Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

5. Vorlesung

Matchings I

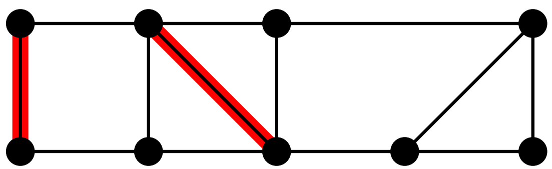
– Kombinatorische Anwendungen des Max-Flow-Min-Cut-Theorems –

Lehrstuhl für Informatik I

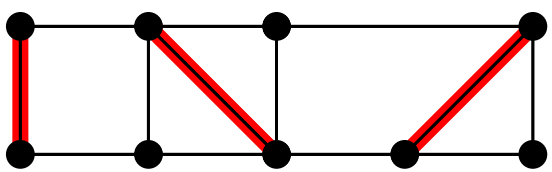
Alexander Wolff

Paarungen (Matchings)

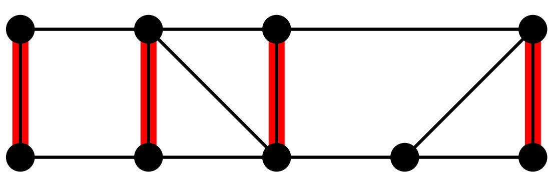
Def. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



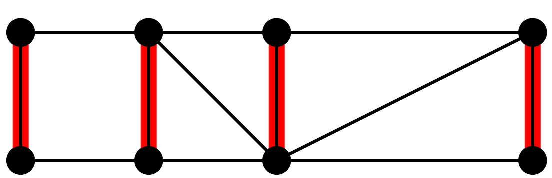
$M \subseteq E$ ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).



Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine *größte* Paarung (engl. *maximum*).



Falls jeder Knoten in G durch M *gepaart* ist, so ist M eine *perfekte* Paarung (engl. *perfect*).

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0,1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ *inzident.*

$\sum_{w \in \mathrm{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1$ für jeden Knoten v von G

Bemerkung:

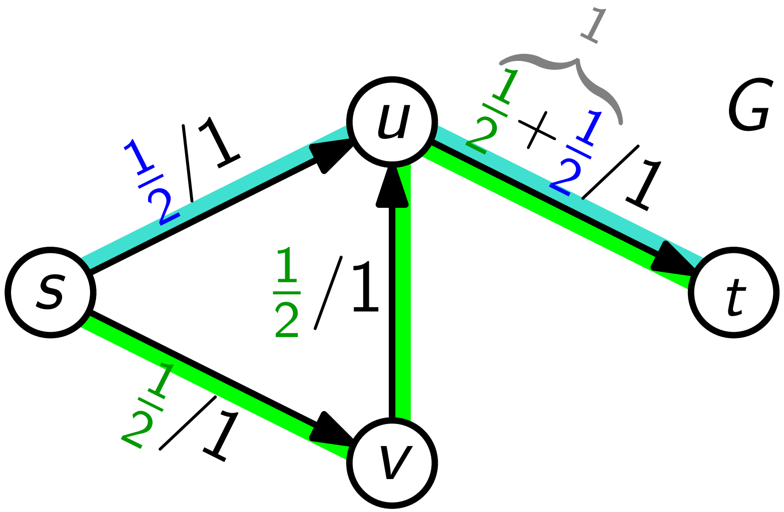
Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen! [z.B. Blütenalg., Edmonds, 1961]

Größte Paarung kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

(Beob.: Für G bipartit ist das fraktionale Matching-Polyeder ganzzahling, d.h. es genügt, das LP mit $x_e \geq 0$ zu lösen, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen.)

https://en.wikipedia.org/wiki/Matching_polytope

Ganzzahligkeitssatz



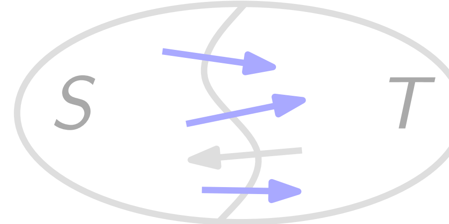
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Korollar. Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c\colon E \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Beweis. Wende FordFulkerson oder EdmondsKarp an! $\square$

