Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

9. Vorlesung

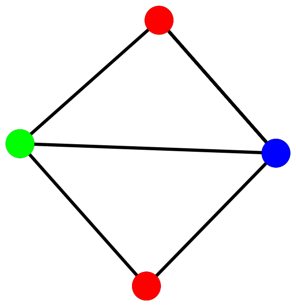
Färbungen, Cliquen, unabhängige Mengen und chordale Graphen

Diana Sieper

Lehrstuhl für Informatik I

Färbungen und chromatische Zahl

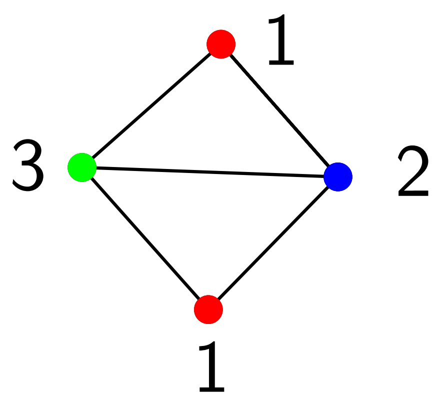
Bsp. 1



Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein Graph. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung
$f\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$,
so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

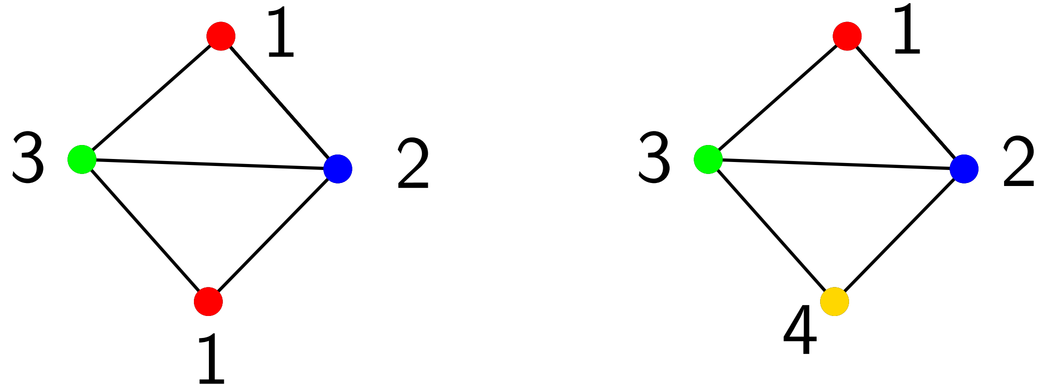
Bsp. 1



Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein Graph. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung
$f : V(G) \to \{1, \dots, k\}$,
so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

Bsp. 1

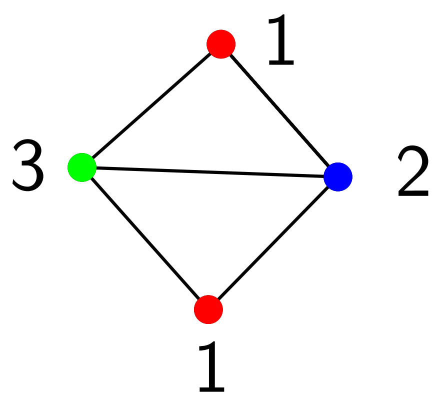


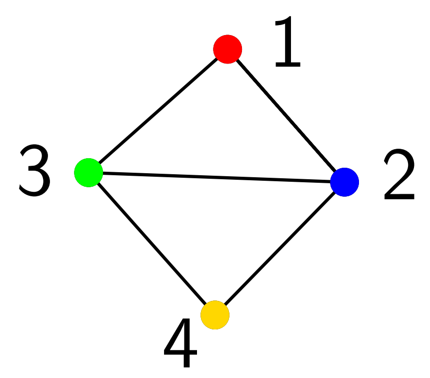
Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein Graph. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung
$f\colon V(G) \to \{1,\dots,k\}$,
so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt *chromatische Zahl* von G.

Bsp. 1



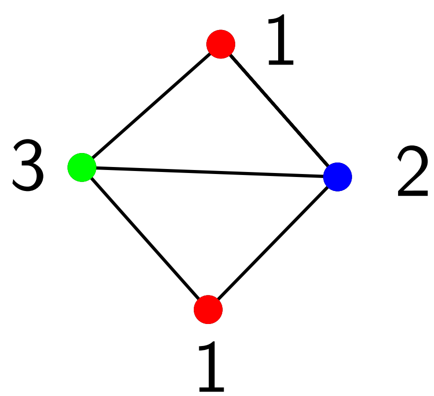


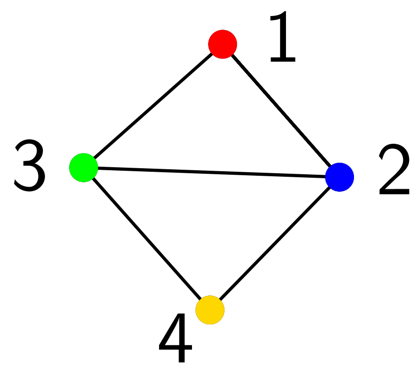
Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein Graph. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung $f\colon V(G) \to \{1,\ldots,k\}$, so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt *chromatische Zahl* von G.

Bsp. 1





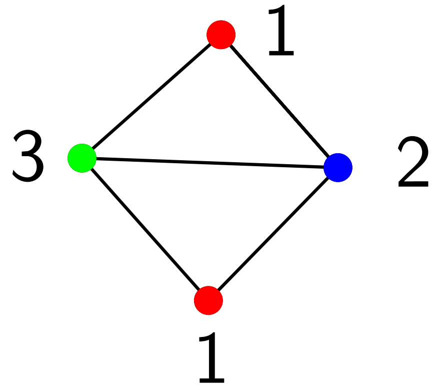
$\chi(G) = 3$

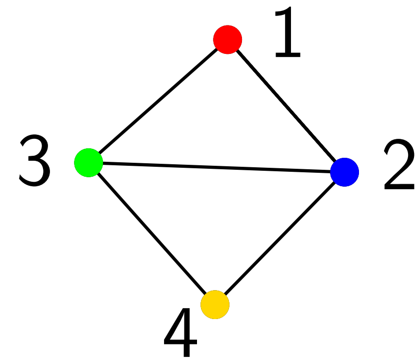
Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein Graph. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung
$f\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$,
so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt *chromatische Zahl* von G.

Bsp. 1



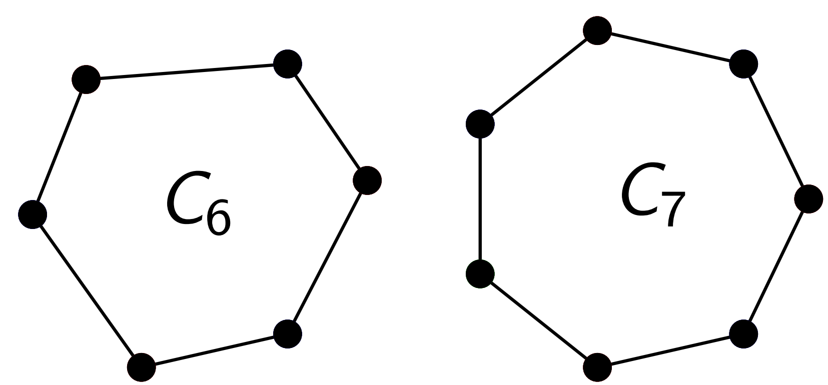


$\chi(G) = 3$

Bsp. 2

$\chi(C_n) =$

Kreis mit n Knoten

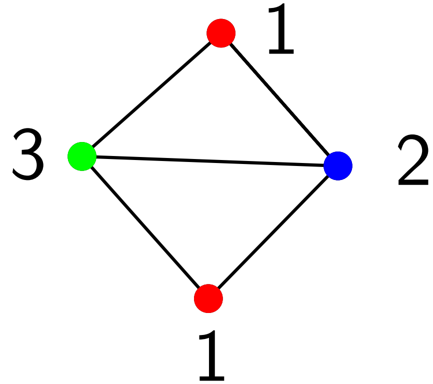


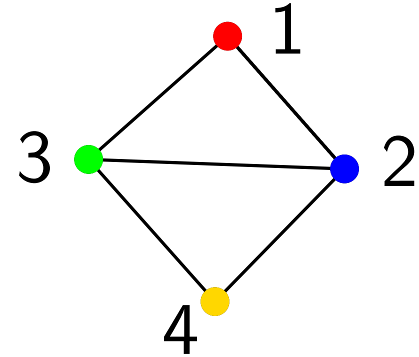
Färbungen und chromatische Zahl

Def. Sei G ein Graph. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung
$f\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$,
so dass für alle $uv \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

$\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt *chromatische Zahl* von G.

Bsp. 1



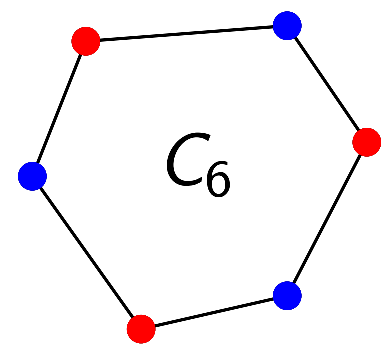


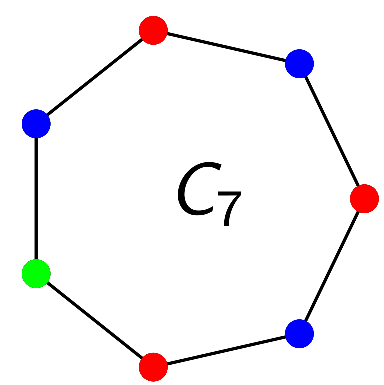
$\chi(G) = 3$

Bsp. 2

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kreis mit n Knoten



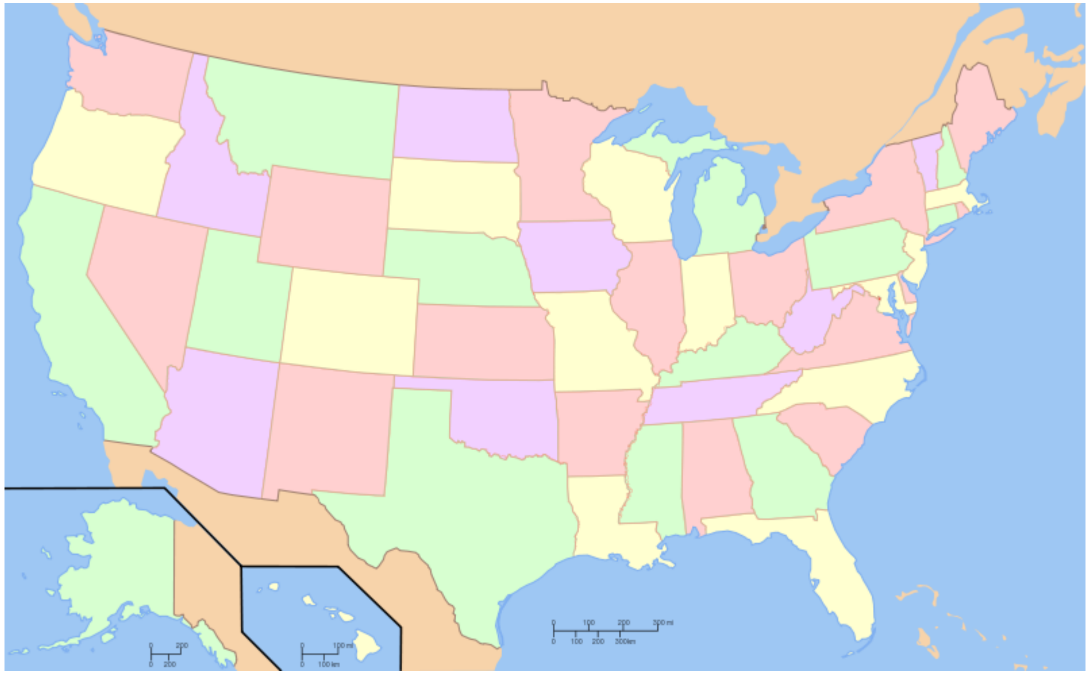


Anwendungen für Färbungen

- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Knoten = Sender, Kanten entsprechen Interferenzen)

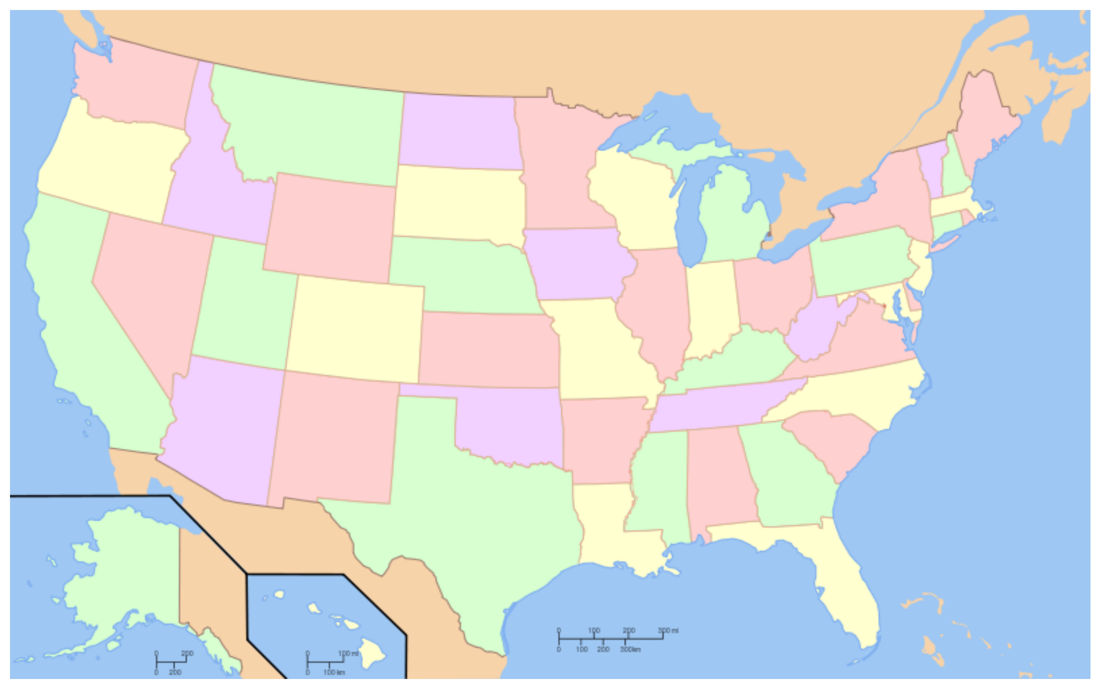
Anwendungen für Färbungen

- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Knoten = Sender, Kanten entsprechen Interferenzen)
- Färben von politischen Landkarten (*planare* Graphen)



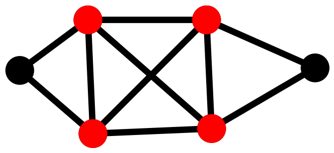
Anwendungen für Färbungen

- Frequenzzuweisung bei Mobilfunk (Knoten = Sender, Kanten entsprechen Interferenzen)
- Färben von politischen Landkarten (*planare* Graphen)
- Ablaufplanung (minimiere Makespan) bei Zugriff auf beschränkte Ressourcen
- …



Cliquen und unabhängige Mengen

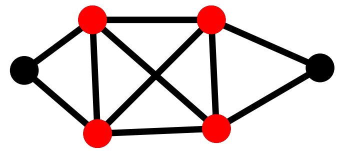
Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.



Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

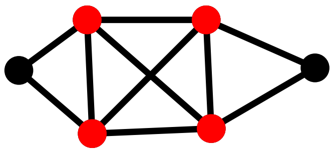
$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G.



Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| \colon C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G.



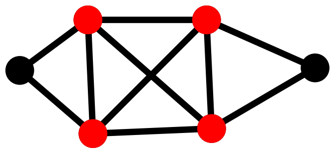
Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \quad \omega(G)$.

? $\leq, \geq, <, >, =$

Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$ heißt *Cliquenzahl* von G.

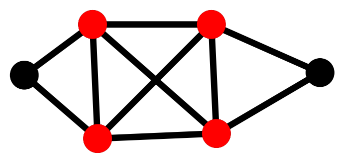


Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| \colon C \text{ ist Clique in } G\}$ heißt *Cliquenzahl* von G.



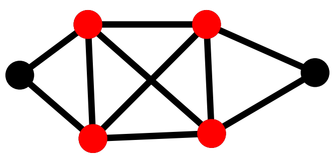
Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$?

Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$,
so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| \colon C \text{ ist Clique in } G\}$
heißt *Cliquenzahl* von G.



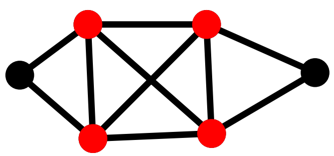
Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$? $C_{2k+1}, k \geq 2$

Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| \colon C \text{ ist Clique in } G\}$ heißt *Cliquenzahl* von G.



Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

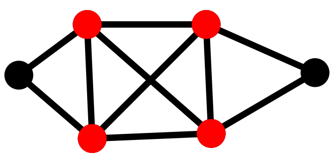
Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$? $C_{2k+1}, k \geq 2$

Graph mit $\chi(G) = \omega(G)$?

Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$ heißt *Cliquenzahl* von G.



Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

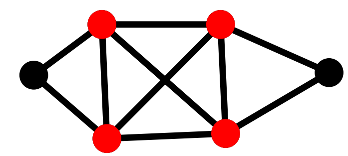
Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$? $C_{2k+1}, k \geq 2$

Graph mit $\chi(G) = \omega(G)$? K_n, also $V(G)$ ist Clique.

Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| \colon C \text{ ist Clique in } G\}$ heißt *Cliquenzahl* von G.

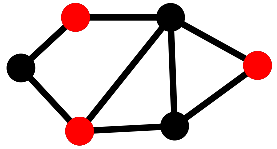


Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$? $C_{2k+1}, k \geq 2$

Graph mit $\chi(G) = \omega(G)$? K_n, also $V(G)$ ist Clique.

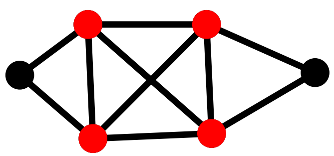
Def. In einer *unabhängigen* (oder *stabilen*) *Menge* $I \subseteq V(G)$ gilt für jedes Paar $\{u, v\} \subseteq I$, dass $uv \notin E(G)$.



Cliquen und unabhängige Mengen

Def. Eine *Clique* ist eine Menge $C \subseteq V(G)$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \subseteq C$ gilt, dass $uv \in E(G)$.

$\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$ heißt *Cliquenzahl* von G.

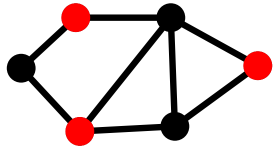


Beob$_1$. Für jeden Graphen G gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Bsp. Graph mit $\chi(G) > \omega(G)$? $C_{2k+1}, k \geq 2$

Graph mit $\chi(G) = \omega(G)$? K_n, also $V(G)$ ist Clique.

Def. In einer *unabhängigen* (oder *stabilen*) *Menge* $I \subseteq V(G)$ gilt für jedes Paar $\{u, v\} \subseteq I$, dass $uv \notin E(G)$.



$\alpha(G) = \max\{|U| : U \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$ heißt *Unabhängigkeitszahl* (o. *Stabilitätszahl*) von G.

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G)$

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob₂. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \ \Rightarrow n \leq$

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \;\Rightarrow n \leq \quad k \cdot \alpha(G)$

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \;\Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \dots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \;\Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Kor. $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Kor. $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Beob$_3$. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor$.

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Kor. $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Beob$_3$. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor$.

Beweis. Sei f eine k-Färbung von G mit $k = \chi(G)$

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

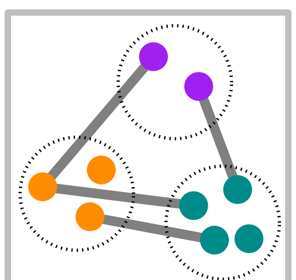
Beob₂. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \;\Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Kor. $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Beob₃. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor$.

Beweis. Sei f eine k-Färbung von G mit $k = \chi(G)$
Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.



Zusammenspiel (1)

Farbklasse

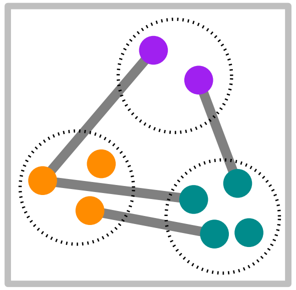
Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \dots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \le \alpha(G) \;\Rightarrow n \le \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Kor. $\chi(G) \ge \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Beob$_3$. $\chi(G) \le \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor$.

Beweis. Sei f eine k-Färbung von G mit $k = \chi(G)$



Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.

(Sonst gäb's eine $(k-1)$-Färbung!)

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

Beob$_2$. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \dots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

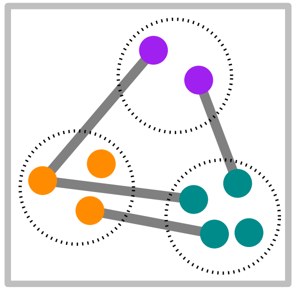
Kor. $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Beob$_3$. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor$.

Beweis. Sei f eine k-Färbung von G mit $k = \chi(G)$

Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.

(Sonst gäb's eine $(k-1)$-Färbung!)



$\Rightarrow |E(G)| \geq \frac{k(k-1)}{2}$

Zusammenspiel (1)

Farbklasse

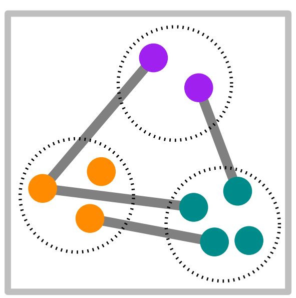
Beob₂. Sei f eine k-Färbung von G. Dann ist $f^{-1}(i) \subseteq V$ für $i = 1, \ldots, k$ eine unabhängige Menge.

$\Rightarrow |f^{-1}(i)| \leq \alpha(G) \;\Rightarrow n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Kor. $\chi(G) \geq \max\{\omega(G), n/\alpha(G)\}$.

Beob₃. $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}} \right\rfloor$.

Beweis. Sei f eine k-Färbung von G mit $k = \chi(G)$



Zwischen je 2 Farbklassen bzgl. f gibt's ≥ 1 Kante.

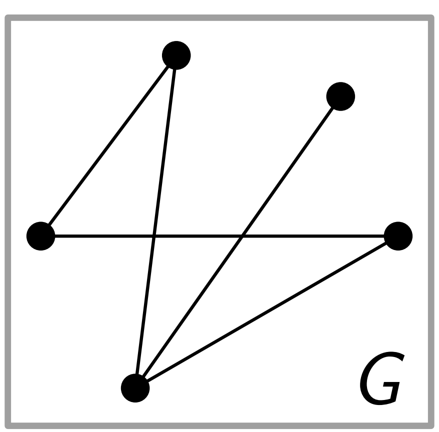
(Sonst gäb's eine $(k-1)$-Färbung!)

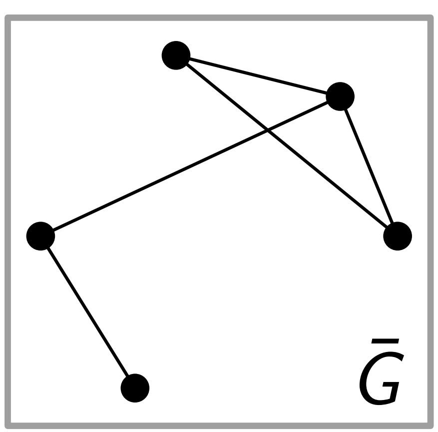
$\Rightarrow |E(G)| \geq \frac{k(k-1)}{2} \;\Rightarrow \chi(G) = k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}$

$\square$

Zusammenspiel (2)

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.

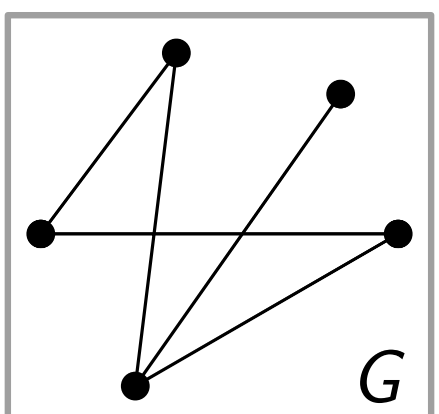


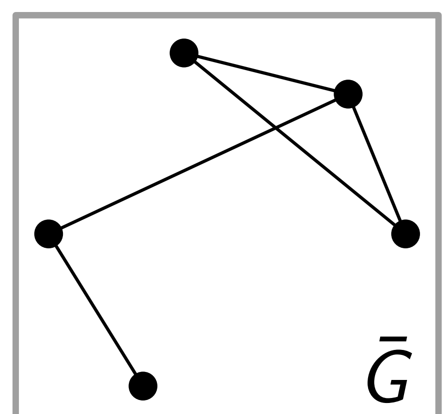


Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.





Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.

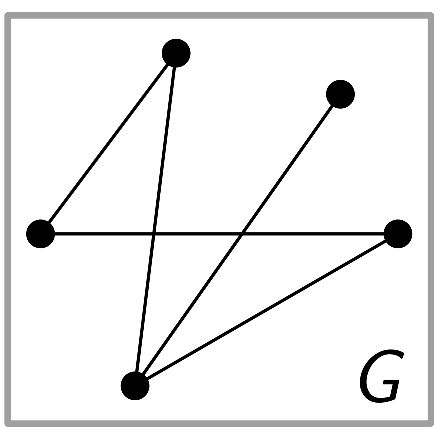
Beob$_4$. Es gilt

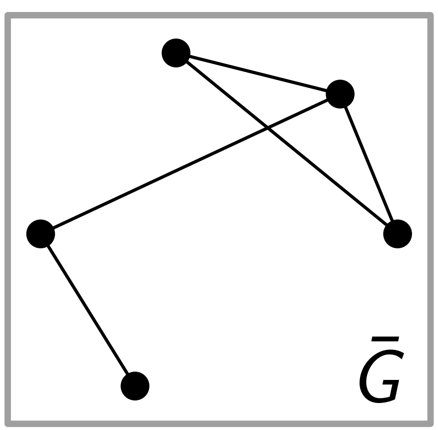
(i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| =$

(ii) $\bar{\bar{G}} =$

(iii) S Clique in $G \Leftrightarrow$

(iv) $\omega(G) =$



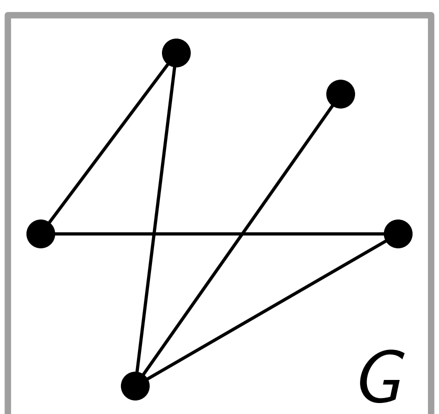


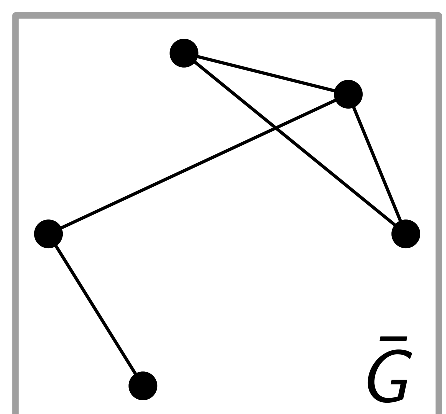
Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.

Beob$_4$. Es gilt
(i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$
(ii) $\bar{\bar{G}} =$
(iii) S Clique in $G \Leftrightarrow$
(iv) $\omega(G) =$



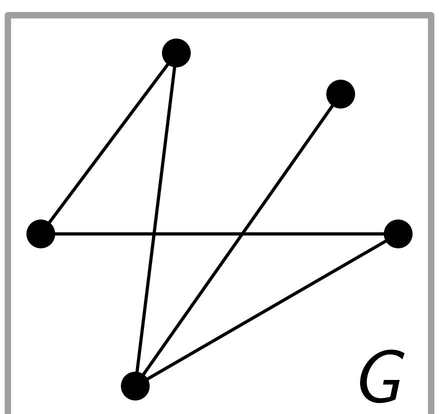


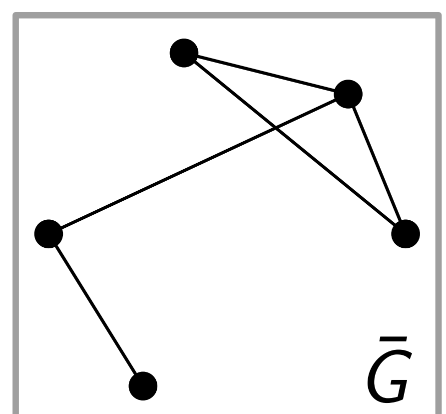
Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.

Beob$_4$. Es gilt
(i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$
(ii) $\bar{\bar{G}} = G$
(iii) S Clique in $G \Leftrightarrow$
(iv) $\omega(G) =$





Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.

Beob$_4$. Es gilt
(i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$
(ii) $\bar{\bar{G}} = G$
(iii) S Clique in $G \Leftrightarrow S$ unabhängig in $\bar{G}$
(iv) $\omega(G) =$

Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.

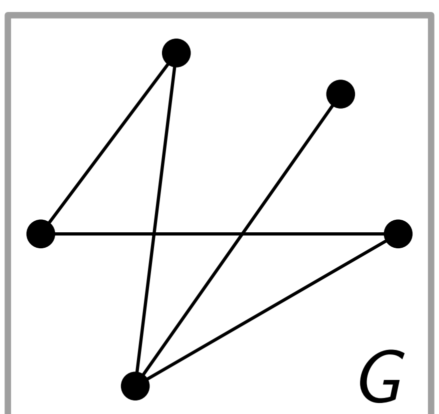
Beob$_4$. Es gilt

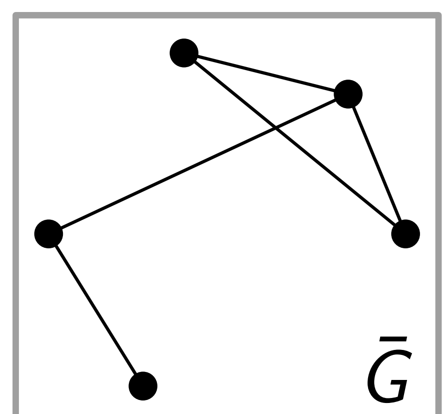
(i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$

(ii) $\bar{\bar{G}} = G$

(iii) S Clique in $G \Leftrightarrow S$ unabhängig in $\bar{G}$

(iv) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ und





Zusammenspiel (2)

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$

Def. Sei G ein Graph.
Dann ist $\bar{G}$ mit $V(\bar{G}) = V(G)$ und
$E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ der *Komplementgraph* von G.

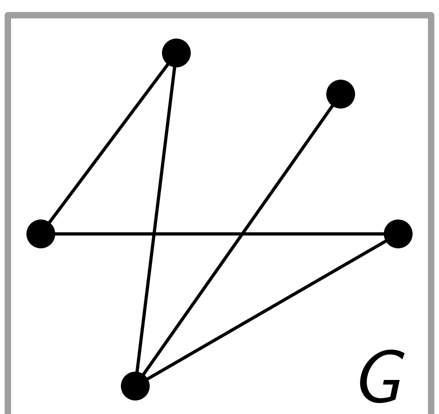
Beob$_4$. Es gilt

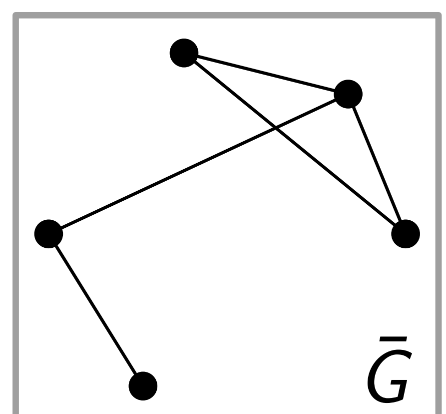
(i) $|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$

(ii) $\bar{\bar{G}} = G$

(iii) S Clique in $G \Leftrightarrow S$ unabhängig in $\bar{G}$

(iv) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ und $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$





Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

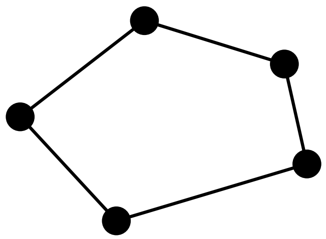
Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.

Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.



Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.

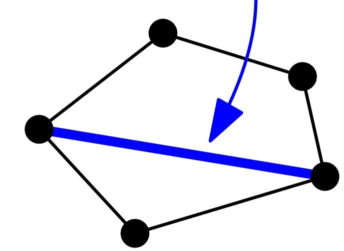
Chordale Graphen

Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.

Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.

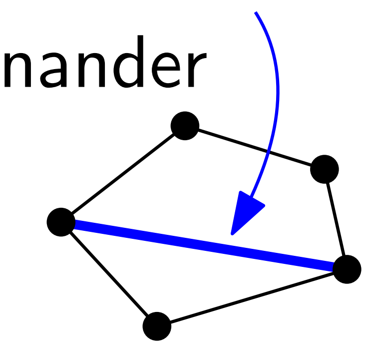


Chordale Graphen

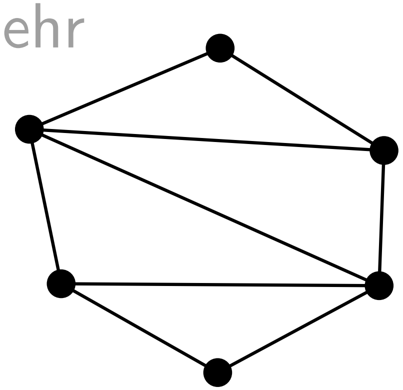
Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

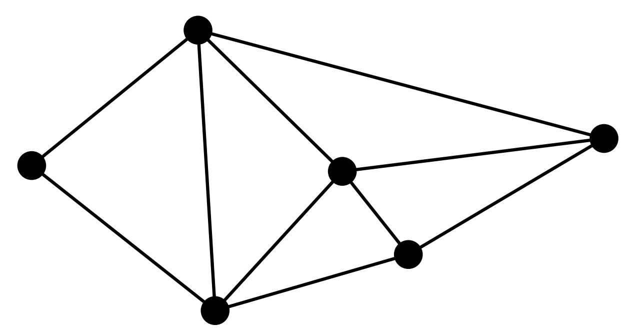
Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.



Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.



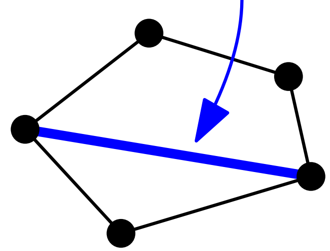


Chordale Graphen

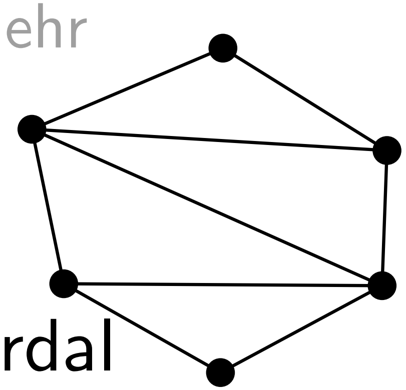
Berechnung der Zahlen $\alpha(G)$, $\omega(G)$ und $\chi(G)$ ist im Allgemeinen NP-schwer!

Wir beschäftigen uns nun mit einer Graphklasse, für die diese Zahlen effizient bestimmt werden können.

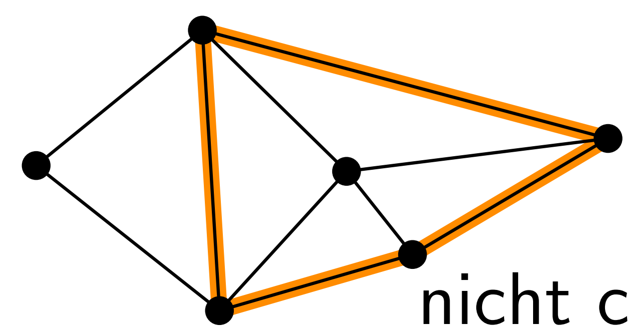
Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *chordal*, wenn jeder einfache Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine *Sehne* besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet.



Kein Knoten wird mehr als einmal besucht.



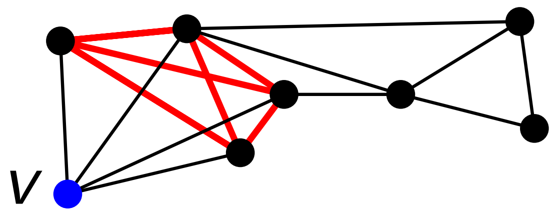
chordal



nicht chordal

Simpliziale Knoten

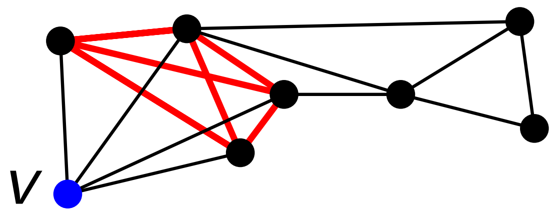
Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.



Simpliziale Knoten

Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
[Dirac '61]

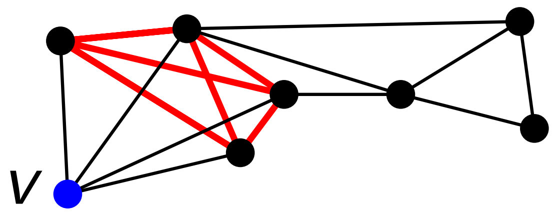


Simpliziale Knoten

Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

[Dirac '61] (Beweis: später!)

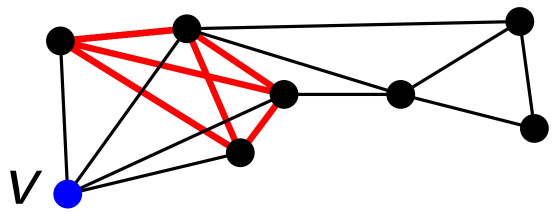


Simpliziale Knoten

Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
[Dirac '61] (Beweis: später!)

Beob$_5$. G chordal $\Rightarrow$ jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal



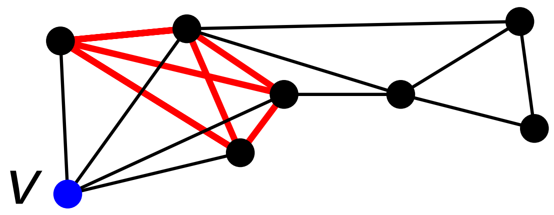
Simpliziale Knoten

Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
[Dirac '61] (Beweis: später!)

ex. $U \subseteq V(G)$ mit $G[U] :=$
$(U, \{uv \in E(G) \mid u, v \in U\})$

Beob$_5$. G chordal $\Rightarrow$ jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal



Simpliziale Knoten

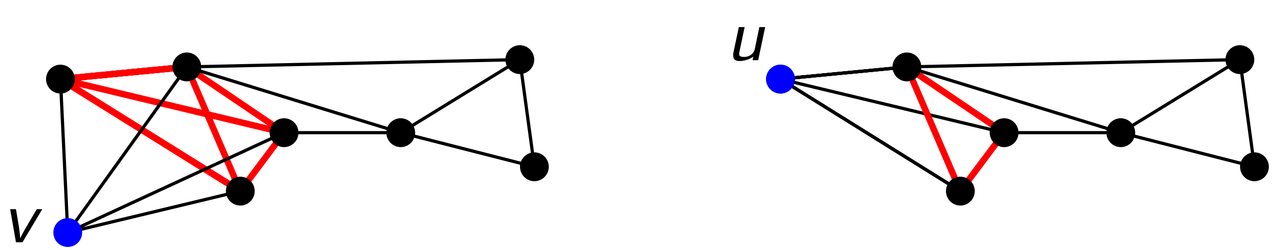
Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
[Dirac '61] (Beweis: später!)

ex. $U \subseteq V(G)$ mit $G[U] :=$
$(U, \{uv \in E(G) \mid u, v \in U\})$

Beob$_5$. G chordal $\Rightarrow$ jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal

$\Rightarrow$ $G - v$ enthält ebenfalls einen simplizialen Knoten u



Simpliziale Knoten

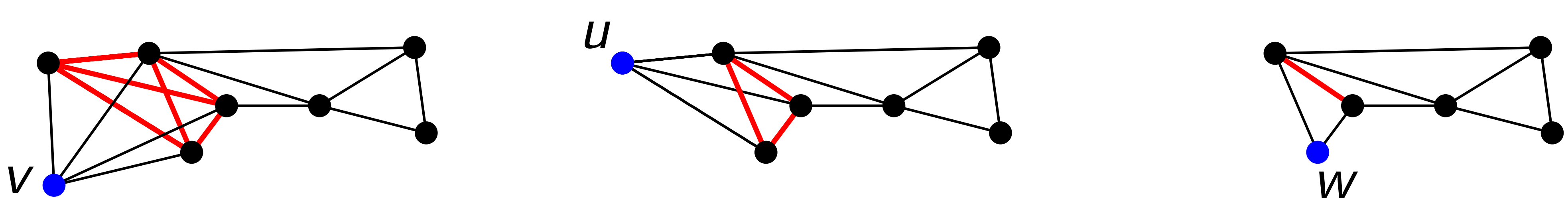
Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
[Dirac '61] (Beweis: später!)

ex. $U \subseteq V(G)$ mit $G[U] :=$
$(U, \{uv \in E(G) \mid u, v \in U\})$

Beob$_5$. G chordal $\Rightarrow$ jeder induzierte Teilgraph von G ist chordal

$\Rightarrow$ $G - v$ enthält ebenfalls einen simplizialen Knoten u
und $G - \{v, u\}$ enthält einen simplizialen Knoten w, ...



Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \dots, v_n)$ der Knotenmenge $V(G)$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \dots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$.

Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge $V(G)$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$.

v_1 ist simplizial in $G[V(G)] = G$

Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge $V(G)$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$.

v_1 ist simplizial in $G[V(G)] = G$

v_2 ist simplizial in $G[V(G) - v_1] = G - v_1$

Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \dots, v_n)$ der Knotenmenge $V(G)$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \dots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$.

v_1 ist simplizial in $G[V(G)] = G$

v_2 ist simplizial in $G[V(G) - v_1] = G - v_1$

v_3 ist simplizial in $G - \{v_1, v_2\}$ usw.

Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge $V(G)$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$.

v_1 ist simplizial in $G[V(G)] = G$

v_2 ist simplizial in $G[V(G) - v_1] = G - v_1$

v_3 ist simplizial in $G - \{v_1, v_2\}$ usw.

Satz von Dirac und Beob$_5$ $\Rightarrow$

Perfektes Eliminationsschema

Def. Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge $V(G)$ heißt *perfektes Eliminationsschema*, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$.

v_1 ist simplizial in $G[V(G)] = G$

v_2 ist simplizial in $G[V(G) - v_1] = G - v_1$

v_3 ist simplizial in $G - \{v_1, v_2\}$ usw.

Satz von Dirac und Beob$_5$ $\Rightarrow$

Jeder chordale Graph hat ein perfektes Eliminationsschema!

Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„$\Leftarrow$“

Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4.

Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

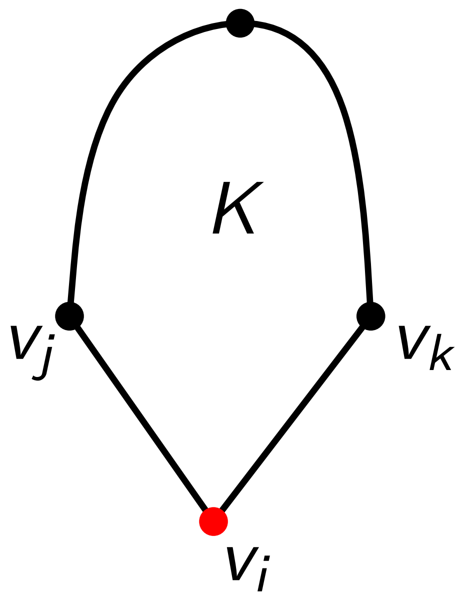
Beweis.

„$\Rightarrow$“ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„$\Leftarrow$“

Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4.

Sei $v_i \in K$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.



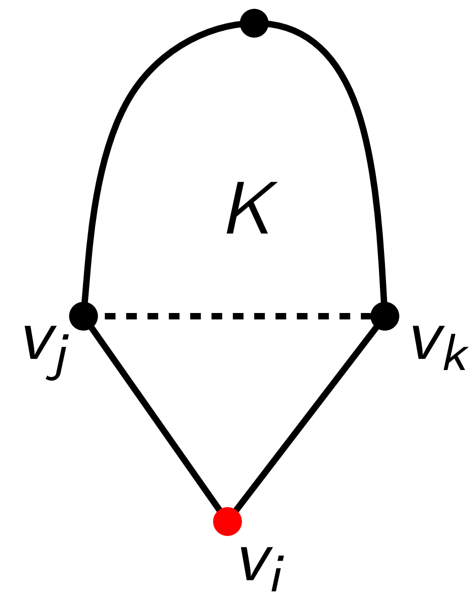
Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„$\Leftarrow$“



Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4.

Sei $v_i \in K$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.

Die Nachbarn (v_j und v_k) von v_i auf K sind adjazent in G, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$ und $j > i$ und $k > i$. $\square$

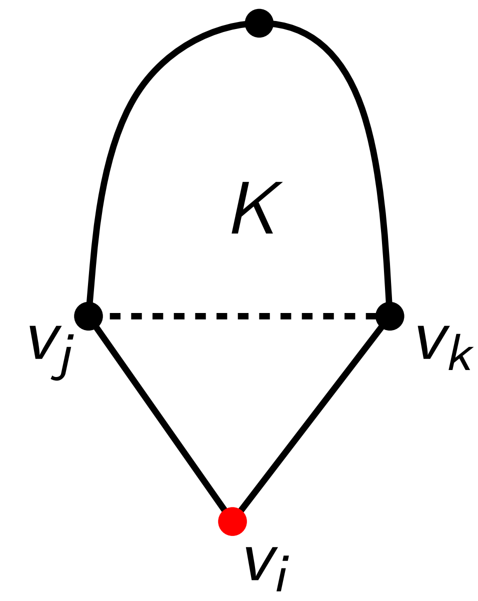
Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„$\Leftarrow$“



Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4.

Sei $v_i \in K$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.

Die Nachbarn (v_j und v_k) von v_i auf K sind adjazent in G, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$ und $j > i$ und $k > i$. $\square$

Perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac: $O(|V|^4) = O(|V| \cdot |V| \cdot |V|^2)$).

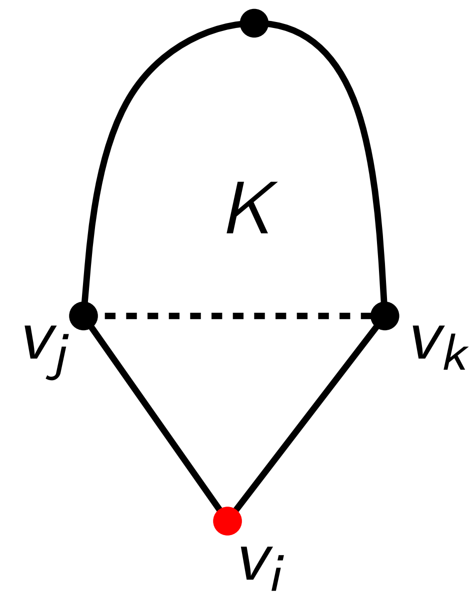
Chordalität und Eliminationsschemata

Satz. G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Iteriere Dirac (vgl. vorherige Folie)

„$\Leftarrow$“



Sei K einfacher Kreis der Länge ≥ 4.

Sei $v_i \in K$ Knoten mit kleinster Nummer i im Eliminationsschema.

Die Nachbarn (v_j und v_k) von v_i auf K sind adjazent in G, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$ und $j > i$ und $k > i$. $\square$

Perfektes Eliminationsschema lässt sich in Polynomialzeit errechnen. (Iteriere Dirac: $O(|V|^4) = O(|V| \cdot |V| \cdot |V|^2)$).

Mit mehr „Cleverness“ sogar *Linearzeit* möglich!

Anwendungen der Charakterisierung

1. Überprüfen von Chordalität.

Anwendungen der Charakterisierung

1. Überprüfen von Chordalität.

