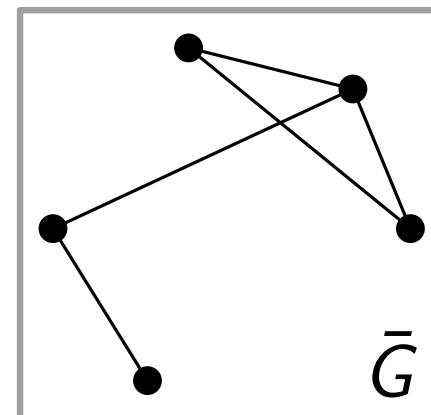
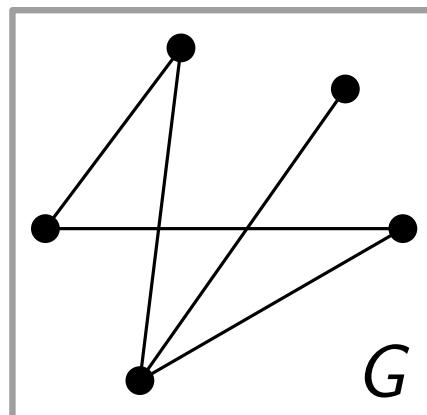
Menge aller 2-elementigen  
Teilmengen von  $V(G)$

**Def.** Sei  $G$  ein Graph.

Dann ist  $\bar{G}$  mit  $V(\bar{G}) = V(G)$  und  
 $E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$  der *Komplementgraph* von  $G$ .

**Beob<sub>4</sub>.** Es gilt

- (i)  $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$
- (ii)  $\bar{\bar{G}} = G$
- (iii)  $S$  Clique in  $G \Leftrightarrow S$  unabhängig in  $\bar{G}$
- (iv)  $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$  und  $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$



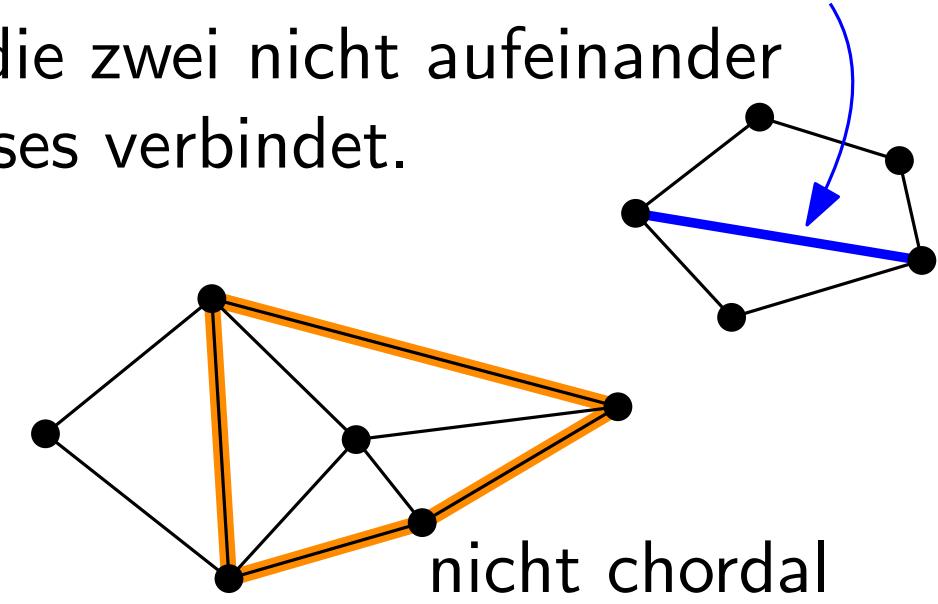
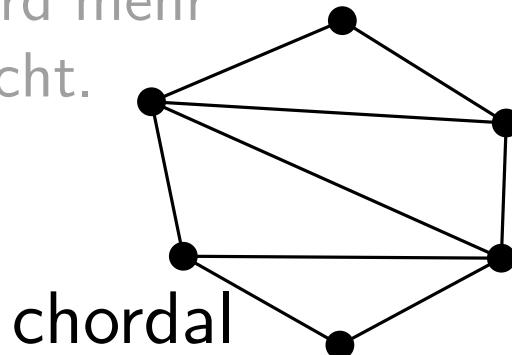
# Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen  $\alpha(G)$ ,  $\omega(G)$  und  $\chi(G)$  ist im Allgemeinen NP-schwer!

Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

**Def.** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge  $\geq 4$  mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.

Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.



# Simpliziale Knoten

**Def.** Knoten  $v$  heißt *simplizial*, falls  $N(v)$  Clique in  $G$ .

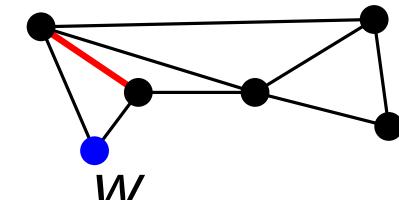
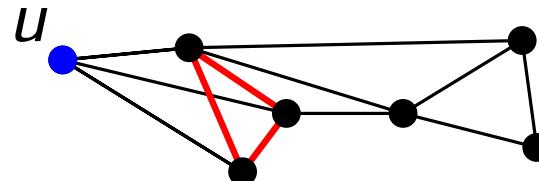
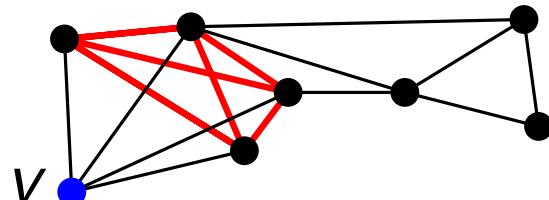
**Satz.** Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

[Dirac '61]

(Beweis: später!)

ex.  $U \subseteq V(G)$  mit  $G[U] := (U, \{uv \in E(G) \mid u, v \in U\})$

**Beob<sub>5</sub>.**  $G$  chordal  $\Rightarrow$  jeder induzierte Teilgraph von  $G$  ist chordal  
 $\Rightarrow G - v$  enthält ebenfalls einen simplizialen Knoten  $u$   
und  $G - \{v, u\}$  enthält einen simplizialen Knoten  $w, \dots$



# Perfektes Eliminationsschema

**Def.** Eine Nummerierung  $(v_1, \dots, v_n)$  der Knotenmenge  $V(G)$  heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für  $i = 1, \dots, n$  gilt:  $v_i$  ist simplizial in  $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ .

$v_1$  ist simplizial in  $G[V(G)] = G$

$v_2$  ist simplizial in  $G[V(G) - v_1] = G - v_1$

$v_3$  ist simplizial in  $G - \{v_1, v_2\}$  usw.

Satz von Dirac und Beob<sub>5</sub>  $\Rightarrow$

Jeder chordale Graph hat ein perfektes Eliminationsschema!

# Chordalität und Eliminationsschemata

**Satz.**  $G$  chordal  $\Leftrightarrow G$  hat perfektes Eliminationsschema

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„ $\Leftarrow$ “

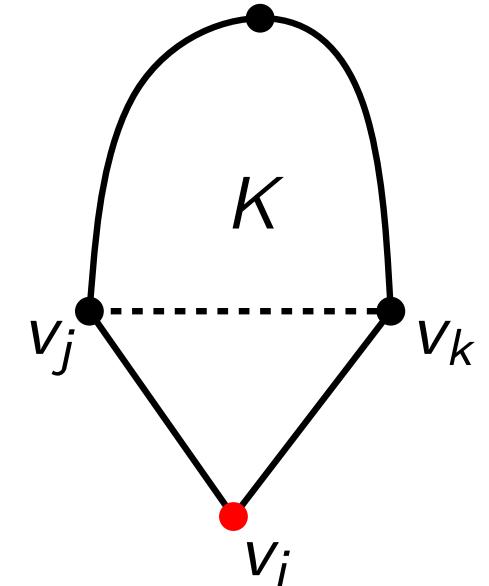
Sei  $K$  einfacher Kreis der Länge  $\geq 4$ .

Sei  $v_i \in K$  Knoten mit kleinster Nummer  $i$  im Eliminationsschema.

Die Nachbarn ( $v_j$  und  $v_k$ ) von  $v_i$  auf  $K$  sind adjazent in  $G$ , da  $v_i$  simplizial in  $G[v_i, \dots, v_n]$  und  $j > i$  und  $k > i$ . □

Perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac:  $O(|V|^4) = O(|V| \cdot |V| \cdot |V|^2)$ ).

Mit mehr „Cleverness“ sogar Linearzeit möglich!

