

Algorithmische Graphentheorie

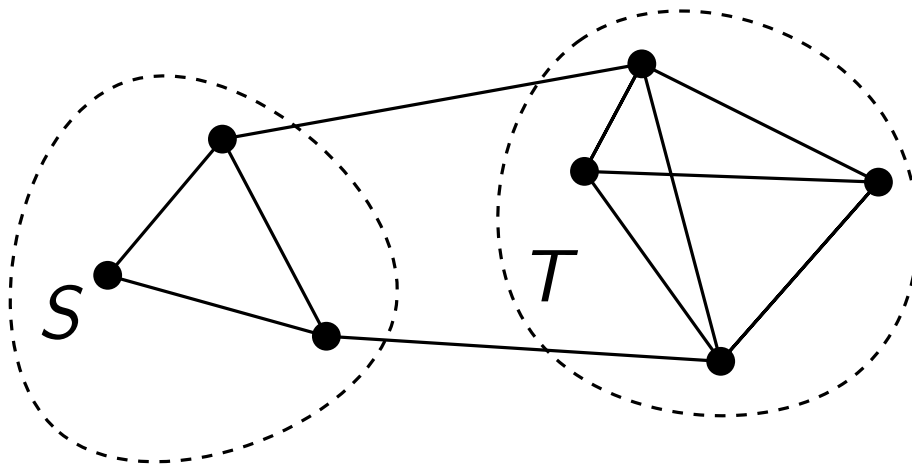
Sommersemester 2025

8. Vorlesung

Randomisierte Algorithmen
für MINCUT

MINCUT – kleinste Schnitte

Def. Gegeben sei ein ungerichteter Multigraph G . Gesucht ist eine Zerlegung (S, T) von $V(G)$ mit $S, T \neq \emptyset$, so dass die Anzahl der Kanten $uv \in E(G)$ mit $u \in S$ und $v \in T$ möglichst klein ist.



Motivation:

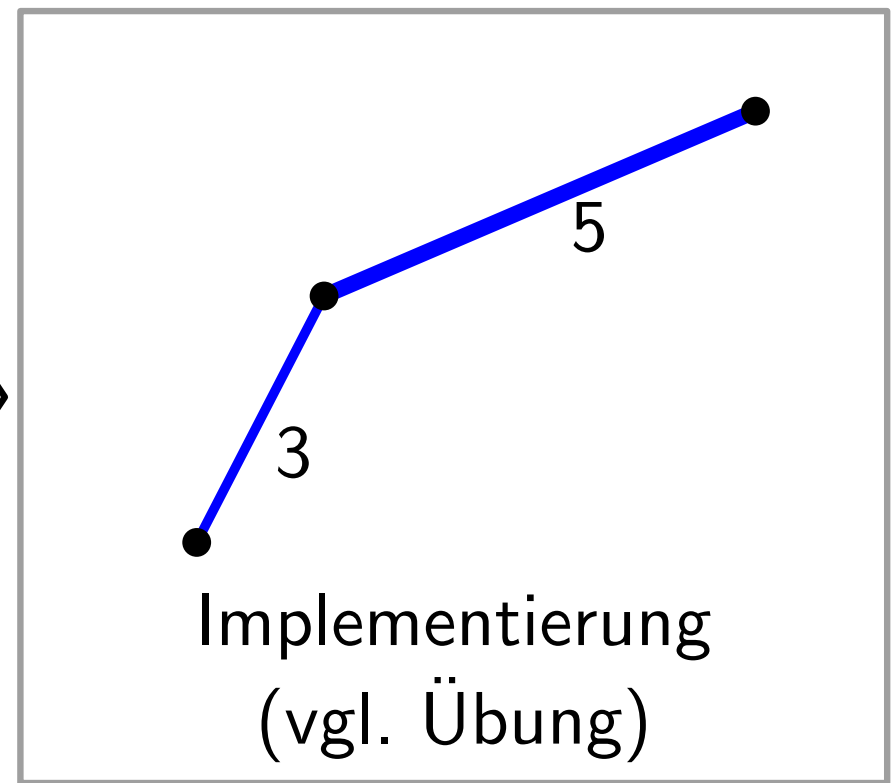
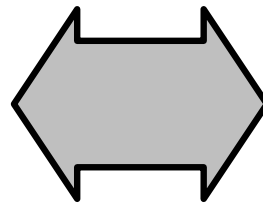
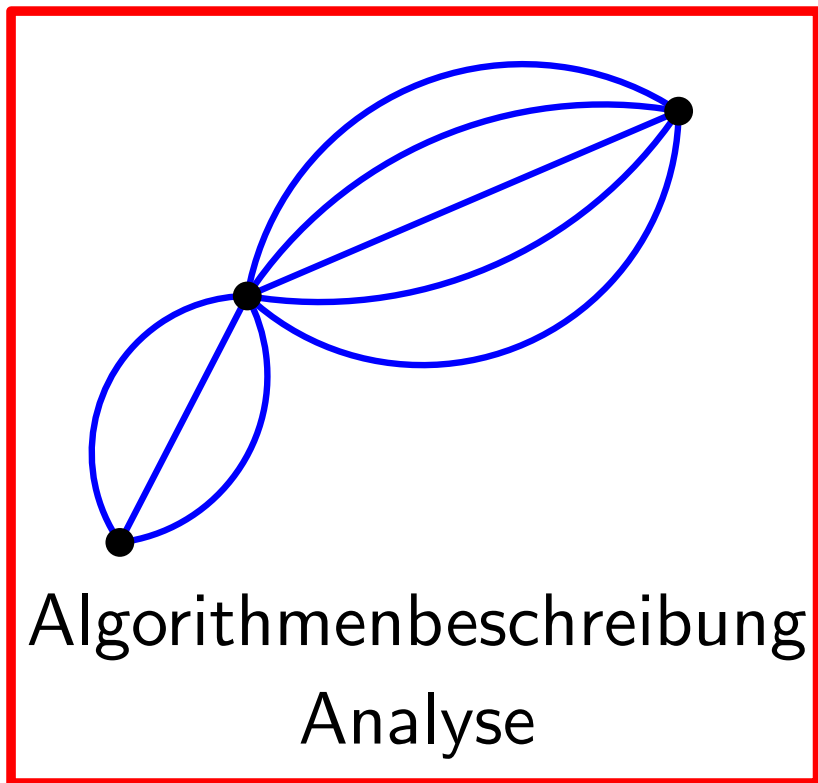
Z.B. Finden von Schwachstellen in Kommunikationsnetzwerken.