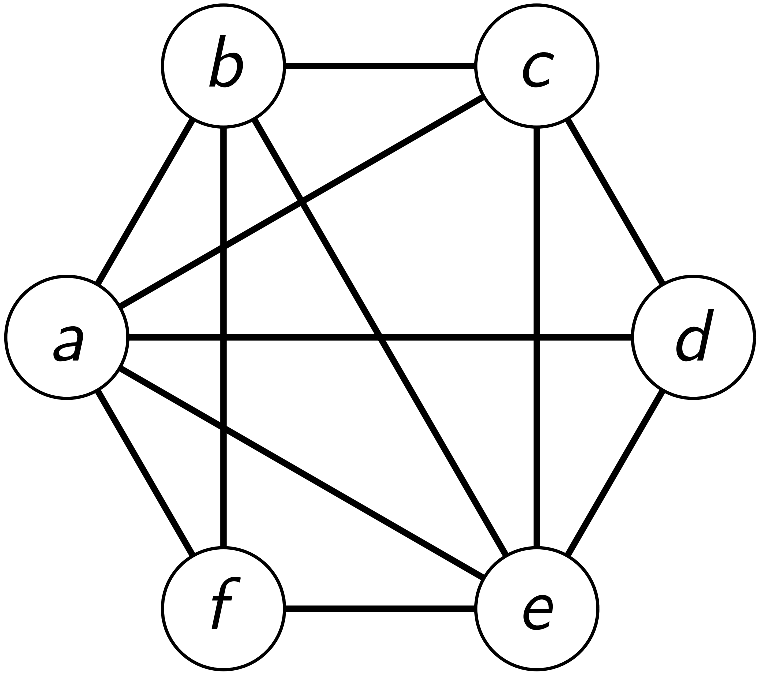
2. Berechnen einer größten Clique bzw. der Cliquenzahl!

Anwendungen der Charakterisierung

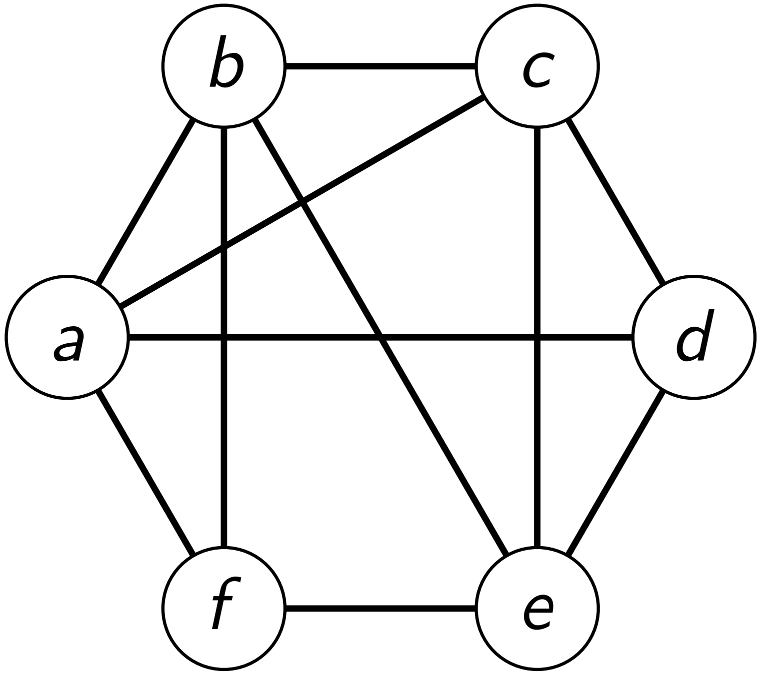
1. Überprüfen von Chordalität.
2. Berechnen einer größten Clique bzw. der Cliquenzahl!
3. Bestimmen einer optimalen Färbung bzw. der chromatischen Zahl!

Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:

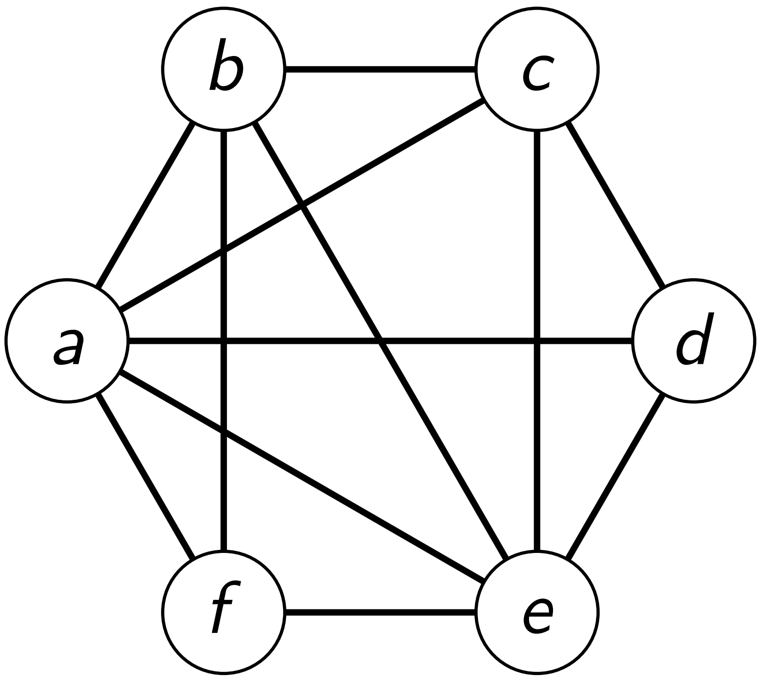


Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



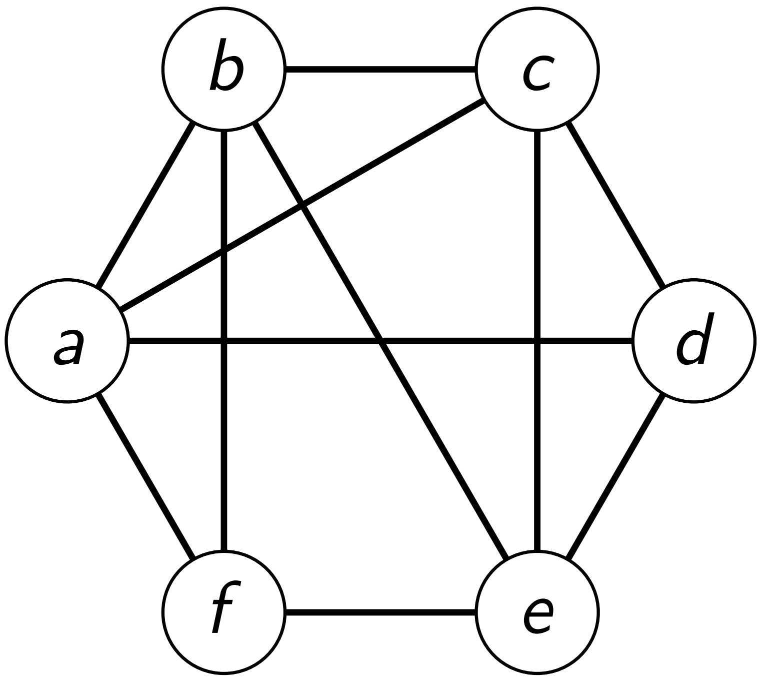
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



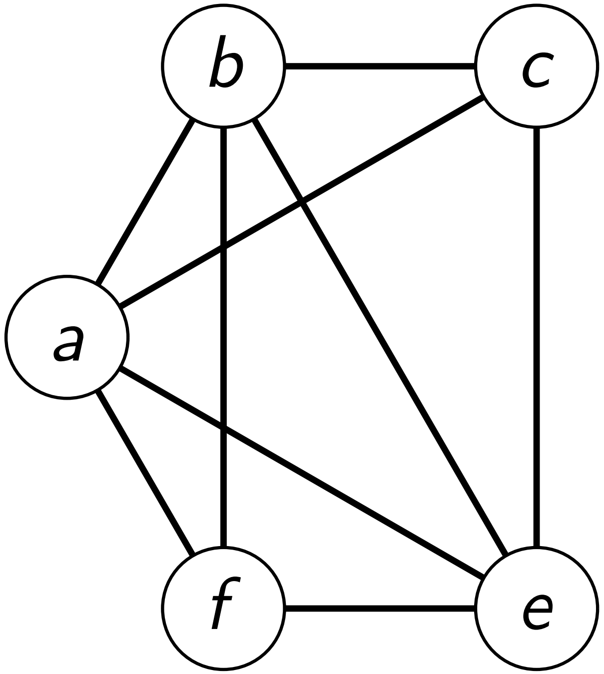
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



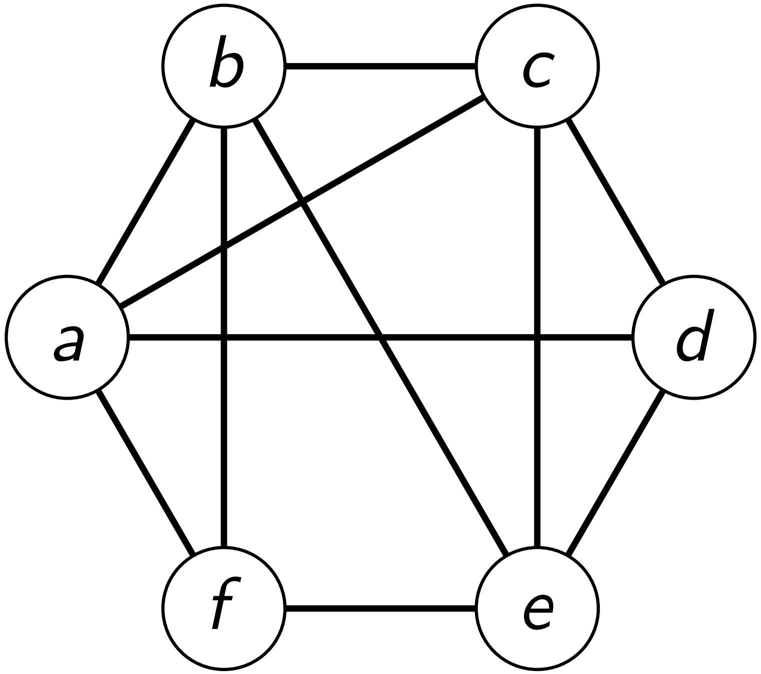
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



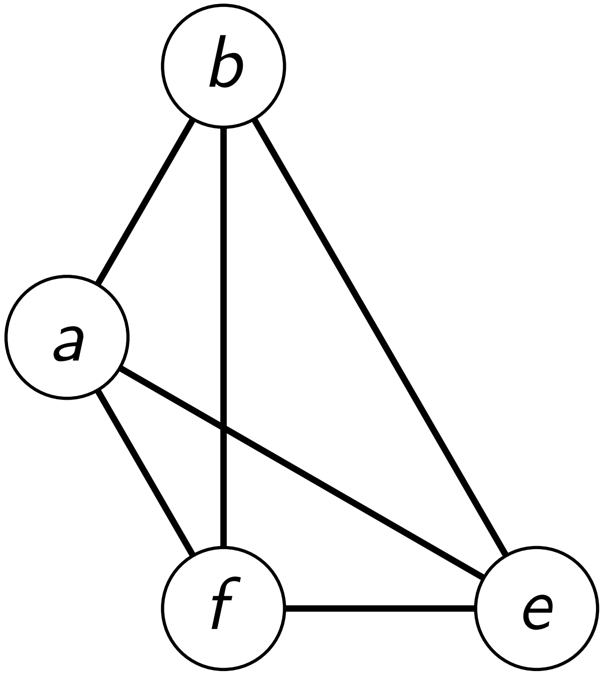
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



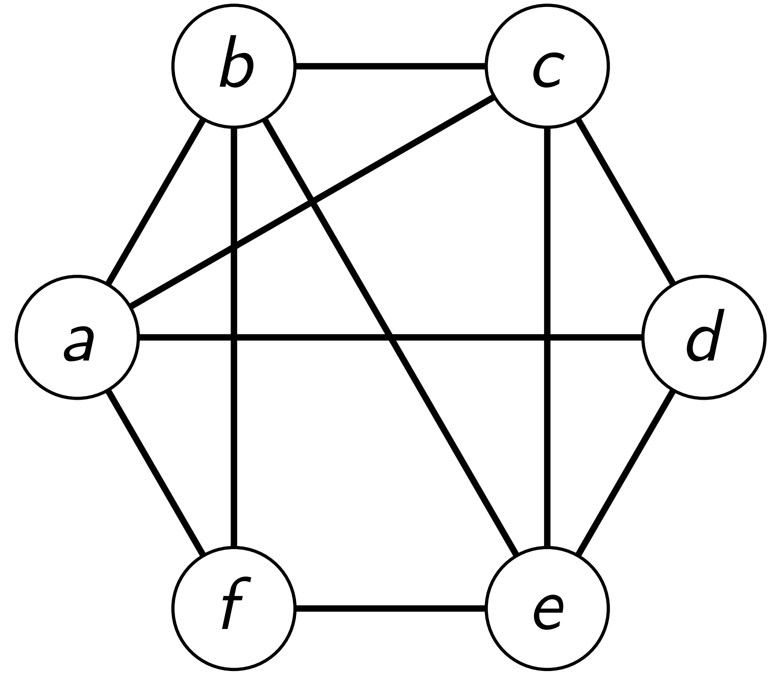
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



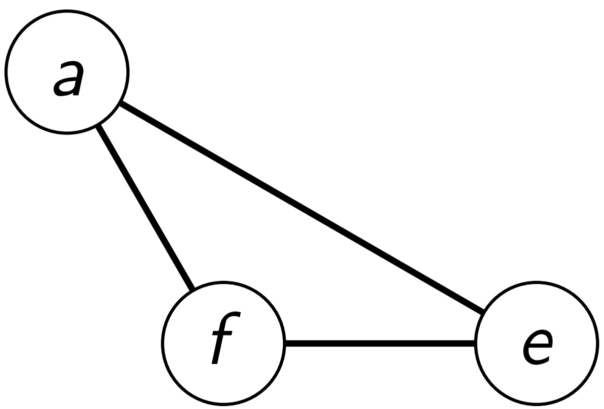
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



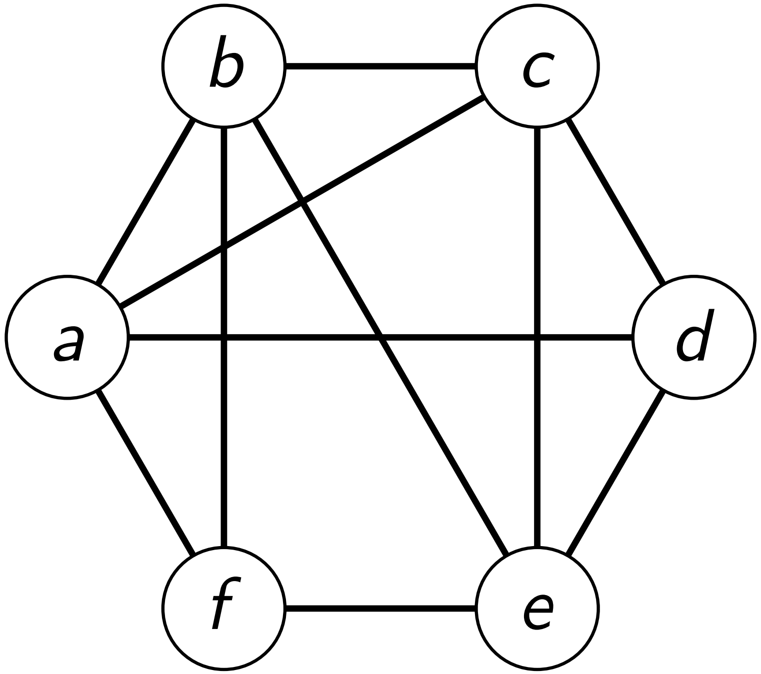
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



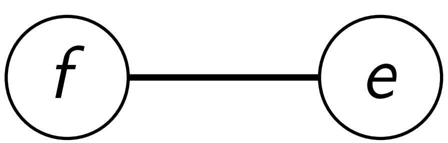
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



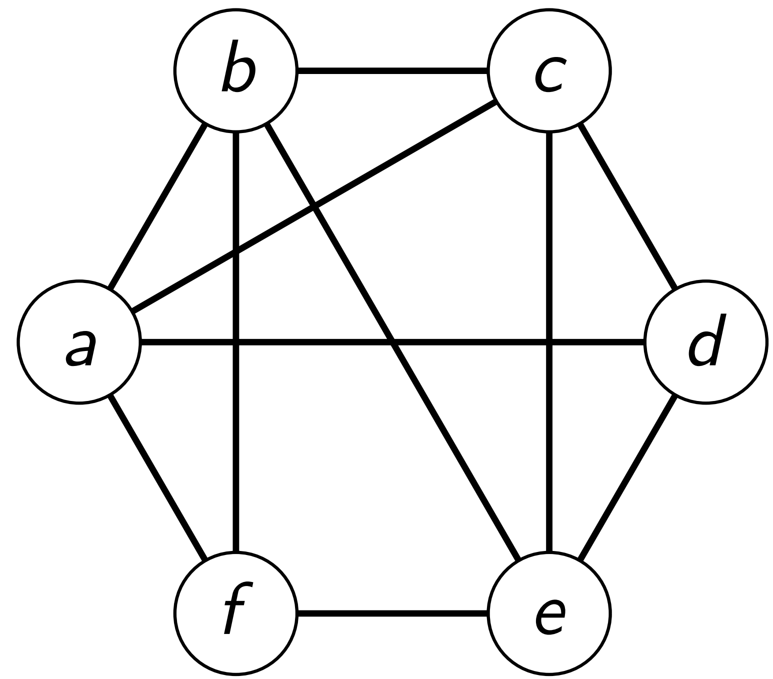
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