Kantendisjunkte Wege

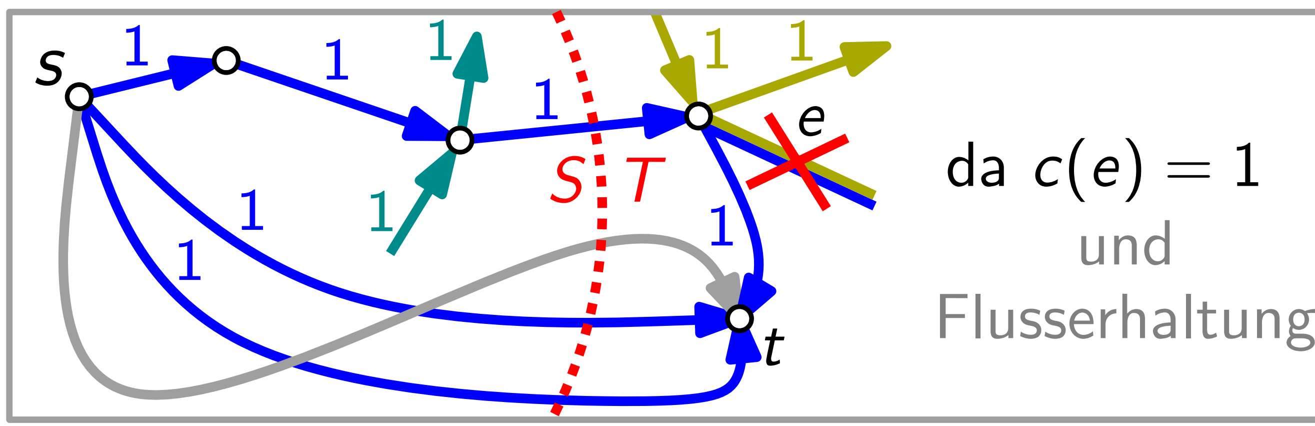


card$(S, T) = 3$

Satz. [Menger, 1927] Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s-t-Fluss. $\underset{\text{Ganzz.-Satz}}{\Rightarrow}$ oBdA. $f\colon E \to \{0, 1\}$.

Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

$\Rightarrow A :=$ max. Anz. kantendisj. s-t-Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s-t-Schnitt.

$\Rightarrow$ jeder s-t-Weg trägt ≥ 1 Kante zu Raus(S) bei.

$\Rightarrow$ card$(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Satz von Menger

Wir wissen nun $\operatorname{card}(S,T) = c(\operatorname{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines min. Schnittes $=$ Wert eines max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow$ $\operatorname{card}(S,T) = c(S) = A = |f|$.

$\Rightarrow$ Minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts
$=$ maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Wege $\square$

Satz. Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph, $s, t \in V$, $st \notin E$. Dann ist die max. Anzahl *knotendisjunkter s-t-Wege* gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt. [Menger, 1927]

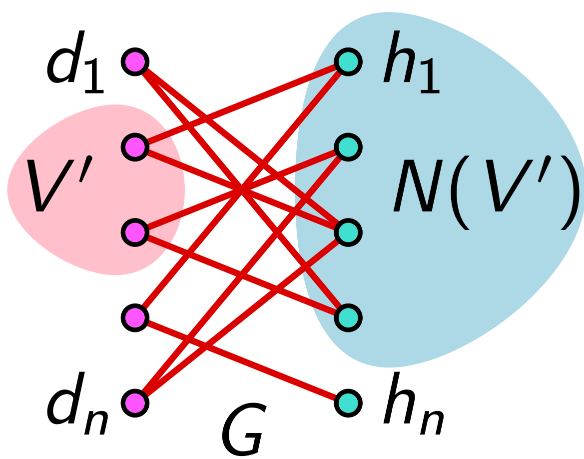
Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $\boxed{D = \{d_1, \ldots, d_n\}}$ von n Damen und eine Menge $\boxed{H = \{h_1, \ldots, h_n\}}$ von n Herren mit $D \cap H = \emptyset$, sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit,

d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in V$ ist
$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von $V' \subseteq V$ ist
$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

Der Heiratssatz

[Hall 1935]

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot\cup H, E)$!

Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

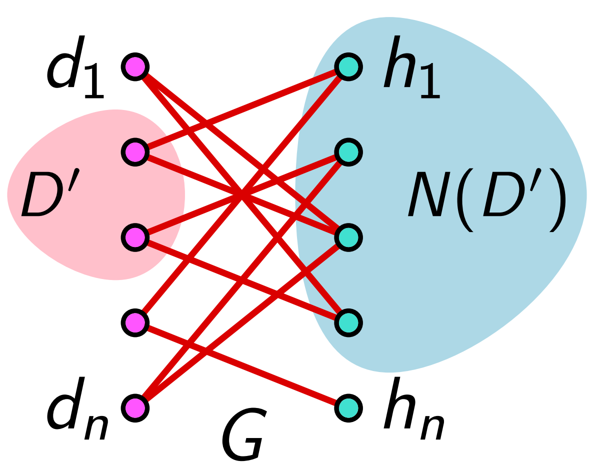
Satz. Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

G hat eine perfekte Paarung $\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis später!

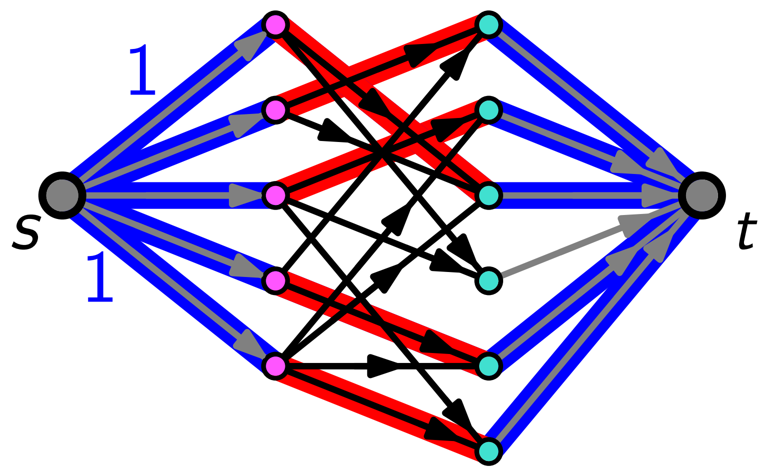
Modell.



Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge

Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G \;\to\; G', \quad c\colon E' \to \{1\}$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

Beob.

größter Ganzzahl. s-t-Fluss in G' ⟷ (1-zu-1) *größte* Paarung in G

größte Menge *kantendisjunkter* s-t-Wege in G' ⟷ *größte* Menge *unabhängiger* Kanten in G

Ergebnis

Wir haben das Problem größte Paarungen in bipartiten Graphen in $O(V)$ Zeit *reduziert* auf das Problem $\underbrace{\text{maximale Flüsse in gerichteten}}_{\text{sehr speziellen}}$ $\underbrace{\text{Graphen.}}_{\text{mit Kap.} \equiv 1}$

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(VE^{\cancel{2}})$ Zeit bestimmen.

ausnutzen!

		Laufzeit
Beweis.	– Konstruktion von G':	$O(V)$
	– ~~Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G'~~:	$O(V^{\cancel{1}} \cdot (E')^{\cancel{2}})$
	Berechne $\leq \lvert V \rvert$ s-t-Wege in je $O(E')$ Zeit	$= O(VE^{\cancel{2}})$
		$O(VE^{\cancel{2}})$