Beachte: Im Gegensatz zu s - t -Schnitten ist hier *kein* zu trennendes Knotenpaar (s, t) vorgegeben.

Sei $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$.

O.B.d.A. ist der Multigraph G zusammenhängend und $n \geq 2$.

Multigraphen vs. Kantengewichte



Gewichtetes MINCUT: Gegeben Kostenfunktion $c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$,

... minimiere $\sum_{\substack{u \in S, v \in V(G) \setminus S \\ uv \in E(G)}} c(uv)$ über alle $S \in 2^{V(G)} \setminus \{\emptyset, V(G)\}$.

... Algorithmen funktionieren auch für gewichtetes MINCUT

Naiver (deterministischer) Ansatz

Übung:

Geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus für MINCUT an!

- Für jedes Paar $\{s, t\} \in \binom{V(G)}{2}$,
berechne **kleinsten s - t -Schnitt mittels Edmonds-Karp**.
- Gib den kleinsten dieser s - t -Schnitte zurück.

Gesamtlaufzeit: $O(n^2 \cdot nm^2) \subseteq O(n^7)$.

Es geht auch in $O(n^6)$ Zeit...

- Wähle s fest.
- Berechne den kleinsten s - t -Schnitt für jedes $t \in V(G) \setminus \{s\}$.

Algorithmus CONTRACT

David R. Karger



CONTRACT(zusammenhäng. Multigraph G)