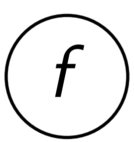
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



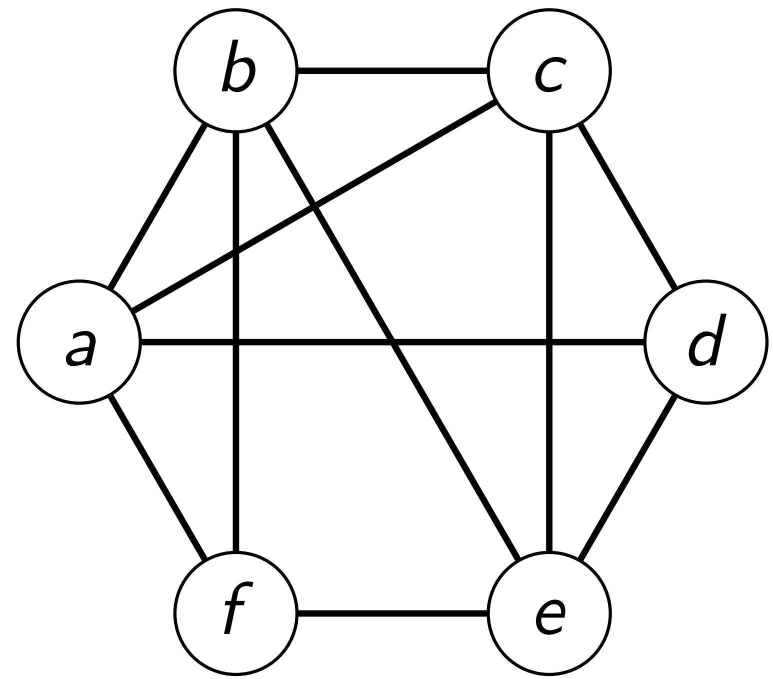
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



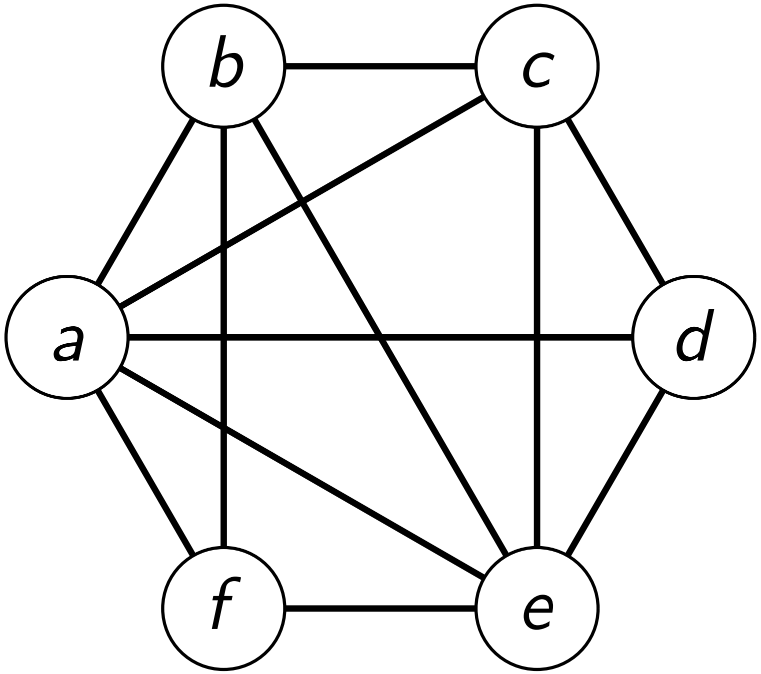
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



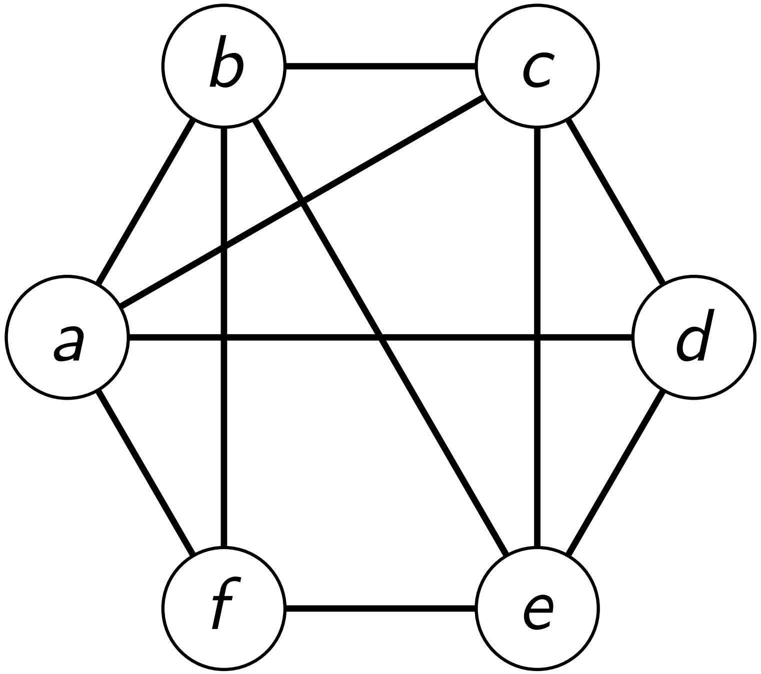
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



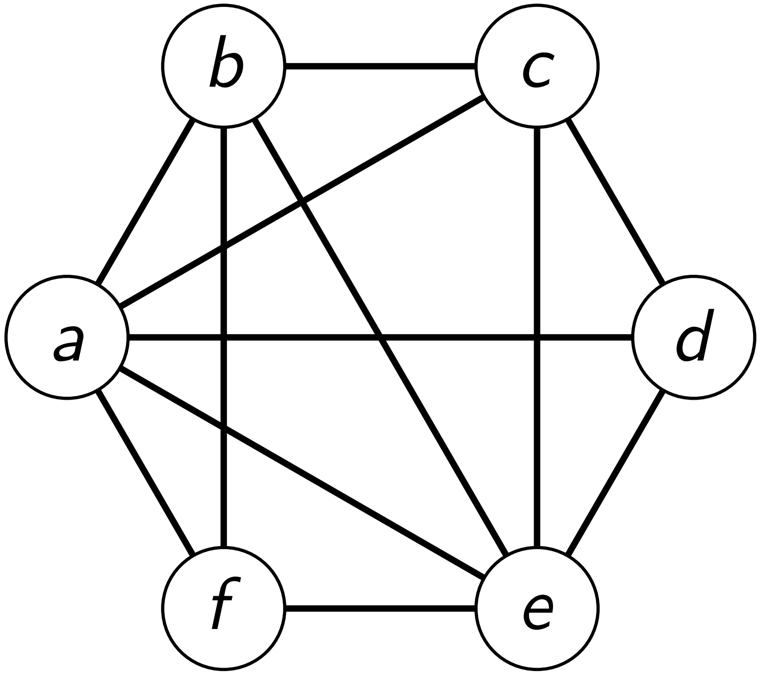
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



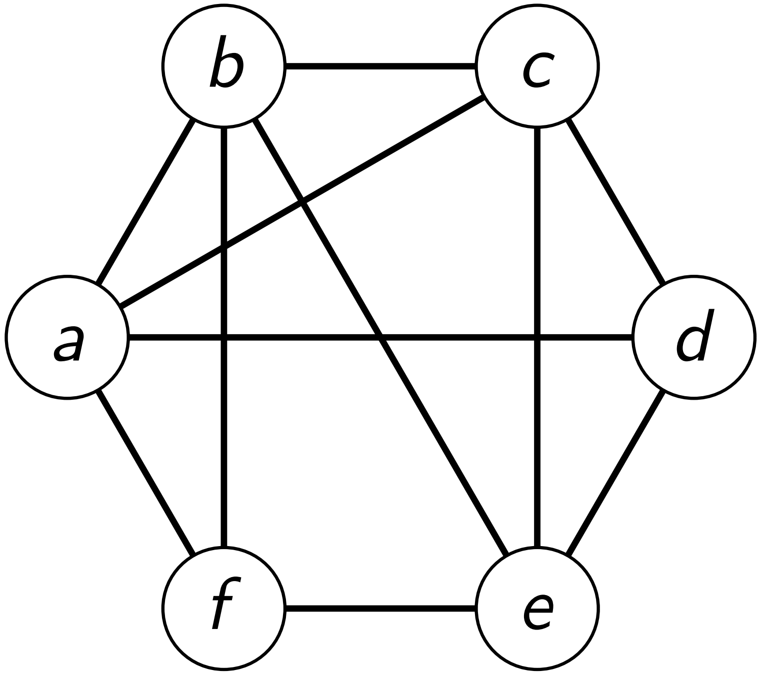
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

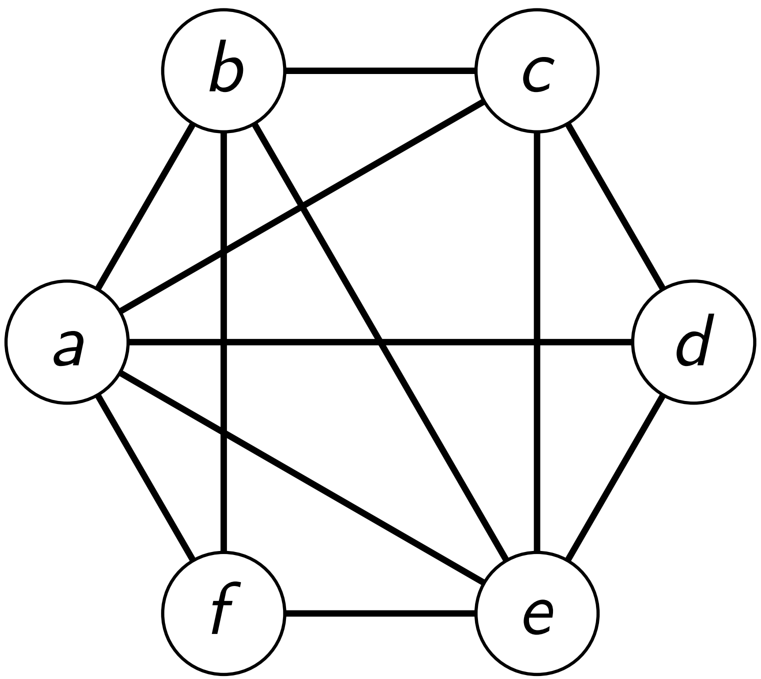
Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



Der Graph (oder ein induzierter Teilgraph) hat keinen simplizialen Knoten!

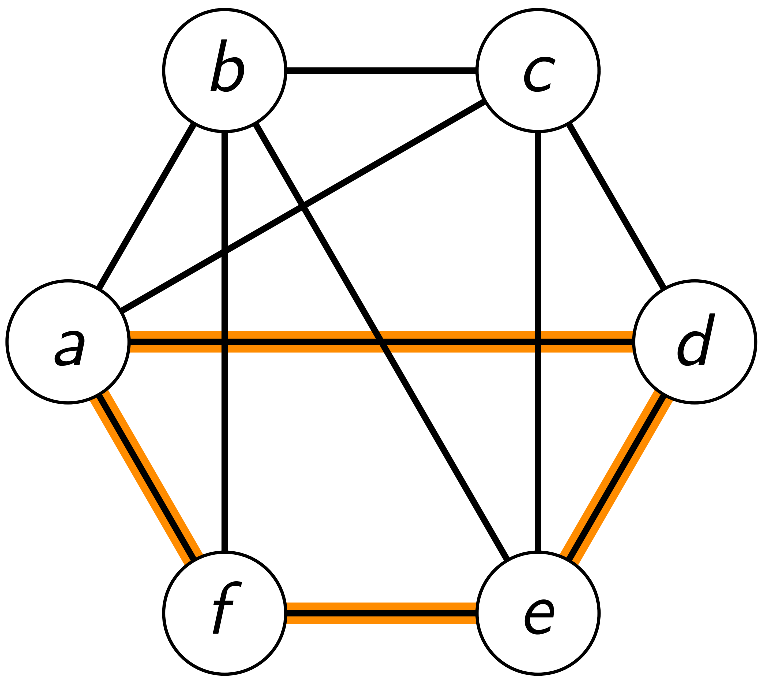
Überprüfen von Chordalität

Zeigen Sie, dass dieser Graph chordal ist:



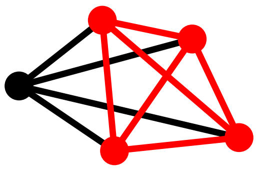
Der Graph hat das Eliminationsschema $\langle d, c, b, a, e, f \rangle$.

Zeigen Sie, dass dieser Graph *nicht* chordal ist:



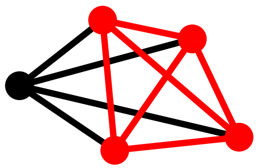
Der Graph (oder ein induzierter Teilgraph) hat keinen simplizialen Knoten!

Berechnung einer größten Clique



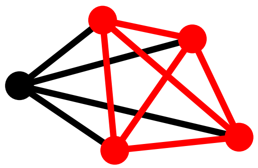
Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist.

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

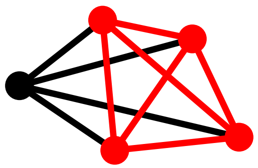
Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Berechnung einer größten Clique

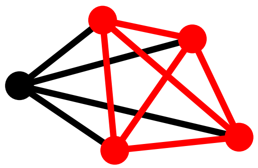


Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i.

Berechnung einer größten Clique



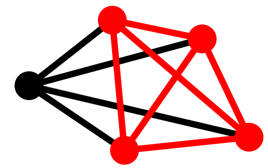
Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i.

$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$.

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

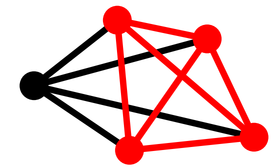
Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i.

$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$.

$C \subseteq C'$

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

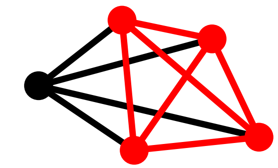
Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i.

$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$.

$C \subseteq C'$, da i min.

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

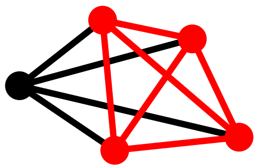
Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i.

$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$.

$C \subseteq C'$, da i min.

$C = C'$, da C nicht-erweiterbar. $\square$

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i.

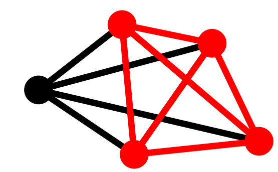
$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$.

$C \subseteq C'$, da i min.

$C = C'$, da C nicht-erweiterbar. $\square$

$\Rightarrow$ Es gibt höchstens n nicht-erweiterbare Cliquen in G!

Berechnung einer größten Clique



Eine Clique heißt *erweiterbar*, falls sie echte Teilmenge einer anderen Clique ist. Größte Cliquen sind nicht-erweiterbar!

Lemma. Sei $v_1, \ldots, v_n$ perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht-erweiterbare Clique in G die Form $\{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$.

Beweis. Sei C nicht-erweiterbar und $v_i \in C$ mit kleinstem i.

$C' := \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$ ist Clique, da v_i simplizial in $G[v_i, \ldots, v_n]$.

$C \subseteq C'$, da i min.

$C = C'$, da C nicht-erweiterbar. □

$\Rightarrow$ Es gibt höchstens n nicht-erweiterbare Cliquen in G!

Also können wir eine größte Clique (und somit $\omega(G)$) in Polynomialzeit berechnen – durch Aufzählen dieser Cliquen.

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$:

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n - 1, \ldots, 1$:
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$: $v_{i+1}, \ldots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \dots, 1$: $v_{i+1}, \dots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) \Rightarrow$

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$: $v_{i+1}, \ldots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}) \Rightarrow$ C_i ist Clique!

$\Rightarrow$

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$: $v_{i+1}, \ldots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}) \Rightarrow$ C_i ist Clique!

$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \Rightarrow$

Zur Erinnerung: $\omega(G)$ = Cliquenzahl von G

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$: $v_{i+1}, \ldots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}) \Rightarrow$ C_i ist Clique!