Anmerkungen

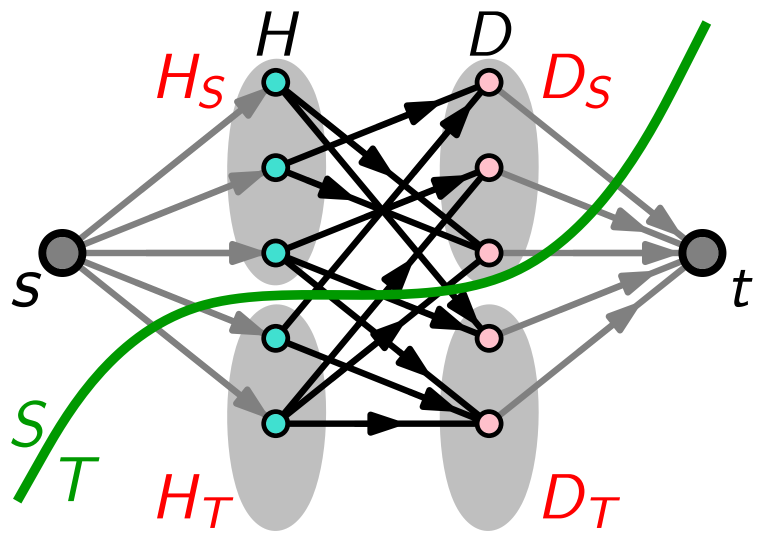
Bem. Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
– maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(V^2 E)$ Zeit
– Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{V} E)$ Zeit.

[KN, Kapitel 9.6]

Satz. Selbst in einem beliebigen Graphen $G = (V, E)$ lässt sich eine größte Paarung in $O(\sqrt{V} E)$ Zeit berechnen.

[Micali & Vazirani, FOCS'80]

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V \to V' = V \cup \{s, t\}$

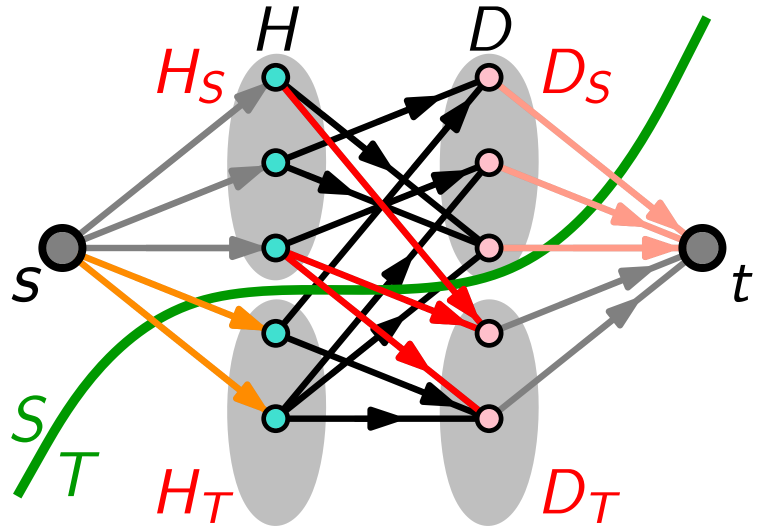
$c \colon E' \to \{1\}$

Satz. $G = (D \,\dot\cup\, H, E)$ bipartit hat eine perfekte Paarung
$\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \le |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“

G hat eine perfekte Paarung
$\Leftarrow$ G' hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$
$\Leftarrow$ $\underbrace{\text{für jeden } s\text{-}t\text{-Schnitt } (S, T) \text{ in } G' \text{ gilt } c(S) \ge |D|}_{\text{zu zeigen!}}$

Beweis des Heiratssatzes



$G \to G'$

$V \to V' = V \cup \{s, t\}$

$c\colon E' \to \{1\}$

Satz. $G = (D \,\dot\cup\, H, E)$ bipartit hat eine perfekte Paarung
$\Leftrightarrow$ für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ z.z.: (S, T) s-t-Schnitt in G' $\Rightarrow$ $c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\mathrm{Raus}(S)) = \sum_{e \in \mathrm{Raus}(S)} c(e) = |\mathrm{Raus}(S)|$

$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$

$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$

$\geq |D_T| + |D_S| = |D|$ $\square$