$H \leftarrow G$

while H hat mehr als zwei Knoten **do**

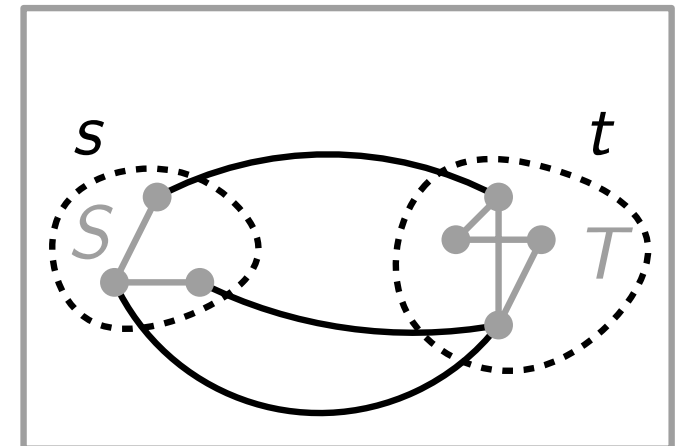
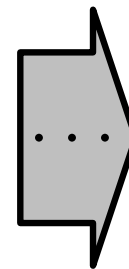
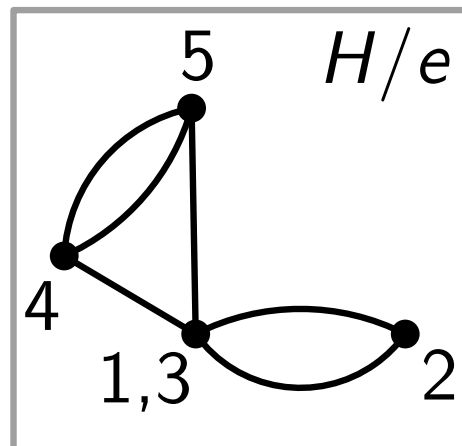
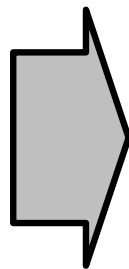
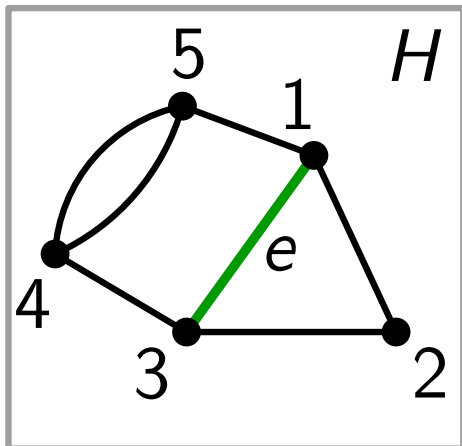
 wähle Kante e in H zufällig und gleichverteilt

$H \leftarrow H/e$ /* kontrahiere e */

return Zerlegung (S, T) von G , die den beiden letzten Knoten in H entspricht.

vgl. deterministischer Algorithmus!

Ein **einfacher** randomisierter Algorithmus [Karger SODA'93]



Laufzeit

CONTRACT(zusammenhäng. Multigraph G)

$H \leftarrow G$

while H hat mehr als zwei Knoten **do**

 wähle Kante e in H zufällig und gleichverteilt

$H \leftarrow H/e$

return Zerlegung (S, T) von G , die den beiden letzten Knoten in H entspricht.

- Anzahl der Knoten sinkt in jeder Iteration um 1.
- Jede Iteration benötigt $O(m)$ Zeit.

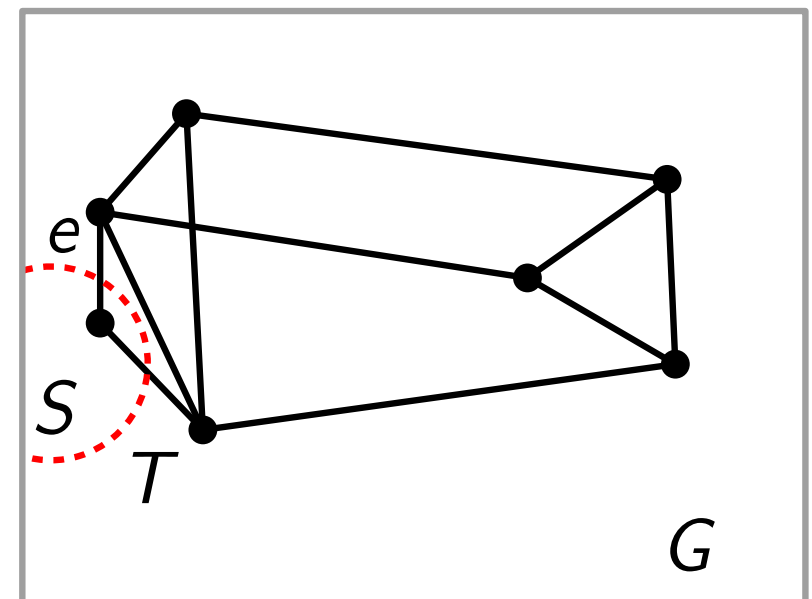
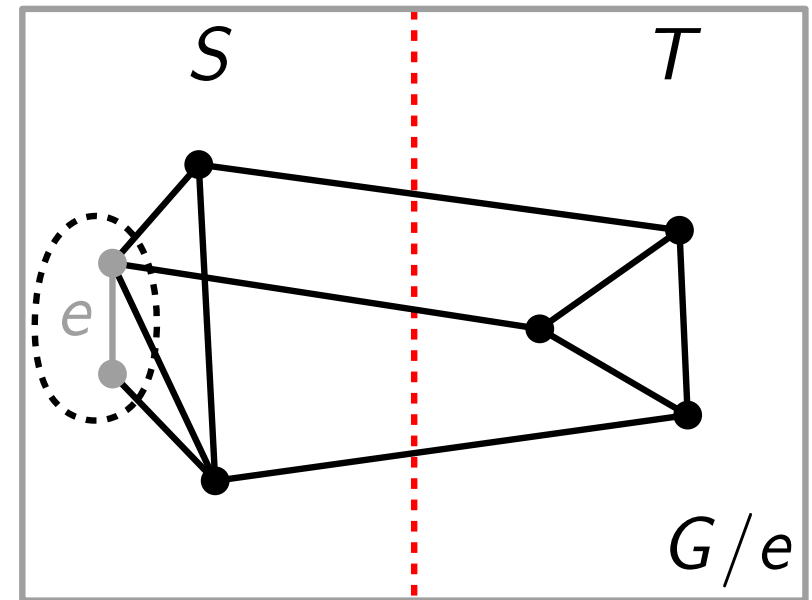
Übg.: Implementierung mit $O(n)$ Zeit pro Iteration möglich!