$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \Rightarrow$ Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$.

Zur Erinnerung: $\omega(G)$ = Cliquenzahl von G

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$: $v_{i+1}, \ldots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}) \Rightarrow$ C_i ist Clique!

$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \;\Rightarrow\;$ Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1.$

$\Rightarrow$ Wir können v_i stets mit einer Farbe in $\{1, \ldots, \omega(G)\}$ färben.

Zur Erinnerung: $\omega(G)$ = Cliquenzahl von G

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$: $v_{i+1}, \ldots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}) \Rightarrow$ C_i ist Clique!

$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \Rightarrow$ Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$.

$\Rightarrow$ Wir können v_i stets mit einer Farbe in $\{1, \ldots, \omega(G)\}$ färben.

Wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ gilt, dass

Zur Erinnerung: $\omega(G)$ = Cliquenzahl von G, $\chi(G)$ = chromatische Zahl von G

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \dots, 1$: $v_{i+1}, \dots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) \Rightarrow$ C_i ist Clique!

$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \Rightarrow$ Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$.

$\Rightarrow$ Wir können v_i stets mit einer Farbe in $\{1, \dots, \omega(G)\}$ färben.

Wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ gilt, dass unsere Färbung optimal ist!

Zur Erinnerung: $\omega(G)$ = Cliquenzahl von G, $\chi(G)$ = chromatische Zahl von G

Berechnung einer optimaler Färbung

- Färbe v_n mit 1.
- Für $i = n-1, \ldots, 1$: $v_{i+1}, \ldots, v_n$ bereits gefärbt
  Färbe v_i mit kleinstmöglicher natürlicher Zahl, mit der kein Nachbar bereits gefärbt wurde.

Sei $C_i = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}) \Rightarrow$ C_i ist Clique!

$\Rightarrow |C_i| \leq \omega(G) \;\Rightarrow\;$ Also $|N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}| \leq \omega(G) - 1$.

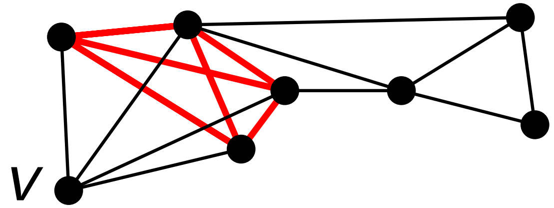
$\Rightarrow$ Wir können v_i stets mit einer Farbe in $\{1, \ldots, \omega(G)\}$ färben.

Wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ gilt, dass unsere Färbung optimal ist!

Satz. In chordalen Graphen kann man größte Cliquen und optimale Färbungen effizient ermitteln.

Zur Erinnerung: $\omega(G)$ = Cliquenzahl von G, $\chi(G)$ = chromatische Zahl von G

Satz von Dirac

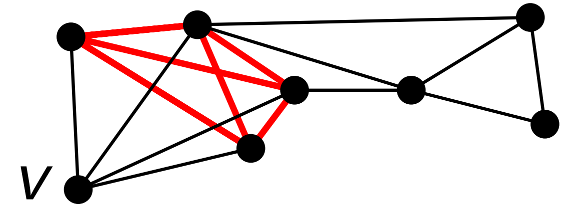


Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Satz von Dirac



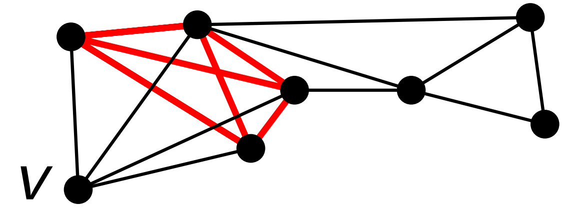
Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

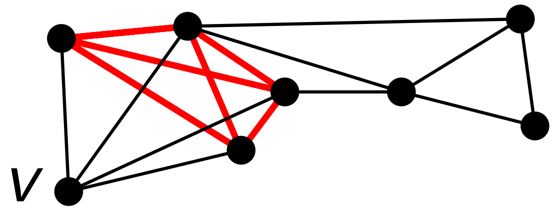
[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

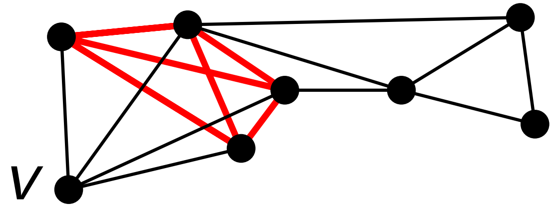
Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow$

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

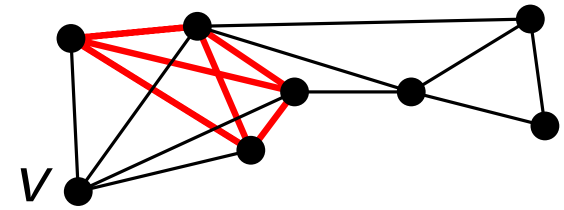
Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

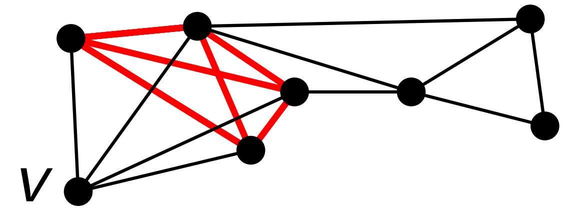
Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$.

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

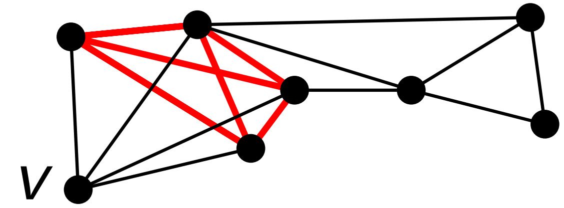
Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

Satz von Dirac



Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.

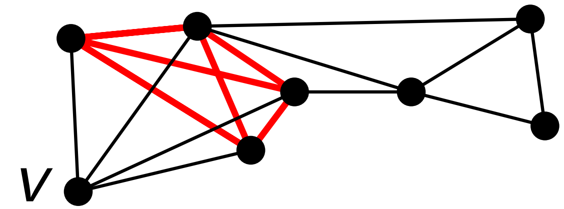
Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

Satz von Dirac

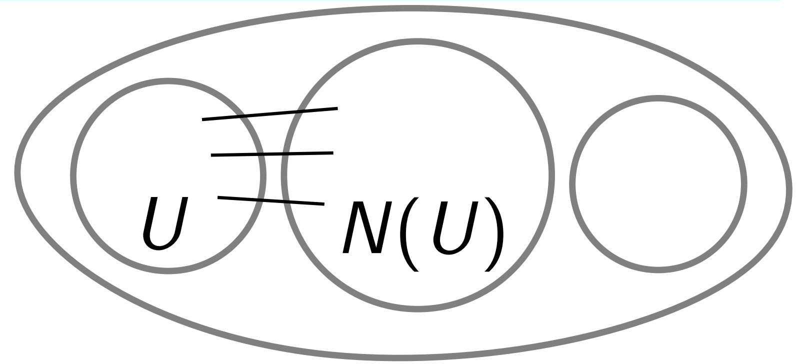


Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.



Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

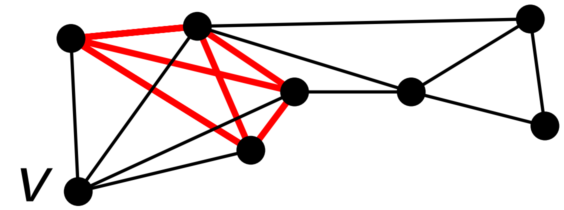
Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

Wähle $U \subseteq V(G)$ so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$

Satz von Dirac

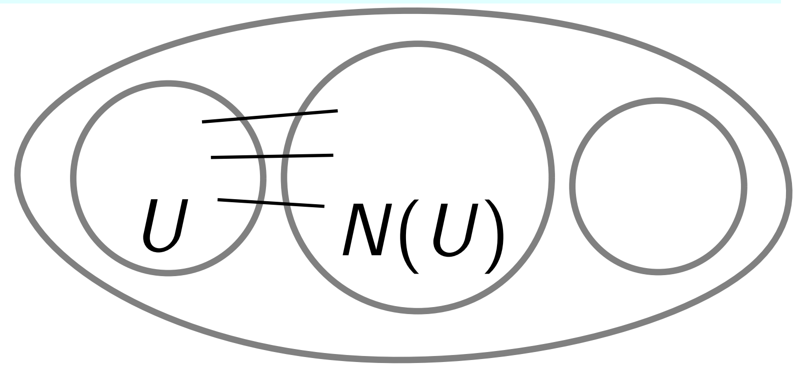


Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.



Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

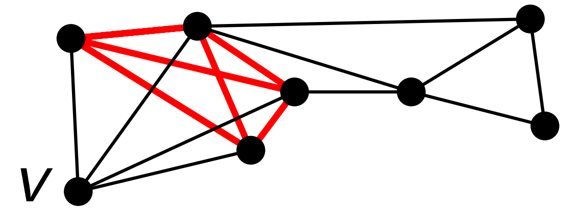
Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

Wähle $U \subseteq V(G)$ so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$ $N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U \colon ab \in E(G)\}$

Satz von Dirac

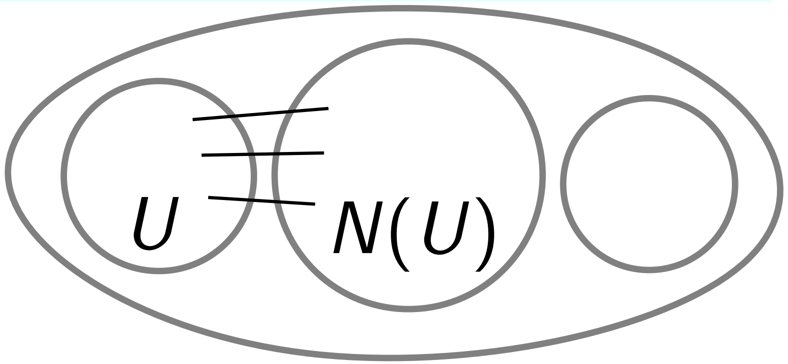


Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.



Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

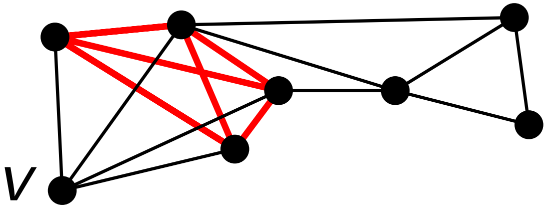
Wähle $U \subseteq V(G)$ so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$ $N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U \colon ab \in E(G)\}$

Ein $U' \subseteq V(G)$ mit (i) und (ii) ex. immer:

Satz von Dirac

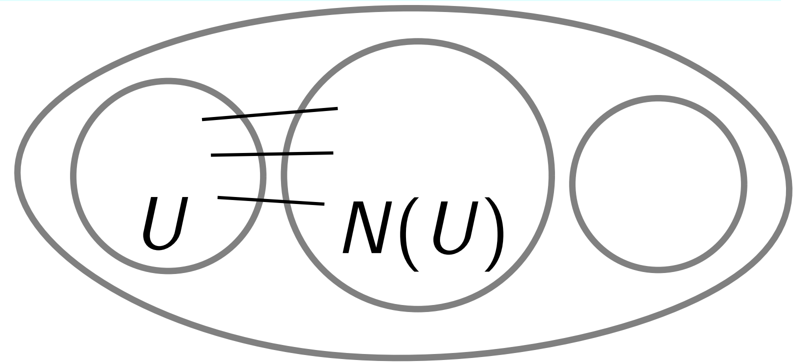


Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.



Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

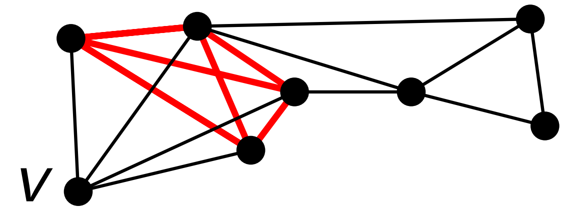
Wähle $U \subseteq V(G)$ so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$ $N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U\colon ab \in E(G)\}$

Ein $U' \subseteq V(G)$ mit (i) und (ii) ex. immer:
z.B. $U' = \{u\}$

Satz von Dirac

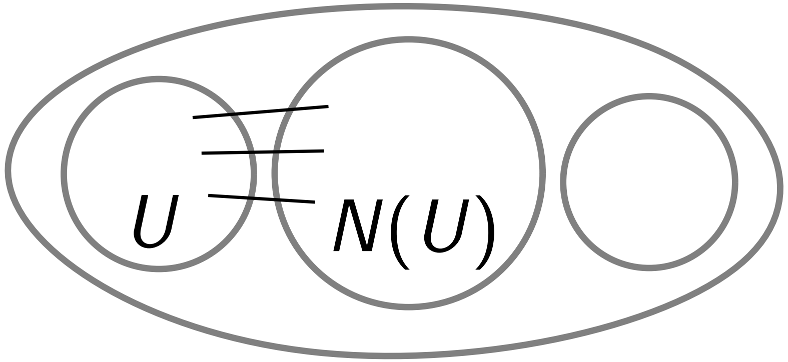


Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.



Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

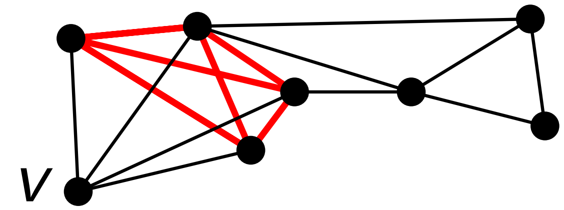
Wähle $U \subseteq V(G)$ so dass

(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$ $N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U \colon ab \in E(G)\}$

Ein $U' \subseteq V(G)$ mit (i) und (ii) ex. immer:
z.B. $U' = \{u\} \Rightarrow v \notin U' \cup N(U')$.

Satz von Dirac

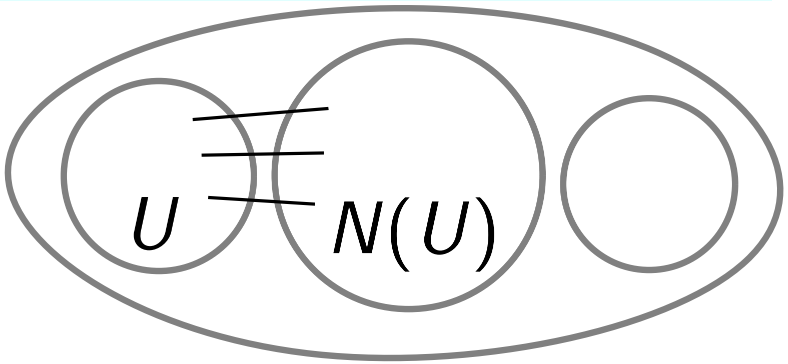


Def. Knoten v heißt *simplizial*, falls $N(v)$ Clique in G.

[Dirac '61]

Satz. Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis. Sei G ein chordaler Graph.



Beweis per Induktion über $n = |V(G)|$.

IA: $n = 1 \Rightarrow E(G) = \emptyset \Rightarrow$ O.K.

IS: $n \geq 2$. Falls G vollständiger Graph $\Rightarrow$ O.K.

Ansonsten existiert $u \neq v$ mit $uv \notin E(G)$.