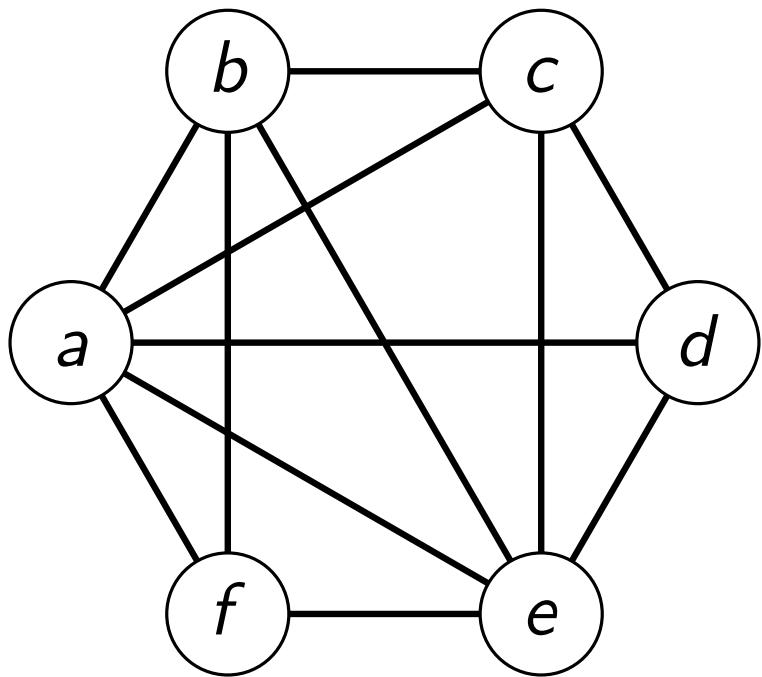


# Anwendungen der Charakterisierung

1. Überprüfen von Chordalität.
2. Berechnen einer größten Clique bzw. der Cliquenzahl!
3. Bestimmen einer optimalen Färbung bzw. der chromatischen Zahl!

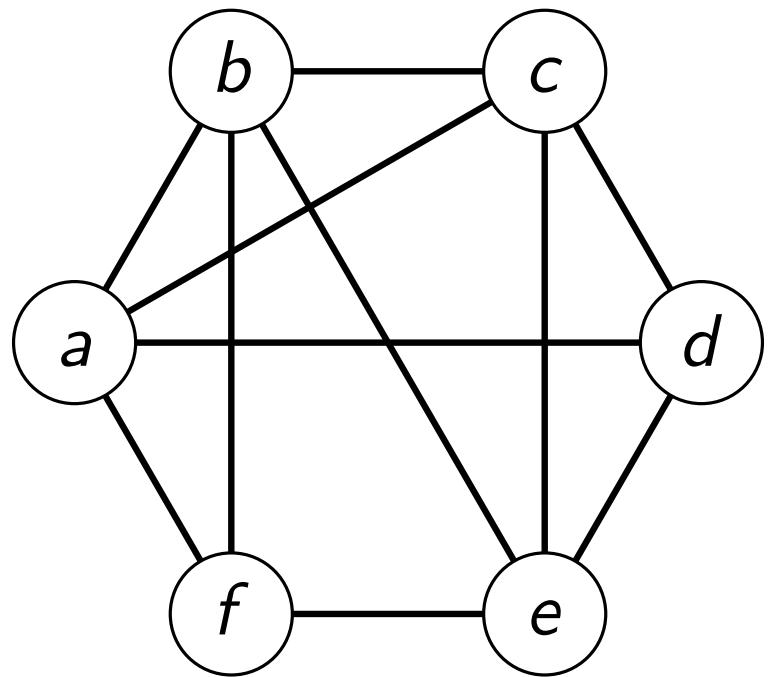
# Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



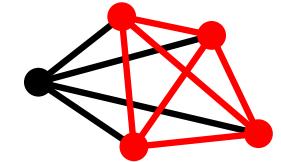
Der Graph hat das Eliminationsschema  $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$ .

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



Der Graph (oder ein induzierter Teilgraph) hat keinen simplizialen Knoten!

# Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliques sind nicht-erweiterbar!

**Lemma.** Sei  $v_1, \dots, v_n$  perfektes Eliminationsschema.

Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in  $G$  die Form  $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$ .

*Beweis.* Sei  $C$  nicht-erweiterbar und  $v_i \in C$  mit kleinstem  $i$ .