Gesamtlaufzeit: $O(n^2)$

Beobachtung Kantenkontraktion

Jeder Schnitt in G/e korrespondiert zu Schnitt gleicher Größe in G .

\rightsquigarrow Größe eines kleinsten Schnitts steigt (schwach) monoton während Ausführung von CONTRACT



Erfolgswahrscheinlichkeit – Einschätzung

Satz. Sei (S, T) ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT diesen Schnitt findet, ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$.

Diese Wahrscheinlichkeit ist **überraschend hoch**, da es $(2^n - 2)/2 = 2^{n-1} - 1$ viele Schnitte gibt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig und gleichverteilt gewählter Schnitt genau (S, T) trifft, ist also nur $\frac{1}{2^{\Omega(n)}}$, also **exponentiell klein**.

Erfolgswahrscheinlichkeit – Beweis

Satz. Sei (S, T) ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT diesen Schnitt findet, ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$.

Beweis.

Sei (S, T) ein kleinster Schnitt, $C = \{uv \in E(G) \mid u \in S, v \in T\}$ und $k = |C|$.

Graph H_i (H zu Beginn von Iteration i) hat $n - i + 1$ Knoten.

Kleinster Schnitt in H_i hat Größe $\geq k$.

\Rightarrow Jeder Knoten u in H_i hat Grad $\geq k$.

sonst hätte
Schnitt $(u, V - u)$
Größe $< k$

$\Rightarrow H_i$ hat $\geq k(n - i + 1)/2$ Kanten.

Erfolgswahrscheinlichkeit – Beweis

Satz. Sei (S, T) ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT diesen Schnitt findet, ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$.

Beweis. (Forts.)

H_i hat $\geq k(n - i + 1)/2$ Kanten.

Sei \mathcal{E}_i Ereignis, dass in Iteration i in H_i keine Kante aus C kontrahiert wird.

WK, dass in Iteration i keine Kante aus C kontrahiert wird (vorausgesetzt es wurde bislang noch keine solche kontrahiert):

$$\Pr \left[\mathcal{E}_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} \mathcal{E}_j \right] \geq 1 - \frac{\overset{\text{Kardinalität von } C}{k}}{\underset{\text{Gesamtzahl der Kanten in } H_i}{k(n - i + 1)/2}} = 1 - \frac{2}{n - i + 1}$$

Erfolgswahrscheinlichkeit – Beweis

Satz. Sei (S, T) ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT diesen Schnitt findet, ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$.

Beweis.

$$\Pr \left[\mathcal{E}_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} \mathcal{E}_j \right] \geq 1 - \frac{2}{n - i + 1}$$

Wahrscheinlichkeit, dass CONTRACT *keine* Kante aus C kontrahiert:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bigcap_{i=1}^{n-2} \mathcal{E}_i \right] &\geq \prod_{i=1}^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n - i + 1} \right) = \prod_{i=1}^{n-2} \frac{n - i - 1}{n - i + 1} \\ &= \frac{\cancel{(n-2)} \cdot \cancel{(n-3)} \cdot \dots \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \dots \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{n(n-1)} \quad \square \end{aligned}$$

Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit

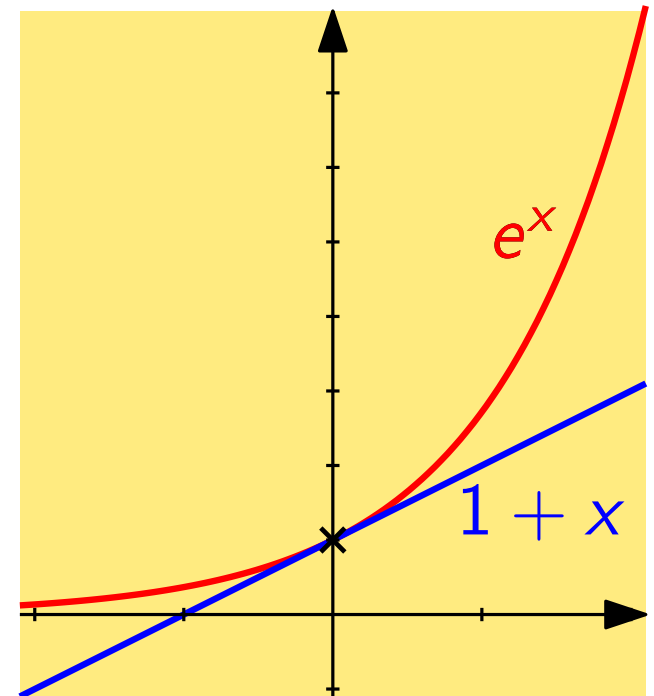
Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{2}{n(n-1)} \geq \frac{2}{n^2}$ zu klein für praktische Zwecke.

⇒ Wiederhole $n^2 \ln n$ mal und gib beste Lösung aus.

Fehlerwahrscheinlichkeit ist höchstens

$$\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2 \ln n} \leq e^{-\frac{2n^2 \ln n}{n^2}} = e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2}$$

$1 + x \leq e^x$
für alle $x \in \mathbb{R}$



⇒ **Erfolg**wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n^2}$ konvergiert schnell gegen 1.

Resümee

Es handelt sich um einen sog. **Monte-Carlo-Algorithmus**, da randomisiert und nicht immer korrekt.

Eine andere Art randomisierter Algorithmen sind sog. **Las-Vegas-Algorithmen**, bei denen das Ergebnis immer korrekt ist, aber die Laufzeit eine Zufallsvariable ist (Bsp. RandomizedQuickSort in der ADS).

Aber: Der Alg. ist mit **hoher Wahrscheinlichkeit** korrekt; Fehlerwahrscheinlichkeit konvergiert mit steigendem n gegen 0.

Gesamtlaufzeit $O(n^4 \log n)$ deutlich besser als $O(n^6)$ bei naivem deterministischen Ansatz.

Außerdem ist der randomisierte Algorithmus viel einfacher!

Satz. Es gibt einen randomisierten Algorithmus für MINCUT mit Laufzeit $O(n^4 \log n)$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $1 - 1/n^2$.

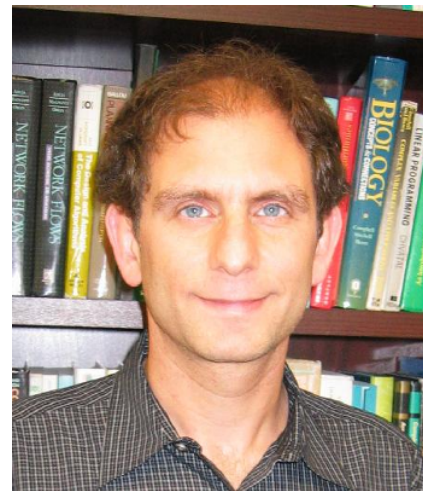
Es geht noch deutlich schneller!

Satz. Es gibt einen randomisierten Algorithmus für MINCUT mit $O(n^2 \log^3 n)$ Laufzeit, der mit hoher Wahrscheinlichkeit einen kleinsten Schnitt ermittelt.

[Karger & Stein, STOC'93]



David R. Karger



Clifford Stein

Dies ist überraschend schnell, da ein Graph $\Theta(n^2)$ Kanten haben kann.
In diesem Fall ist die Laufzeit beinahe linear!

Partielle Ausführung CONTRACT

Erfolgswahrscheinlichkeit CONTRACT sinkt mit wachsendem i

$$\prod_{i=1}^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n-i+1} \right) = \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n-1} \right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}$$

Idee: Ändere Strategie mit wachsender Iteration i .

CONTRACT(G, t): Stoppe, wenn Graph noch t Knoten enthält.