Wähle $U \subseteq V(G)$ mit *maximaler* Kardinalität, so dass

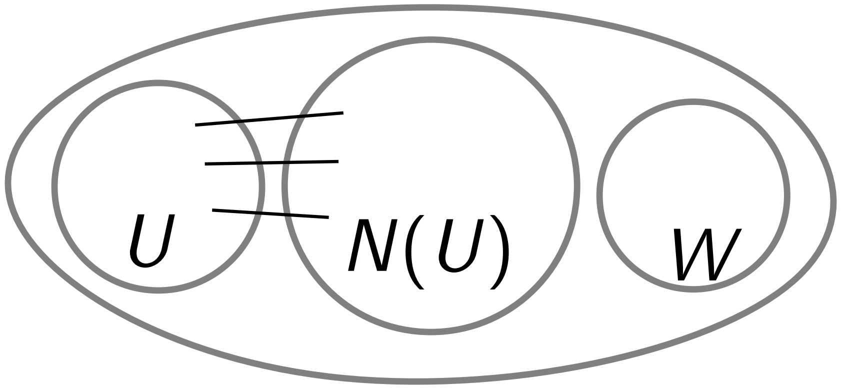
(i) $G[U]$ zusammenhängend

(ii) $U \cup N(U) \neq V(G)$ $\quad N(U) := \{a \in V(G) \setminus U \mid \exists b \in U \colon ab \in E(G)\}$

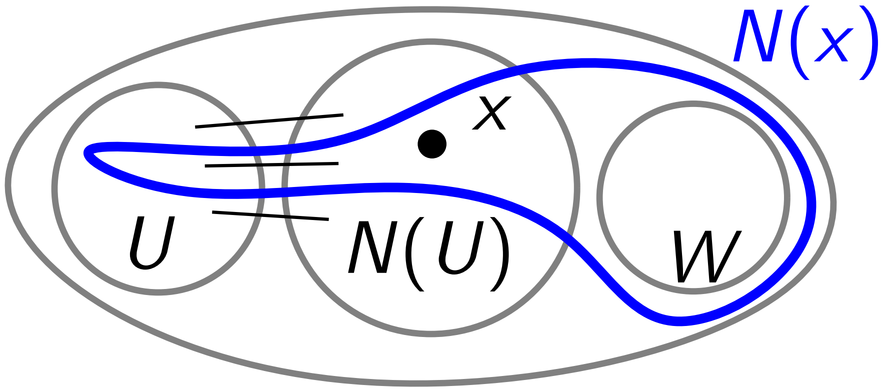
Ein $U' \subseteq V(G)$ mit (i) und (ii) ex. immer:
z.B. $U' = \{u\} \Rightarrow v \notin U' \cup N(U')$.

Beweis (Fortsetzung)

Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.



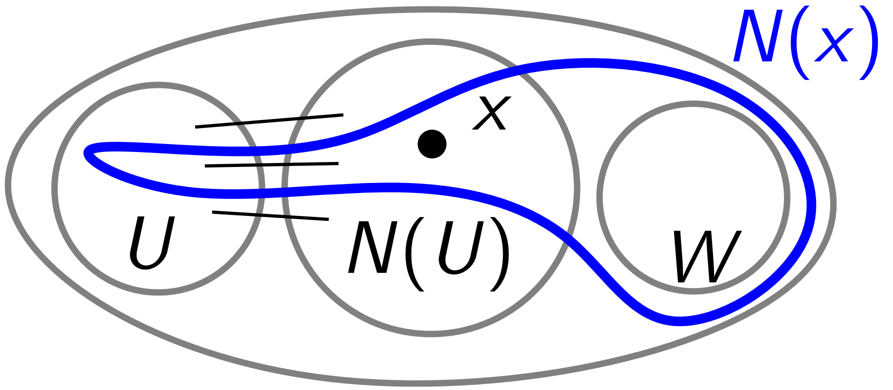
Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Beweis (Fortsetzung)

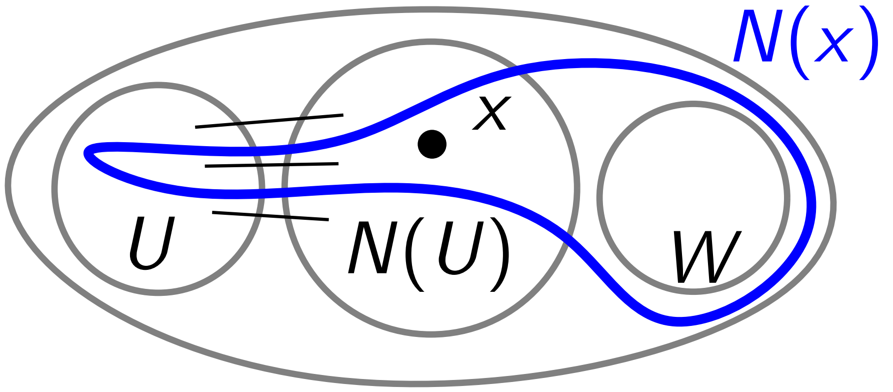


Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$

Beweis (Fortsetzung)



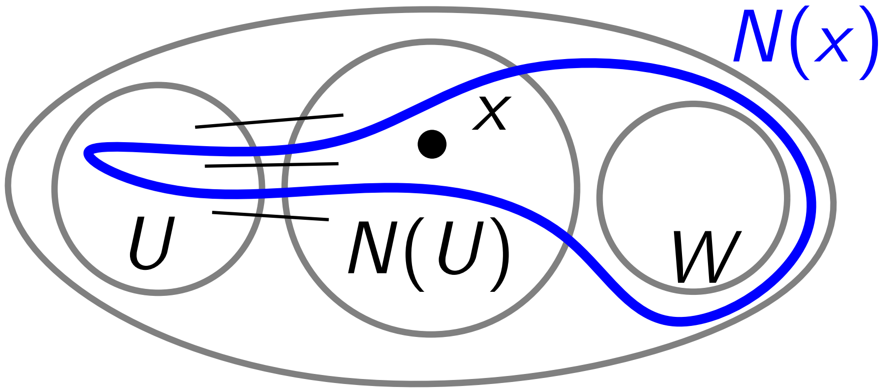
Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$

aber $|U'| > |U| \Rightarrow$

Beweis (Fortsetzung)

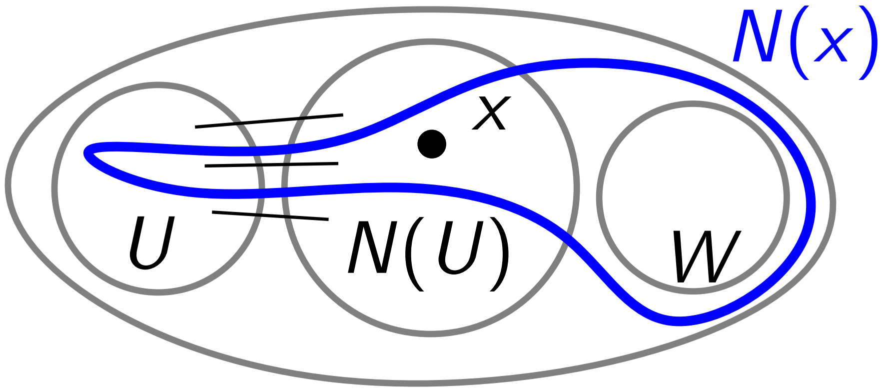


Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

Beweis (Fortsetzung)



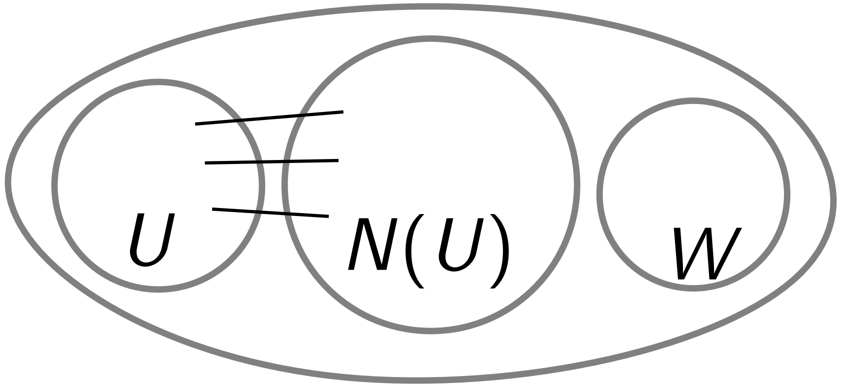
Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden!

Beweis (Fortsetzung)



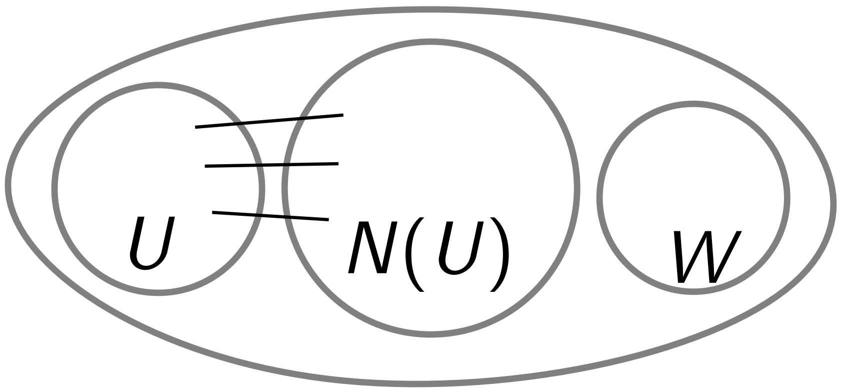
Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden!

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

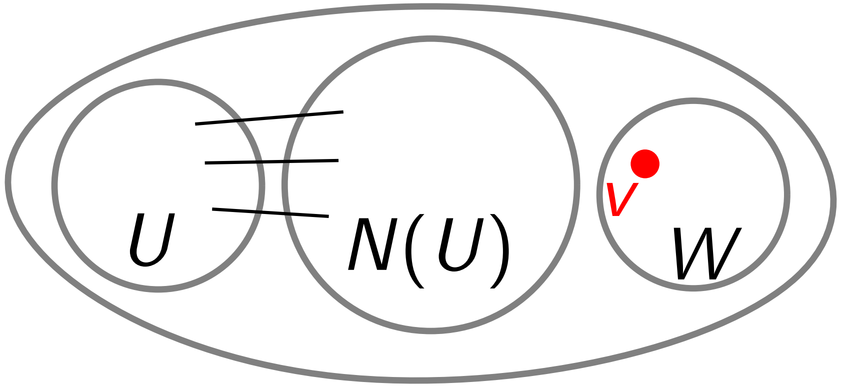
Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden!

Beob$_5$. $\Rightarrow$ $G[W]$ chordal

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

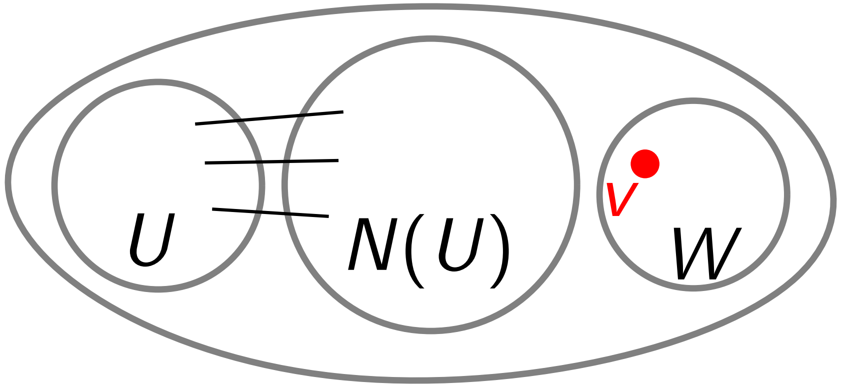
Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden!

Beob$_5$. $\Rightarrow$ $G[W]$ chordal $\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$

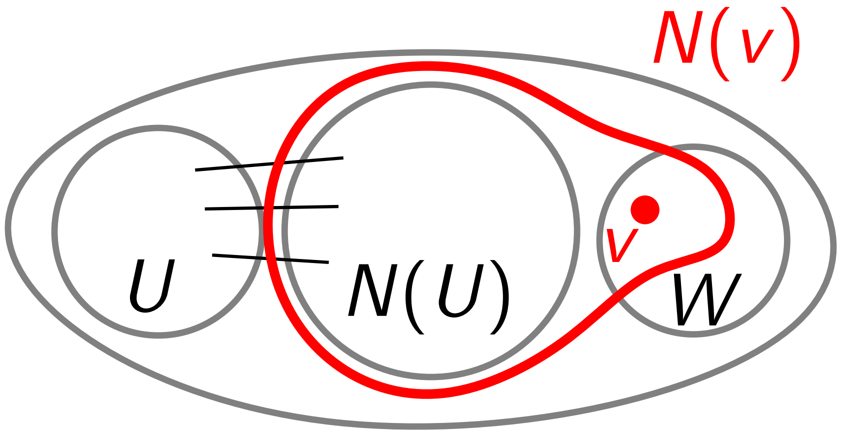
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden!

Beob$_5$. $\Rightarrow$ $G[W]$ chordal $\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $N(v)$ Clique)

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$

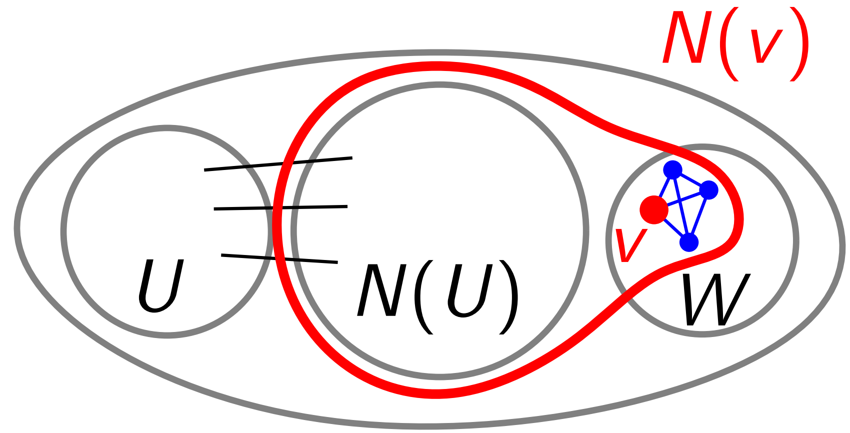
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden!

Beob$_5$. $\Rightarrow G[W]$ chordal $\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $\boxed{N(v)}$ Clique)

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$

aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

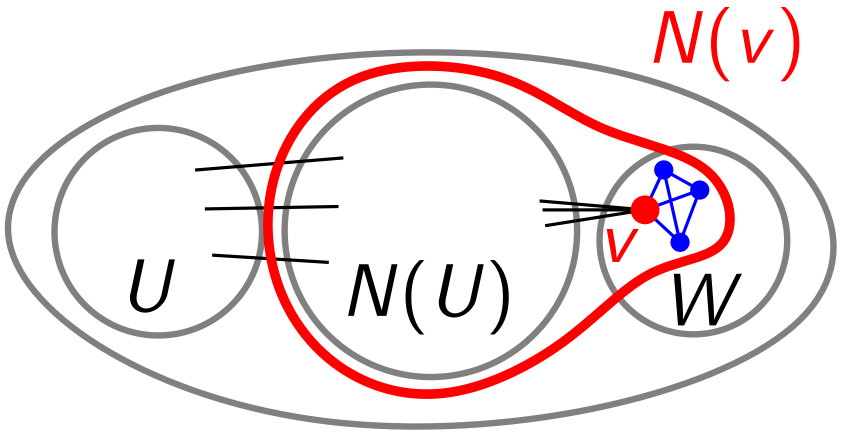
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden!

Beob$_5$. $\Rightarrow G[W]$ chordal $\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $\boxed{N(v)}$ Clique)

Beachte: $N(v) \cap W$ ist Clique, da v simplizial in $G[W]$.

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$

aber $|U'| > |U| \Rightarrow$ ↯ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden! (*)

Beob$_5$. $\Rightarrow$ $G[W]$ chordal $\stackrel{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

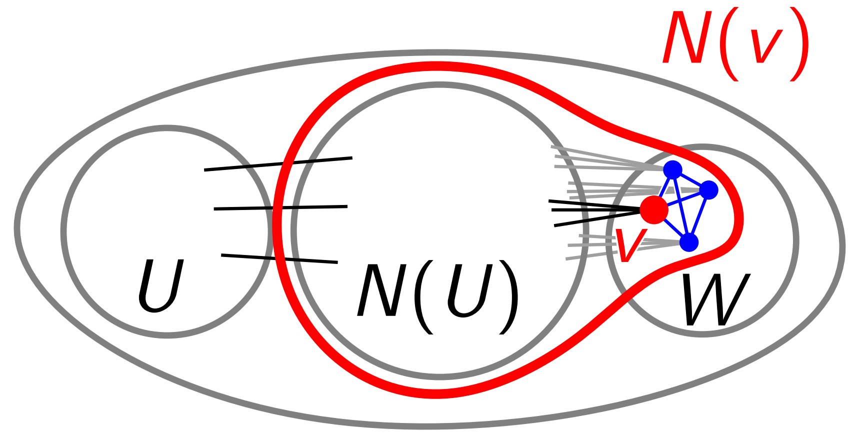
Behauptung: v simplizial in G (also $\boxed{N(v)}$ Clique)

Beachte: $N(v) \cap W$ ist Clique, da v simplizial in $G[W]$.