$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$  ist Clique, da  $v_i$  simplizial in  $G[v_i, \dots, v_n]$ .

$C \subseteq C'$ , da  $i$  min.

$C = C'$ , da  $C$  nicht-erweiterbar. □

⇒ Es gibt höchstens  $n$  nicht-erweiterbare Cliques in  $G$ !

Also können wir eine größte Clique (und somit  $\omega(G)$ ) in Polynomialzeit berechnen – durch Aufzählen dieser Cliques.

# Berechnung einer optimalen Färbung

- Färbe  $v_n$  mit 1.
- Für  $i = n - 1, \dots, 1$ :  $v_{i+1}, \dots, v_n$  bereits gefärbt  
Färbe  $v_i$  mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei  $C_i = \{v_i\} \cup (\textcolor{blue}{N}(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) \Rightarrow C_i$  ist Clique!

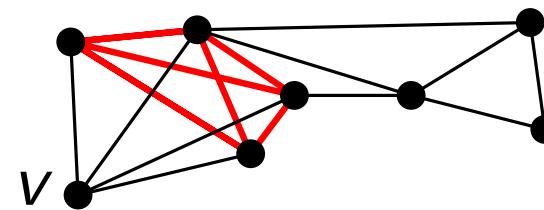
$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \Rightarrow$  Also  $|\textcolor{blue}{N}(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$ .

$\Rightarrow$  Wir können  $v_i$  stets mit einer Farbe in  $\{1, \dots, \omega(G)\}$  färben.

Wegen  $\omega(G) \leq \chi(G)$  gilt, dass unsere Färbung optimal ist!

**Satz.** In chordalen Graphen kann man größte Cliques und optimale Färbungen effizient ermitteln.

# Satz von Dirac



**Def.** Knoten  $v$  heißt *simplizial*, falls  $N(v)$  Clique in  $G$ .

[Dirac '61]

**Satz.** Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

**Beweis.** Sei  $G$  ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über  $n = |V(G)|$ .

IA:  $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$  O.K.

IS:  $n \geq 2$ . Falls  $G$  vollständiger Graph  $\Rightarrow$  O.K.

Ansonsten existiert  $u \neq v$  mit  $uv \notin E(G)$ .

Wähle  $U \subseteq V(G)$  mit *maximaler* Kardinalität, so dass

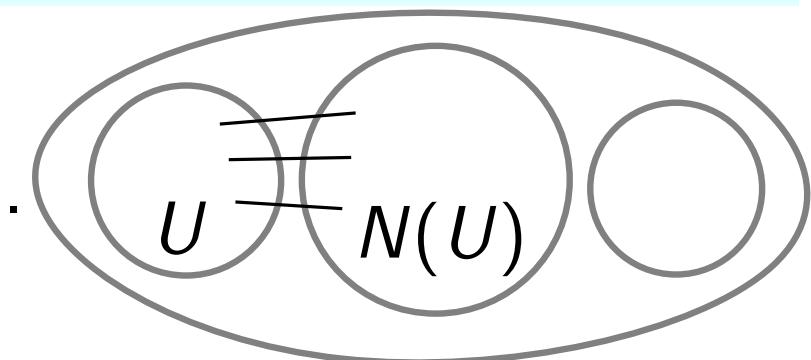
(i)  $G[U]$  zusammenhängend

(ii)  $U \cup N(U) \neq V(G)$

$$N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U: ab \in E(G)\}$$

Ein  $U' \subseteq V(G)$  mit (i) und (ii) ex. immer:

z.B.  $U' = \{u\} \Rightarrow v \notin U' \cup N(U')$ .



# Beweis (Fortsetzung)

Sei  $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$ .

Für jedes  $x \in N(U)$ :  $W \subseteq N(x)$ .

Andernfalls:  $U' := U \cup \{x\}$ ,  $G[U']$  zshgd.,  $U' \cup N(U') \neq V(G)$   
aber  $|U'| > |U| \Rightarrow \not\downarrow$  zur Maximalität von  $U$ .