Schätze Wahrscheinlichkeit ab, dass CONTRACT(G, t) keine Kante aus optimalem Schnitt C kontrahiert:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bigcap_{i=1}^{n-t} \mathcal{E}_i \right] &\geq \prod_{i=1}^{n-t} \left(1 - \frac{2}{n-i+1} \right) = \prod_{i=1}^{n-t} \frac{n-i-1}{n-i+1} \quad (\star) \\ &= \frac{\cancel{(n-2)} \cdot \cancel{(n-3)} \cdot \dots \cdot t \cdot (t-1)}{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)} \cdot \dots \cdot \cancel{(t+1)}} = \boxed{\frac{t(t-1)}{n(n-1)}} \end{aligned}$$

Algorithmus FASTCUT

FASTCUT(zusammenhäng. Multigraph G)

$n \leftarrow |V(G)|$

if $n \leq 6$ **then**

 | löse Problem „brute force“

else

$t \leftarrow \lceil 1 + n/\sqrt{2} \rceil \approx 0,7 \cdot n$

$G_1 \leftarrow \text{CONTRACT}(G, t)$

$G_2 \leftarrow \text{CONTRACT}(G, t)$

$(S_1, T_1) \leftarrow \text{FASTCUT}(G_1)$

$(S_2, T_2) \leftarrow \text{FASTCUT}(G_2)$

return den kleineren der Schnitte $(S_1, T_1), (S_2, T_2)$

← unabhängige Ausführungen

Laufzeit?

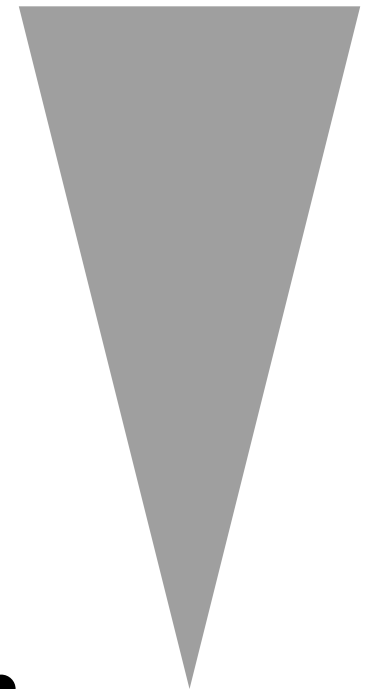
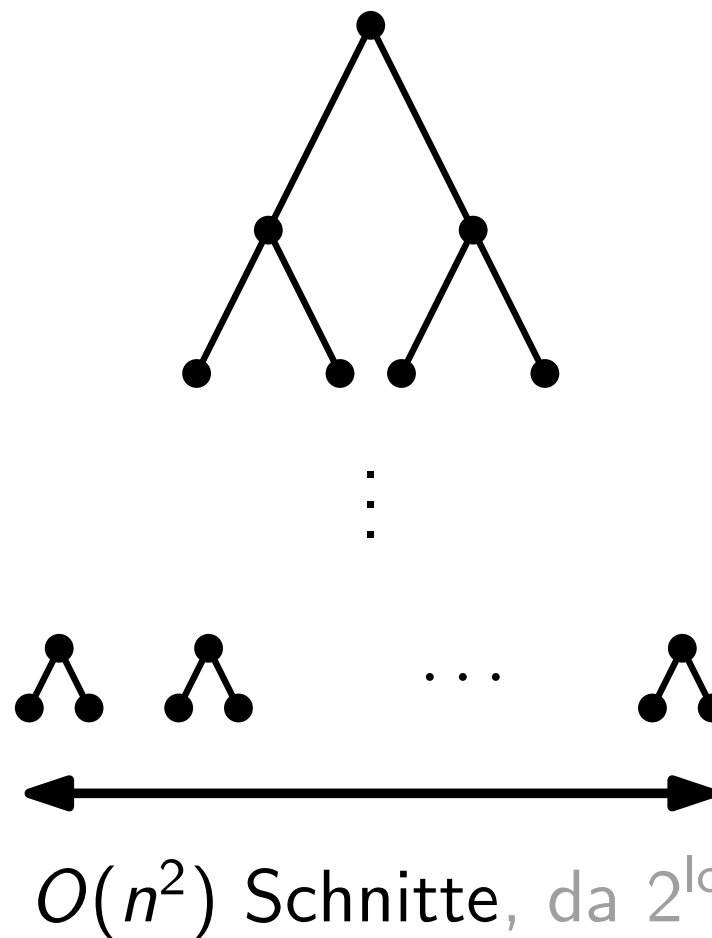
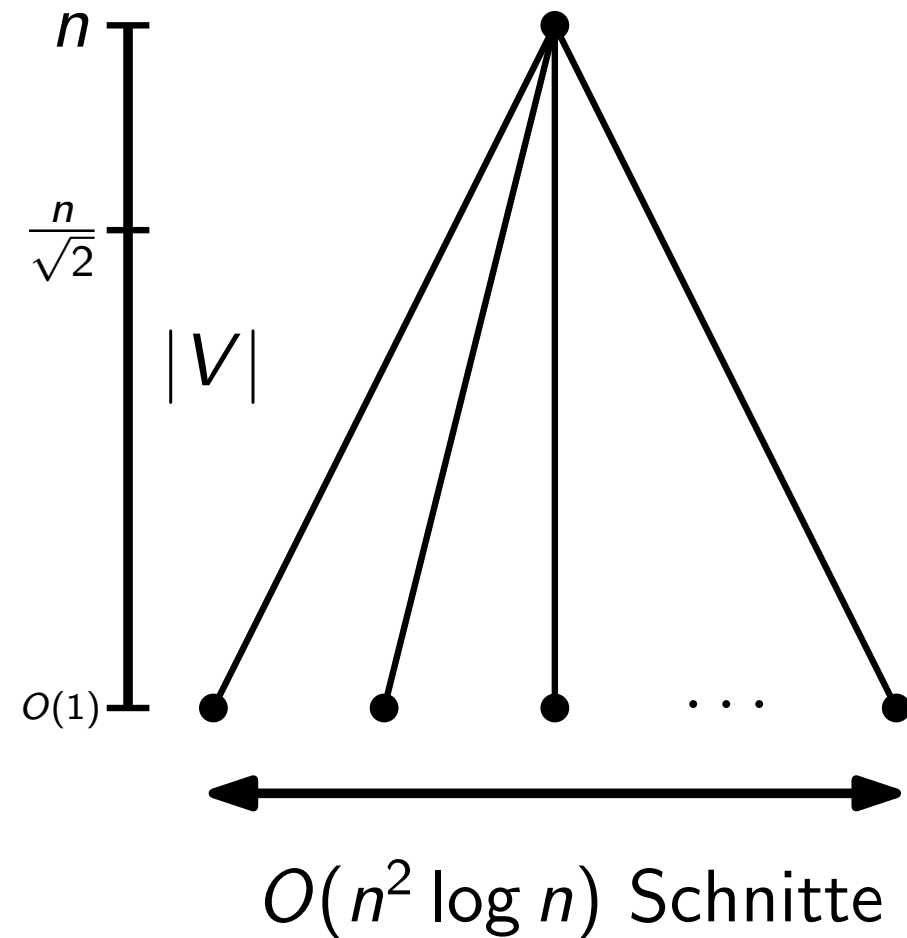
Intuition FASTCUT vs. CONTRACT