(*) $\Rightarrow$ $N(U)$

$= N(v) \cap N(U)$

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$
aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden! (*)

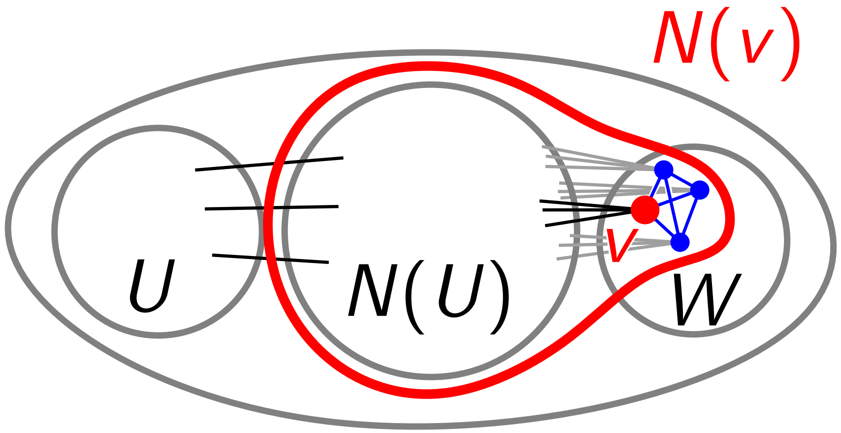
Beob$_5$. $\Rightarrow$ $G[W]$ chordal $\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $\boxed{N(v)}$ Clique)

Beachte: $N(v) \cap W$ ist Clique, da v simplizial in $G[W]$.

$$(*) \Rightarrow \forall w \in N(v) \cap W : N(w) \cap N(U) = N(U) \\ = N(v) \cap N(U)$$

Beweis (Fortsetzung)



Sei $W = V(G) - (U \cup N(U)) \neq \emptyset$.

Für jedes $x \in N(U)$: $W \subseteq N(x)$.

Andernfalls: $U' := U \cup \{x\}$, $G[U']$ zshgd., $U' \cup N(U') \neq V(G)$

aber $|U'| > |U| \Rightarrow \lightning$ zur Maximalität von U.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in W ist mit jedem in $N(U)$ verbunden! (*)

Beob$_5$. $\Rightarrow$ $G[W]$ chordal $\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow}$ ex. $v \in W$ simplizial in $G[W]$

Behauptung: v simplizial in G (also $\boxed{N(v)}$ Clique)

Beachte: $N(v) \cap W$ ist Clique, da v simplizial in $G[W]$.

$$(*) \Rightarrow \forall w \in N(v) \cap W : N(w) \cap N(U) = N(U)$$
$$= N(v) \cap N(U)$$

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

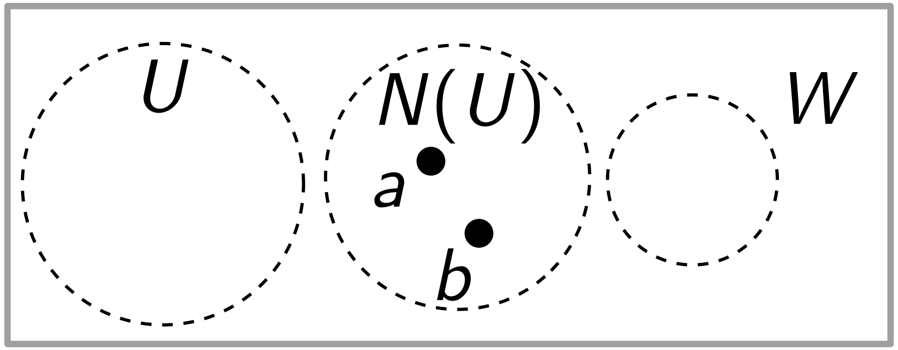
Beweis (Fortsetzung)

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Beweis (Fortsetzung)

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

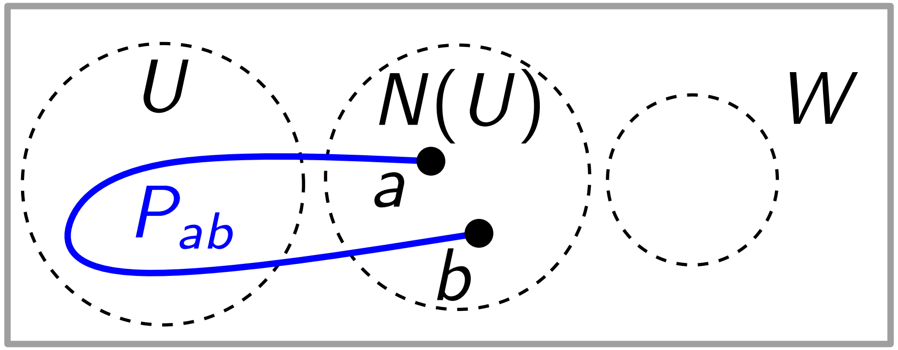


Beweis (Fortsetzung)

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.



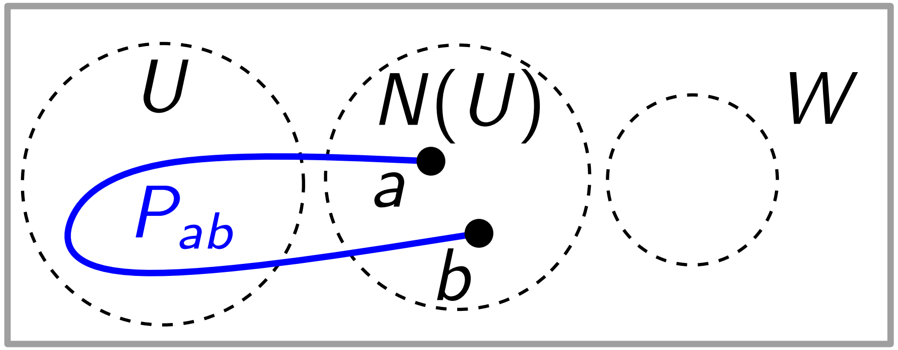
Beweis (Fortsetzung)

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.



Beweis (Fortsetzung)

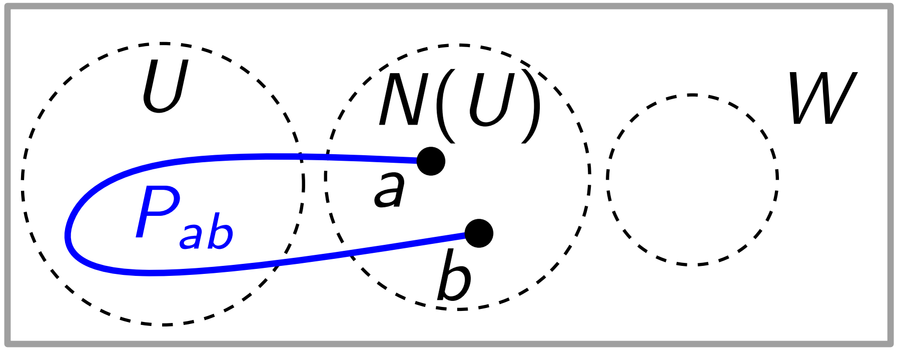
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2, da $ab \notin E(G)$.



Beweis (Fortsetzung)

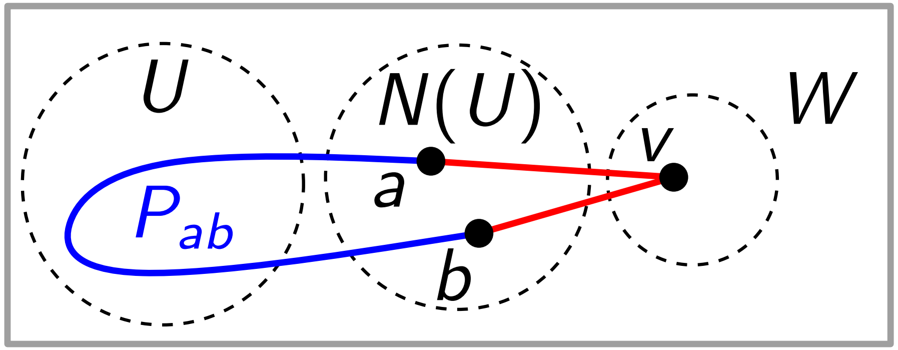
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2, da $ab \notin E(G)$.



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

Beweis (Fortsetzung)

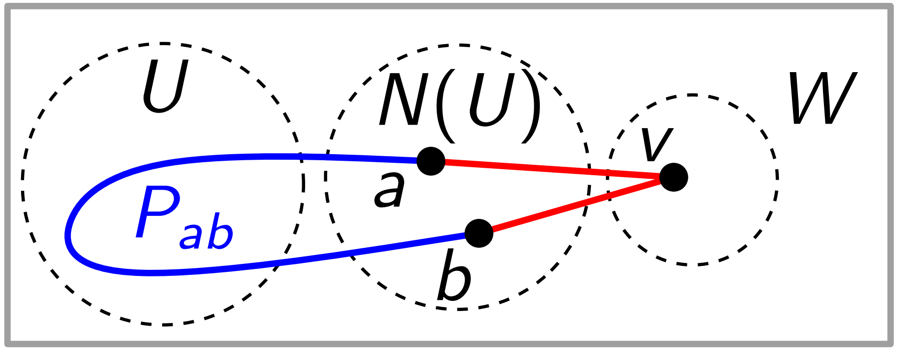
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2, da $ab \notin E(G)$.



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da

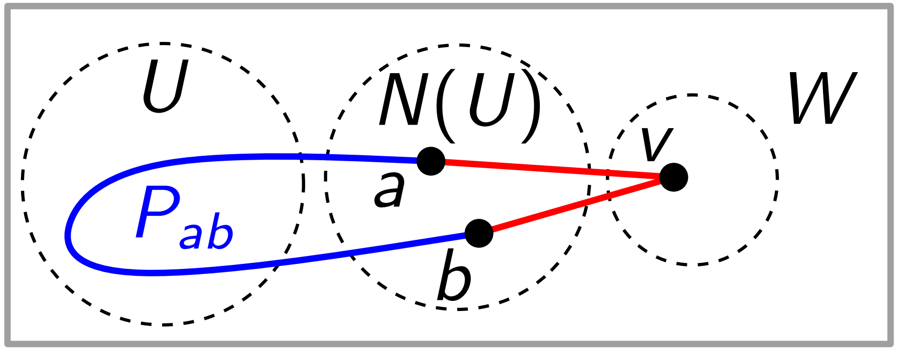
Beweis (Fortsetzung)

Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.



P_{ab} hat Länge ≥ 2, da $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg. $\lightning$

Beweis (Fortsetzung)

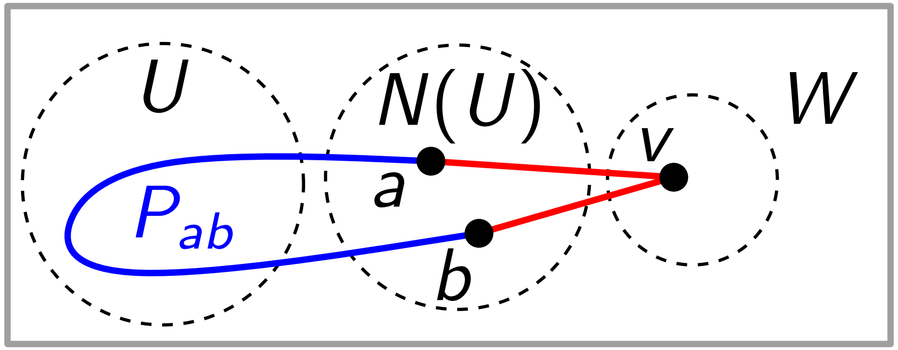
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2, da $ab \notin E(G)$.



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg. ↯

$\Rightarrow N(U)$ ist eine Clique.

Beweis (Fortsetzung)

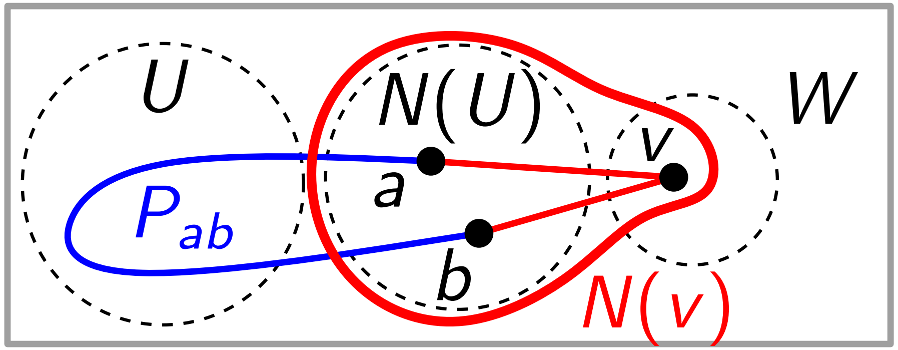
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2, da $ab \notin E(G)$.



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg. $\lightning$

$\Rightarrow N(U)$ ist eine Clique.

$\Rightarrow N(v)$ ist eine Clique.

Beweis (Fortsetzung)

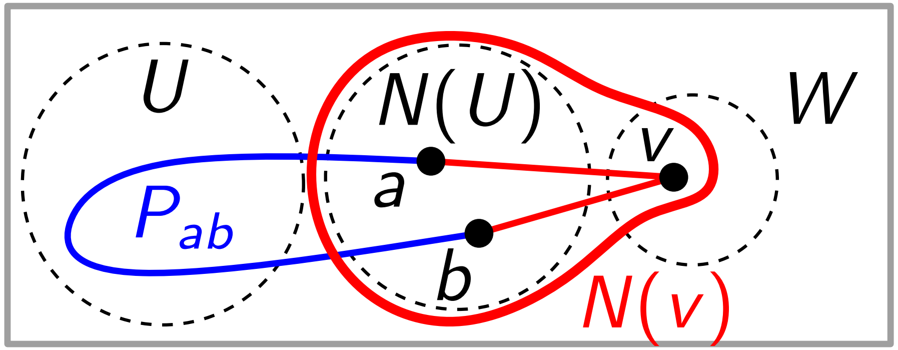
Bleibt zu zeigen, dass $N(U)$ Clique ist.

Angenommen es ex. $a \neq b$ in $N(U)$ mit $ab \notin E(G)$.

$\Rightarrow$ es ex. a-b-Weg P_{ab} in $G[U \cup \{a, b\}]$, da $G[U]$ zshgd.

oBdA P_{ab} *kürzester* solcher Weg.

P_{ab} hat Länge ≥ 2, da $ab \notin E(G)$.



$\Rightarrow C := P_{ab} + bv + va$ ist einfacher Kreis der Länge ≥ 4

C hat keine Sehne, da $v \notin N(U)$ und P_{ab} kürzester Weg. $\lightning$

$\Rightarrow N(U)$ ist eine Clique.

$\Rightarrow N(v)$ ist eine Clique.

$\Rightarrow v$ ist simplizialer Knoten in G. $\square$

Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für chordale Graphen gilt $\omega(G) = \chi(G)$. Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.

Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für chordale Graphen gilt $\omega(G) = \chi(G)$. Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.

$\Rightarrow$ chordale Graphen sind perfekt!

Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für chordale Graphen gilt $\omega(G) = \chi(G)$. Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.

$\Rightarrow$ chordale Graphen sind perfekt!

Bsp. 2 Bipartite (2-färbbare) Graphen sind perfekt.

Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für chordale Graphen gilt $\omega(G) = \chi(G)$. Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.

$\Rightarrow$ chordale Graphen sind perfekt!

Bsp. 2 Bipartite (2-färbbare) Graphen sind perfekt.

Auch in perfekten Graphen können $\omega(G)$ und $\chi(G)$ effizient bestimmt werden. Außerdem:

Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für chordale Graphen gilt $\omega(G) = \chi(G)$. Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.

$\Rightarrow$ chordale Graphen sind perfekt!

Bsp. 2 Bipartite (2-färbbare) Graphen sind perfekt.

Auch in perfekten Graphen können $\omega(G)$ und $\chi(G)$ effizient bestimmt werden. Außerdem:

Satz. G ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist.

[Lovász '72]

Ausblick: Perfekte Graphen

Def. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *perfekt*, wenn für jeden *induzierten* Teilgraphen H von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$.

Bsp. 1 Für chordale Graphen gilt $\omega(G) = \chi(G)$. Außerdem ist jeder induzierte Teilgraph wieder chordal.

$\Rightarrow$ chordale Graphen sind perfekt!

Bsp. 2 Bipartite (2-färbbare) Graphen sind perfekt.

Auch in perfekten Graphen können $\omega(G)$ und $\chi(G)$ effizient bestimmt werden. Außerdem:

Satz. G ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist.

[Lovász '72]

Satz. Die Berechnung von $\alpha(G), \omega(G)$ und $\chi(G)$ ist für *perfekte* Graphen effizient möglich.

[Grötschel, Lovász, Schrijver '88]