$\Rightarrow$  Jeder Knoten in  $W$  ist mit jedem in  $N(U)$  verbunden! (\*)

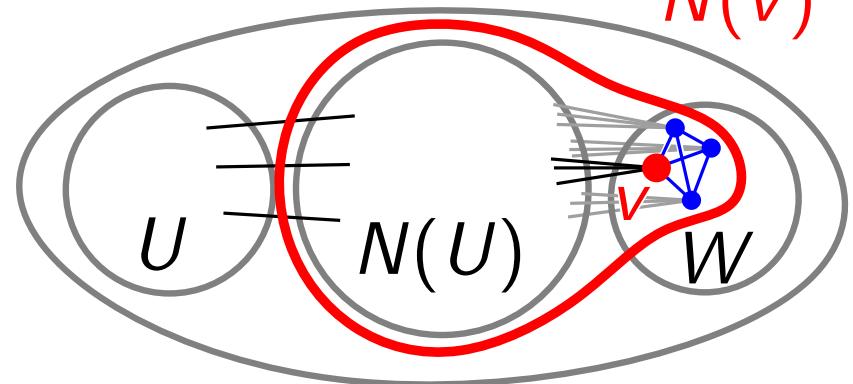
Beob<sub>5</sub>.  $\Rightarrow G[W]$  chordal  $\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$  ex.  $v \in W$  simplizial in  $G[W]$

Behauptung:  $v$  simplizial in  $G$  (also  $N(v)$  Clique)

Beachte:  $N(v) \cap W$  ist Clique, da  $v$  simplizial in  $G[W]$ .

(\*)  $\Rightarrow \forall w \in N(v) \cap W : N(w) \cap N(U) = N(U)$   
 $= N(v) \cap N(U)$

Bleibt zu zeigen, dass  $N(U)$  Clique ist.



# Beweis (Fortsetzung)

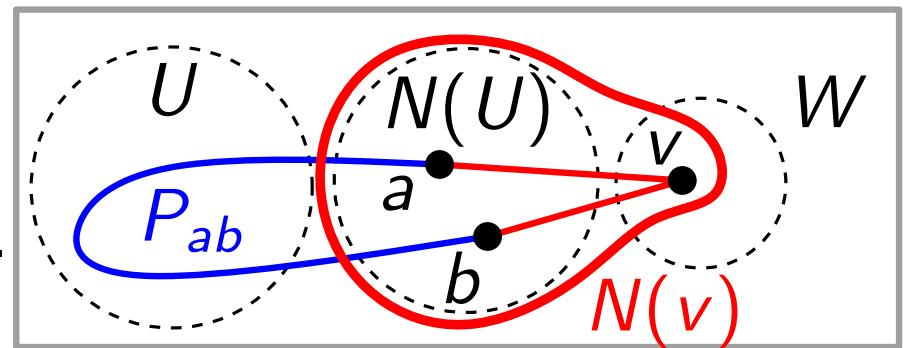
Bleibt zu zeigen, dass  $N(U)$  Clique ist.

Angenommen es ex.  $a \neq b$  in  $N(U)$  mit  $ab \notin E(G)$ .

$\Rightarrow$  es ex.  $a$ - $b$ -Weg  $P_{ab}$  in  $G[U \cup \{a, b\}]$ , da  $G[U]$  zshgd.

oBdA  $P_{ab}$  kürzester solcher Weg.

$P_{ab}$  hat Länge  $\geq 2$ , da  $ab \notin E(G)$ .



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$  ist einfacher Kreis der Länge  $\geq 4$

$C$  hat keine Sehne, da  $v \notin N(U)$  und  $P_{ab}$  kürzester Weg. \lightning

$\Rightarrow N(U)$  ist eine Clique.

$\Rightarrow N(v)$  ist eine Clique.

$\Rightarrow v$  ist simplizialer Knoten in  $G$ .  $\square$

# Ausblick: Perfekte Graphen

**Def.** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen  $H$  von  $G$  gilt:  $\omega(H) = \chi(H)$ .

**Bsp. 1** Für chordale Graphen gilt  $\omega(G) = \chi(G)$ . Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.  
 $\Rightarrow$  chordale Graphen sind perfekt!

**Bsp. 2** Bipartite (2-färbare) Graphen sind perfekt.

Auch in perfekten Graphen können  $\omega(G)$  und  $\chi(G)$  effizient bestimmt werden. Außerdem:

**Satz.**  $G$  ist genau dann perfekt, wenn  $\bar{G}$  perfekt ist.  
 [Lovász '72]

**Satz.** Die Berechnung von  $\alpha(G)$ ,  $\omega(G)$  und  $\chi(G)$  ist für *perfekte* Graphen effizient möglich.  
 [Grötschel, Lovász, Schrijver '88]