$$\prod_{i=1}^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n-i+1}\right) \leftarrow \text{Erfolgswahrscheinlichkeit}$$

CONTRACT (mit Wh.)

FASTCUT (einmal)

Ersparnis



Laufzeit

Satz. FASTCUT läuft in $O(n^2 \log n)$ Zeit.

Beweis. Rekurrenz

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + O(n^2)$$

```

FASTCUT(zsghd. Multigraph  $G = (V, E)$ )
   $n \leftarrow |V|$ 
  if  $n \leq 6$  then
    | löse Problem „brute force“
  else
     $t \leftarrow \lceil 1 + n/\sqrt{2} \rceil \approx 0,7 \cdot n$ 
     $G_1 \leftarrow \text{CONTRACT}(G, t)$ 
     $G_2 \leftarrow \text{CONTRACT}(G, t)$ 
     $(S_1, T_1) \leftarrow \text{FASTCUT}(G_1)$ 
     $(S_2, T_2) \leftarrow \text{FASTCUT}(G_2)$ 
    return kleineren von  $(S_1, T_1), (S_2, T_2)$ 

```

Erinnerung Mastertheorem (2. Fall):

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \text{ mit } f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n) \cdot \log n).$$

In unserem Fall: $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $f(n) = O(n^2)$.

Wegen $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$ folgt die Behauptung. □

Erfolgswahrscheinlichkeit (I)

Satz. FASTCUT liefert mit Wahrscheinlichkeit $\Omega(1/\log n)$ einen kleinsten Schnitt.

Beweis.

Betrachte Graph G mit n Knoten bei rekursivem Aufruf.

Seien G_1, G_2 die Graphen nach Anw. von $\text{CONTRACT}(G, t)$.

Wahrscheinlichkeit, dass kleinster Schnitt aus G in G_1 „überlebt“ ist nach (\star) mindestens

$$\frac{t(t-1)}{n(n-1)} = \frac{\lceil 1 + n/\sqrt{2} \rceil (\lceil 1 + n/\sqrt{2} \rceil - 1)}{n(n-1)} \geq \frac{(n/\sqrt{2})^2}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Erfolgswahrscheinlichkeit (II)

Seien G_1, G_2 die Graphen nach $2 \times \text{CONTRACT}(G, t)$.

WK, dass kleinster Schnitt in G_1 überlebt, ist $\geq 1/2$.

FASTCUT findet kleinsten Schnitt in G , wenn ein solcher in G_1 *oder* G_2 überlebt *und* der rekursive Aufruf im entsprechenden Graphen G_i ebenfalls einen kleinsten Schnitt findet.

Sei $\tau = \Theta(\log n)$ die Tiefe der Rekursion von FASTCUT(G).

\Rightarrow untere Schranke $p(\tau)$ für die Erfolgs-WK auf Tiefe τ :

Fehler-WK FASTCUT(G_1)

$$p(\tau + 1) = 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}p(\tau)\right)^2}_{\text{Fehler-WK auf Tiefe } \tau + 1} = p(\tau) - \frac{p(\tau)^2}{4}, \text{ wobei } p(0) = 1.$$

Erfolgswahrscheinlichkeit (III)

Sei $p(\tau)$ untere Schranke für die Erfolgs-WK:

$$p(\tau + 1) = p(\tau) - \frac{p(\tau)^2}{4} \quad \text{mit } p(0) = 1$$

Setze $q(\tau) = 4/p(\tau) - 1$. (Äquivalent: $p(\tau) = 4/(q(\tau) + 1)$)

Einsetzen ergibt $q(0) = 3$ und

$$\begin{aligned} q(\tau + 1) &= \frac{4}{p(\tau + 1)} - 1 = \frac{4}{p(\tau) - p(\tau)^2/4} - 1 \\ &= \frac{1}{1/(q(\tau) + 1) - 1/(q(\tau) + 1)^2} - 1 \\ &= \frac{(q(\tau) + 1)^2 - q(\tau)}{q(\tau)} = q(\tau) + 1 + \frac{1}{q(\tau)} \end{aligned}$$

Erfolgswahrscheinlichkeit (IV)

Es gilt $q(\tau + 1) = q(\tau) + 1 + \frac{1}{q(\tau)}$ mit $q(0) = 3$.

Zeige per Induktion, dass $\tau < q(\tau) < \tau + h_{\tau-1} + c$ für $\tau \geq 2$ und genügend große Konstante $c > 0$.

Induktionsanfang ($\tau = 2$):

$$2 < 3 = q(0) \leq q(2) \leq c$$

Induktionsschritt ($\tau \rightarrow \tau + 1$):

$$q(\tau + 1) \geq q(\tau) + 1 \stackrel{\text{IV}}{>} \tau + 1$$

$$q(\tau + 1) \stackrel{\text{IV}}{=} q(\tau) + 1 + \frac{1}{q(\tau)} < (\tau + h_{\tau-1} + c) + 1 + \frac{1}{\tau} = (\tau + 1) + h_{\tau} + c$$

S.O.

$h_i = i\text{-te harmonische Zahl}$
 $= \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} = \Theta(\log i)$

Bem. Wenn wir unten nur $q(\tau) \in O(n)$ brauchen – warum zeigen wir oben etwas stärkeres?

\Rightarrow Erfolgs-WK von FASTCUT: $p(\tau) = \frac{4}{q(\tau)+1} \geq \frac{c}{\log n}$ für eine Konstante $c > 0$ \square

$\tau = \Theta(\log n)$ und $q(\tau) \leq 2\tau + c$

Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit

Wiederhole FASTCUT $\log^2 n$ mal.

Die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Ausführung ist $\geq C / \log n$ für ein $C > 0$.

Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit:

$$\left(1 - \frac{C}{\log n}\right)^{\log^2 n} \leq \left(e^{-C/\log n}\right)^{\log^2 n} = \left(e^{\log n}\right)^{-C} = \frac{1}{n^C}$$

$$1 + x \leq e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$

Satz. Es gibt einen randomisierten Algorithmus für MINCUT mit $O(n^2 \log^3 n)$ Laufzeit, der mit hoher Wahrscheinlichkeit einen kleinsten Schnitt ermittelt.

Und noch schneller!

Satz. Es gibt einen randomisierten Algorithmus für MINCUT mit $O(\textcolor{red}{m} \log^3 n)$ Laufzeit, der mit hoher Wahrscheinlichkeit einen kleinsten Schnitt ermittelt.

Beweis. [Karger, STOC'96]



Diese Laufzeit ist auch für Graphen mit $m = o(n^2)$ Kanten fast linear!

Zum Vergleich (siehe WueCampus, Bonustrack):

Satz. Es gibt einen einfachen deterministischen Algorithmus für MINCUT mit $O(mn + n^2 \log n)$ Laufzeit.
[Stoer & Wagner, JACM'97]

... ist in LEDA (C++) und jgraphT (Java) implementiert.

... hat auf der Konf. ESA'15 den *Test of Time Award* gewonnen!